

# Aula de hoje: Potenciais e transformações de Gauge

Em Mecânica Clássica o ponto zero de energia não tem significado físico. A evolução temporal de variáveis dinâmicas, tais como,  $\mathbf{x}(t)$ ,  $\mathbf{p}(t)$  ou  $\mathbf{L}(t)$ , não é alterada se usarmos  $V(\mathbf{x})$  ou  $V(\mathbf{x}) + V_0$  (constante no espaço e no tempo). Isso porque  $\mathbf{F} = -\nabla V(\mathbf{x})$  e  $\therefore V_0$  uma constante aditiva, não é importante.

Como será a situação análoga em Mecânica Quântica?

Suponha  $\begin{cases} |\alpha, t_0; t\rangle \rightarrow V(\mathbf{x}) \\ |\widetilde{\alpha}, t_0; t\rangle \rightarrow \widetilde{V}(\mathbf{x}) = V(\mathbf{x}) + V_0 \end{cases}$  ambas com  $|\alpha\rangle$  em  $t = t_0$ .

Nós sabemos evoluir kets no tempo

$$\begin{aligned} |\widetilde{\alpha}, t_0; t\rangle &= \exp \left\{ -i \left[ \frac{p^2}{2m} + V(\mathbf{x}) + V_0 \right] \frac{(t - t_0)}{\hbar} \right\} |\alpha\rangle = \\ &= \exp \left[ -\frac{iV_0(t - t_0)}{\hbar} \right] |\alpha, t_0; t\rangle. \end{aligned}$$

A presença de  $V_0$  faz com que os estados  $|\alpha, t_0; t\rangle$  e  $|\widetilde{\alpha}, t_0; t\rangle$  fiquem diferentes! Eles diferem por uma fase global  $\exp \left[ -\frac{iV_0(t - t_0)}{\hbar} \right]$ .

## Potencial constante (independente do tempo e da posição)

Para um estado estacionário, somar um potencial constante  $V_0$  na Hamiltoniana implica em uma mudança na dependência temporal

$$\text{do tipo } \begin{cases} \text{Se } V(\mathbf{x}) \longrightarrow \exp \left[ -\frac{iE(t-t_0)}{\hbar} \right] \\ \text{Se } V(\mathbf{x}) + V_0 \longrightarrow \exp \left[ -\frac{i(E+V_0)(t-t_0)}{\hbar} \right] \end{cases}$$

ou seja, mudar de  $V(\mathbf{x}) \rightarrow V(\mathbf{x}) + V_0$  implica em  $E \rightarrow E + V_0$ .

Efeitos observáveis, como evolução temporal de valores esperados (exemplos:  $\langle \mathbf{x} \rangle$ ,  $\langle \mathbf{p} \rangle$ , etc.), dependem das chamadas frequências de Bohr (diferenças em energia) e portanto não mudam mediante a adição de um potencial constante na Hamiltoniana.

Esse de fato, é um primeiro exemplo de transformação de Gauge:

$$V(\mathbf{x}) \rightarrow V(\mathbf{x}) + V_0 \begin{cases} |\alpha, t_0; t\rangle \rightarrow \exp \left[ -\frac{iV_0(t-t_0)}{\hbar} \right] |\alpha, t_0; t\rangle \\ E \rightarrow E + V_0 \\ \psi(\mathbf{x}', t) \rightarrow \exp \left[ -\frac{iV_0(t-t_0)}{\hbar} \right] \psi(\mathbf{x}', t) \end{cases}$$

representação  
das coordenadas

## Potencial dependente só do tempo

O que aconteceria, se  $V_0$  fosse espacialmente uniforme, mas dependente do tempo?  $|\alpha, t_0; t\rangle = U(t, t_0)|\alpha\rangle$ , com  $U(t, t_0) = \exp\left[-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t H(t') dt'\right]$ . Mas, se  $H(t) = H + V_0(t)$ , então

$$|\alpha, t_0; t\rangle = \exp\left[-\frac{i}{\hbar} H(t - t_0)\right] \exp\left[-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t V_0(t') dt'\right] |\alpha\rangle$$

e  $\therefore$  teríamos  $\underbrace{|\alpha, t_0; t\rangle}_{V(\mathbf{x})} \longrightarrow \underbrace{\exp\left[-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t V_0(t') dt'\right] |\alpha, t_0; t\rangle}_{V(\mathbf{x}) + V_0(t)}$

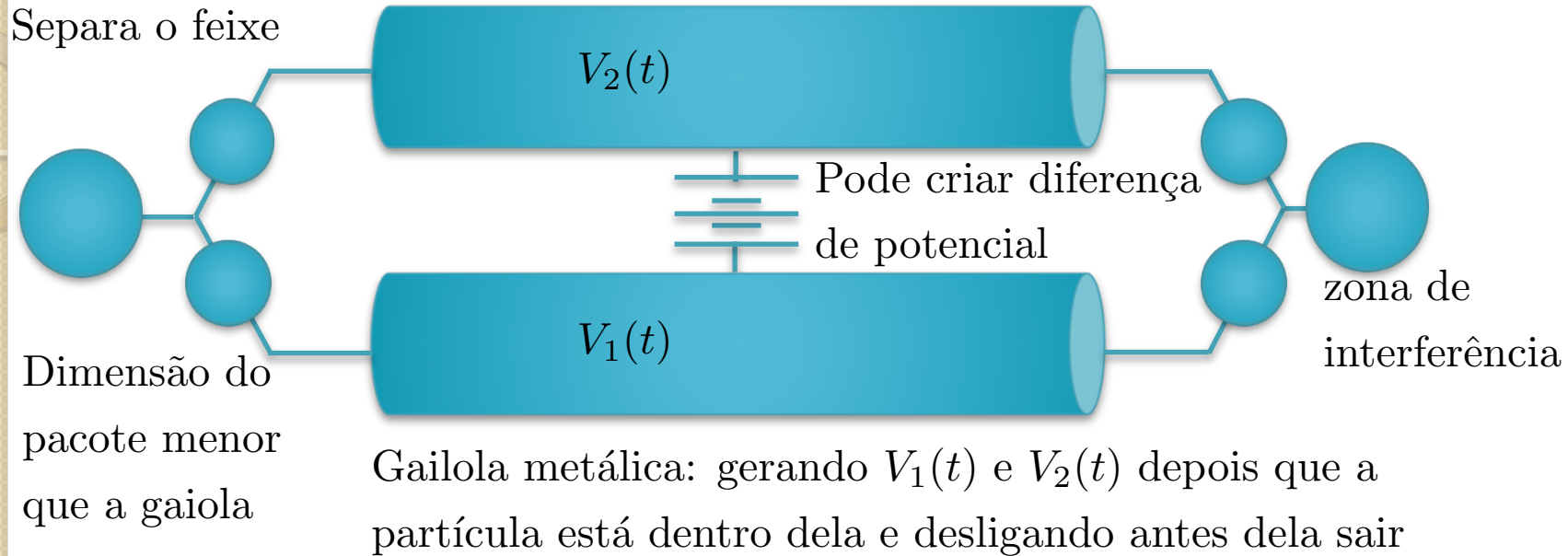
Pergunta importante: Será que a adição de um potencial espacialmente constante, mas variável no tempo, causa algum efeito mensurável no sistema?

Para responder isso, imagine um experimento com um feixe de partículas que é separado\* em dois: Parte passa por uma região de potencial  $V_1(t)$  e a outra parte por um potencial  $V_2(t)$  que variam de forma diferente no tempo. Em seguida juntamos os feixes e realizamos uma experiência de interferência. Será que perceberíamos diferenças nos resultados deste novo experimento, conforme variássemos a dependência temporal dos potenciais?

\*O pacote de onda de cada partícula é dividido em dois.

# Experimento de correlação. Potencial dependente só do tempo

## O Experimento



A interferência será do tipo  $\cos(\phi_1 - \phi_2)$  e/ou  $\sin(\phi_1 - \phi_2)$ , onde

$$\phi_1 - \phi_2 = \frac{1}{\hbar} \int_{t_1}^{t_2} dt (V_2(t) - V_1(t)).$$

Embora nenhuma força atue na partícula, pois  $\nabla V(t) = 0$ , existe um efeito mensurável. Efeito

puramente quântico, pois quando  $\hbar \rightarrow 0$

$$\begin{cases} \cos(\phi_1 - \phi_2) \\ \sin(\phi_1 - \phi_2) \end{cases} \text{ oscilam}$$

muito, destruindo qualquer efeito interessante.

# Gravidade em Mecânica Quântica

Será que existe algum efeito gravitacional quântico? Veremos que sim, mas antes exploremos as diferenças entre mecânica clássica e quântica.

Considere um corpo em queda livre

$$m_{\text{inercial}} \ddot{\mathbf{x}} = -m_{\text{grav}} \nabla \Phi_{\text{grav}} = -m_{\text{grav}} g \hat{\mathbf{z}}$$

$$\text{como } m_{\text{inercial}} = m_{\text{grav}} \rightarrow \ddot{\mathbf{x}} = -g \hat{\mathbf{z}}$$

Uma vez que a massa não aparece na equação acima, gravidade em mecânica clássica é considerada uma teoria puramente geométrica.

A situação em Mecânica Quântica não é bem assim:

$$\left[ \frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 + m\Phi_{\text{grav}} \right] \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} \rightarrow \text{a massa não cancela!}$$

De fato, a massa aparece junto com  $\hbar$ , na forma  $\frac{\hbar}{m}$ . Isso também pode ser visto na formulação de integrais de caminho de Feynman

$$\langle x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1} \rangle = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \Delta t}} \exp \left[ i \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{L_{\text{clássica}}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})}{\hbar} \right] \text{ com}$$

$$\frac{L_{\text{clássica}}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})}{\hbar} = \frac{\frac{1}{2} m \dot{z}^2 - mgz}{\hbar} \rightarrow \text{note } \hbar \text{ e } m \text{ juntos e na forma } \frac{m}{\hbar}.$$

# Gravidade em Mecânica Quântica

No limite não quântico, caímos na trajetória clássica definida pelo princípio de mínima ação

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{L_{\text{clássica}}(t)}{\hbar} = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ \frac{\frac{1}{2}m\dot{z}^2 - mgz}{\hbar} \right] = 0 \text{ e } m \text{ se cancela.}$$

Lembra do teorema de Ehrenfest?

$$m \frac{d^2}{dt^2} \langle \mathbf{x} \rangle = \frac{d}{dt} \langle \mathbf{p} \rangle = -\langle \nabla V(\mathbf{x}) \rangle \quad \text{se} \quad \nabla V(\mathbf{x}) = mg\hat{\mathbf{z}} \quad \text{então}$$

$$m \frac{d^2}{dt^2} \langle \mathbf{x} \rangle = -mg\hat{\mathbf{z}} \quad (\text{não depende de } \hbar \text{ nem de } m)$$

Para ter efeito quântico não trivial precisamos ter dependência com  $\hbar$  e consequentemente com  $m$  também.

- Até 1975, não se sabia de nenhum experimento direto que permitisse usar o termo  $m\Phi_{\text{grav}}$  na equação de Schrödinger.
- Queda livre de partículas elementares  $\rightarrow$  equação de Ehrenfest é suficiente para mostrar que não teremos efeitos quânticos.
- Experimento sobre “peso de prótons” de V. Pound *et al.* também não estabeleceu efeitos gravitacionais quânticos (eles mediram deslocamentos de frequências que não dependem de  $\hbar$  explicitamente).

# Gravidade em Mecânica Quântica

Efeito gravitacional na escala microscópica é difícil de detectar. Porque?

As forças envolvidas são muito pequenas. Para ilustrar, considere o estado ligado do átomo de hidrogênio. Sabemos que o tamanho típico do átomo

é estimado por  $a_0 \equiv$  raio de Bohr  $= \frac{\hbar^2}{e^2 m_e}$ . Como seria “ $a_0$ ” se a força de

ligação fosse gravitacional? Para calcular isso, troque o próton por um

neutron, o que equivale a trocar  $-\frac{e^2}{r^2}$  por  $-\frac{Gm_e m_n}{r^2}$ . Obteríamos com

isso, um raio de Bohr gravitacional “ $a_0$ ”  $= \frac{\hbar^2}{Gm_e^2 m_n}$ . A força gravitacional

entre o neutron e elétron é cerca de  $10^{39}$  vezes menor que a força elétrica

entre o próton e o elétron, pois  $\frac{e^2}{Gm_e m_n} \approx 2.3 \times 10^{39}$ .

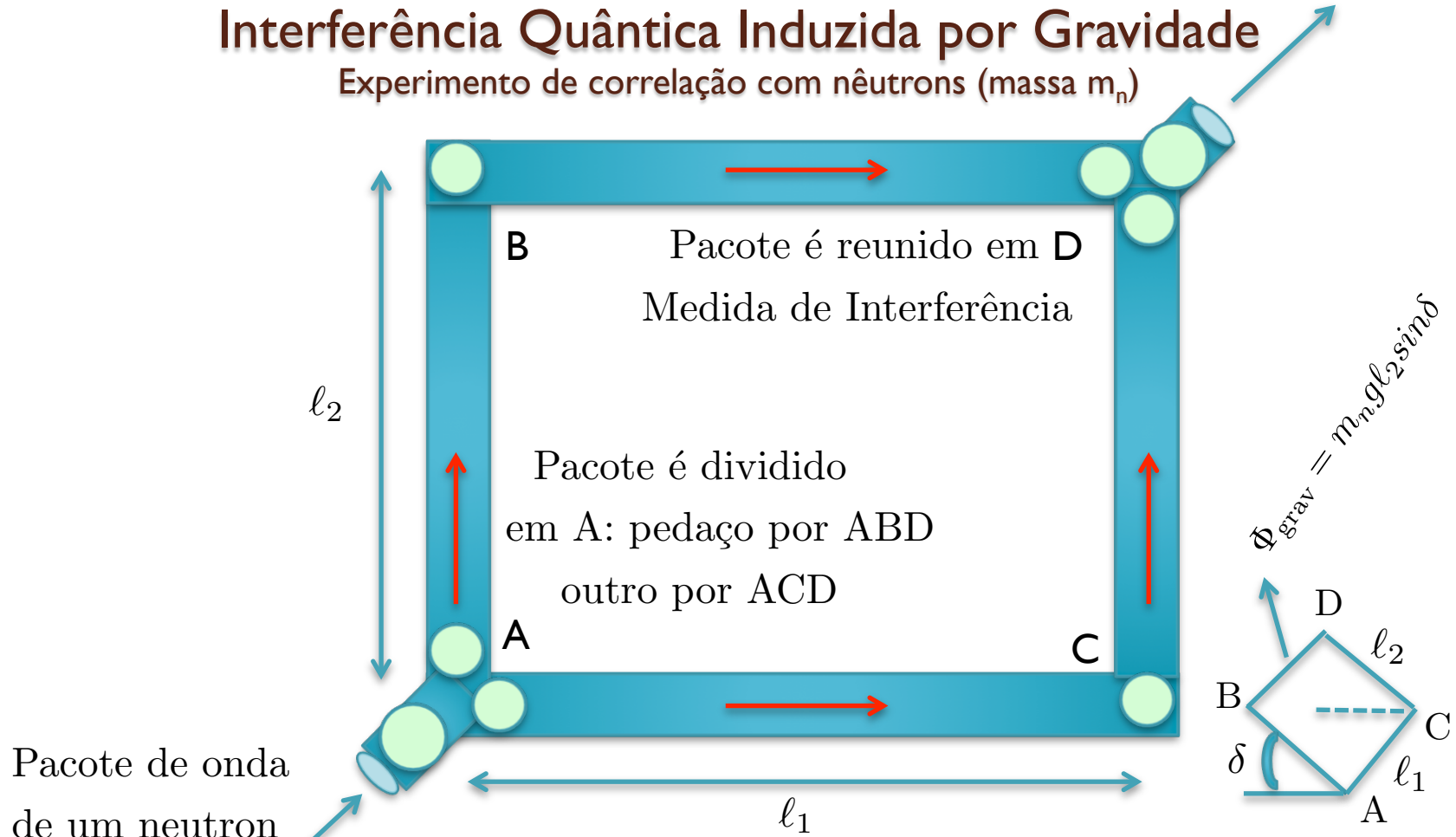
Isto fornece um raio de Bohr gravitacional de  $10^{31} \text{ cm} \approx 10^{13}$  anos-luz.

(Tamanho algumas vezes maior que o raio estimado do universo -  $10^{28} \text{ cm}$ )



# Interferência Quântica Induzida por Gravidade

Experimento de correlação com nêutrons (massa  $m_n$ )



- dois casos
- 1) ABCD em um plano horizontal: potencial gravitacional igual em ambos os percursos.
  - 2) ABCD rodado de  $\delta$  em torno de AC. Potencial gravitacional no percurso AB é igual ao do CD, mas no percurso BD é diferente do potencial do percurso AC.



# Interferência Quântica Induzida por Gravidade

Segundo slide 2 (4), a diferença de fase será:  $\exp \left[ \frac{-iT m_n g l_2 \sin \delta}{\hbar} \right]$ , onde

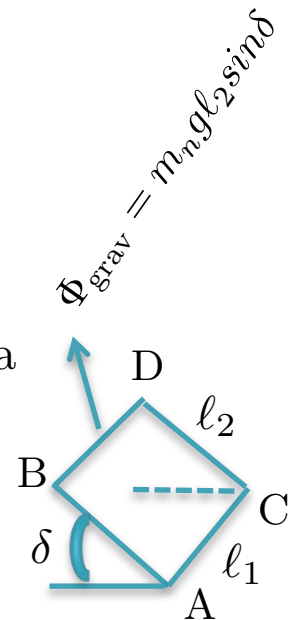
- $T$  é o tempo para percorrer a distância  $BD$  ( $\approx$  tempo em  $AC$ );
- $\delta$  pode variar de  $0$  à  $\frac{\pi}{2}$  ou de  $0$  à  $-\frac{\pi}{2}$ ;

- Note que: 
$$\begin{cases} T = \frac{\ell_1}{v_{\text{pacote}}} \\ p = \hbar k = \hbar \frac{2\pi}{\lambda} = m_n v_{\text{pacote}} \therefore v_{\text{pacote}} = \frac{2\pi \hbar}{m_n \lambda} \end{cases}$$

$$\hbar = h/2\pi \text{ e } \bar{\lambda} = \lambda/2\pi$$

Assim  $T = \frac{\ell_1}{v_{\text{pacote}}} = \frac{\ell_1 m_n \lambda}{2\pi \hbar} = \frac{\bar{\lambda} \ell_1 m_n}{\hbar} \therefore$  a diferença de fase fica

$$\phi_{ACD} - \phi_{ABD} = \frac{\bar{\lambda} \ell_1 m_n}{\hbar} \frac{m_n g l_2 \sin \delta}{\hbar} = \frac{m_n^2 g l_1 l_2 \bar{\lambda} \sin \delta}{\hbar^2}$$



Uma outra forma de ver isso: 
$$\begin{cases} \text{em } AC \rightarrow \text{Eq.}(1) : \frac{p^2}{2m_n} = E \\ \text{em } BD \rightarrow \text{Eq.}(2) : \frac{p'^2}{2m_n} + m_n g l_2 \sin \delta = E \end{cases}$$

$$\text{Eq.}(2) - \text{Eq.}(1) \rightarrow \frac{p'^2 - p^2}{2m_n} = -m_n g l_2 \sin \delta \rightarrow \frac{(p' - p)(p' + p)}{2m_n} = -m_n g l_2 \sin \delta$$

Tome 
$$\begin{cases} p = \frac{h}{\lambda} = \frac{\hbar}{\lambda} \\ p' = \frac{\hbar}{\lambda + \Delta} \end{cases} \Rightarrow \text{calcule } (p' - p) \text{ e } (p' + p) \text{ e insira acima}$$

# Interferência Quântica Induzida por Gravidade

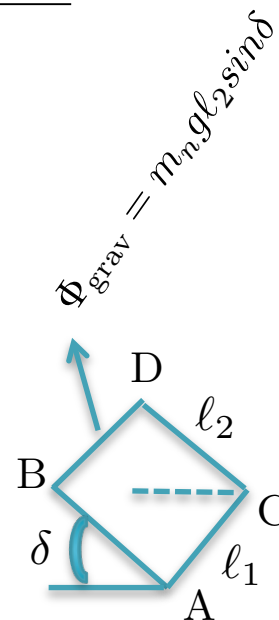
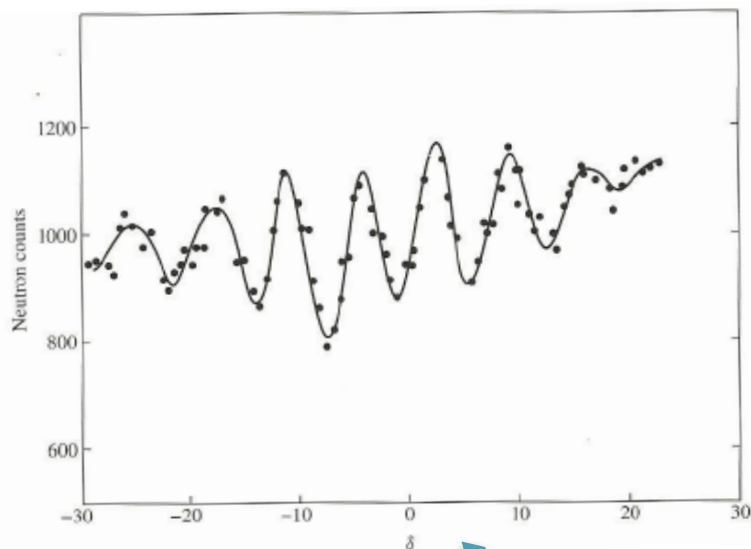
$$\frac{(p' - p)(p' + p)}{2m_n} = -m_n g l_2 \sin \delta \rightarrow \hbar^2 \left( \frac{1}{\bar{\lambda} + \Delta} - \frac{1}{\bar{\lambda}} \right) \left( \frac{1}{\bar{\lambda} + \Delta} + \frac{1}{\bar{\lambda}} \right) = -2m_n^2 g l_2 \sin \delta$$

mas

$$\begin{cases} \left( \frac{1}{\bar{\lambda} + \Delta} - \frac{1}{\bar{\lambda}} \right) = -\frac{\Delta}{\bar{\lambda}(\bar{\lambda} + \Delta)} = -\frac{\Delta}{\bar{\lambda}^2(1 + \Delta/\bar{\lambda})} \sim -\frac{\Delta}{\bar{\lambda}^2} \\ \left( \frac{1}{\bar{\lambda} + \Delta} + \frac{1}{\bar{\lambda}} \right) = \frac{2\bar{\lambda} + \Delta}{\bar{\lambda}(\bar{\lambda} + \Delta)} = \frac{1}{\bar{\lambda}} \frac{(2 + \Delta/\bar{\lambda})}{(1 + \Delta/\bar{\lambda})} \sim \frac{2}{\bar{\lambda}} \end{cases} \quad \therefore \Delta = \frac{m_n^2 g l_2 \sin \delta \bar{\lambda}^3}{\hbar^2}$$

A diferença de fase fica  $\frac{l_1}{\bar{\lambda}} - \frac{l_1}{\bar{\lambda} + \Delta} = l_1 \left( \frac{1}{\bar{\lambda}} - \frac{1}{\bar{\lambda} + \Delta} \right) = l_1 \frac{\Delta}{\bar{\lambda}(\bar{\lambda} + \Delta)} \sim \frac{l_1 \Delta}{\bar{\lambda}^2}$

$$\phi_{ACD} - \phi_{ABD} = \frac{m_n^2 g l_1 l_2 \bar{\lambda} \sin \delta}{\hbar^2}$$



Veja: R. Colella, A.W. Overhauser, e S.A. Werner, Phys. Rev. Lett. **34**, 1472 (1975).

# Partícula carregada sujeita à um campo eletromagnético

Um pouco sobre cargas interagindo com campos eletromagnéticos

1) Começa com a Força de Lorentz

$$m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = \mathbf{F} = e \left[ \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} \right].$$

2) Das Equações de Maxwell, percebemos a importância de  $\phi$  e  $\mathbf{A}$  e

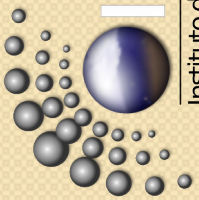
$$\text{temos } \begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \rightarrow \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \rightarrow \nabla \times \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \\ \therefore \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \phi \rightarrow \mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \end{cases}$$

3) Equações de Movimento de Newton  $m\ddot{\mathbf{x}} = e \left( E_x + \dot{y} \frac{B_z}{c} - \dot{z} \frac{B_y}{c} \right) \rightarrow$

$$m\ddot{\mathbf{x}} = e \left\{ -\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{\dot{y}}{c} \left[ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right] - \frac{\dot{z}}{c} \left[ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right] \right\}$$

4) Lagrangeana: construída de tal forma que  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}$  forneça a equação de movimento. Verifique que a expressão serve:

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{x}}^2 + \frac{e}{c} \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) - e \phi(\mathbf{x}, t)$$



## Partícula carregada sujeita à um campo eletromagnético

5) Momento canônico  $p_x \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + \frac{e}{c}A_x(\mathbf{x}, t)$

Ou seja,  $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{x}} + \frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$  (não é simplesmente  $m\mathbf{v}$ )

6) Construa a Hamiltoniana Clássica

$$H = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{x}} - L = \frac{1}{2m} \left( \mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A} \right)^2 + e\phi$$

7) Utilize a estratégia desenvolvida no curso para construir o análogo quântico.

Para ilustrar, suponha inicialmente que  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  possam ser derivados de  $\mathbf{A}$  e  $\phi$  independentes do tempo. Isto é:

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \phi(\mathbf{x}) \text{ e } \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{x}), \text{ com } \begin{cases} \mathbf{E} = -\nabla\phi \\ \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \\ H = \frac{1}{2m} \left( \mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A} \right)^2 + e\phi \end{cases}$$

Na mecânica quântica,  $\mathbf{A}$  e  $\phi$  são funções do operador posição  $\mathbf{x}$  da partícula.

Sendo assim, como  $[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij} \rightarrow [p_i, A_j] \neq 0$ . Isso exige cuidado para lidar com  $H$ . Por exemplo, a parte envolvendo o operador

$$\left( \mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A} \right)^2 = \mathbf{p}^2 - \frac{e}{c} \underbrace{(\mathbf{A} \cdot \mathbf{p} + \mathbf{p} \cdot \mathbf{A})}_{\text{simetria}} + \frac{e^2}{c^2}\mathbf{A}^2$$

note simetria em  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{p}$  e que  $H$  é Hermiteano

Começemos com o enfoque de Heisenberg

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{[x_i, H]}{i\hbar} = \frac{1}{i\hbar 2m} \left\{ [x_i, \mathbf{p}^2] - \frac{e}{c} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{p}) + \frac{e^2}{c^2} \mathbf{A}^2 \right\} \quad (\text{usei que } [x_i, \phi] = 0)$$

Usando que

$$\begin{cases} [x_i, \mathbf{p}^2] = 2i\hbar p_i \\ [x_i, (\mathbf{p} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{p})] = i\hbar \frac{\partial}{\partial p_i} (p_i A_i + A_i p_i) = 2i\hbar A_i \\ [x_i, \mathbf{A}^2] = 0 \end{cases}$$

temos:  $\frac{dx_i}{dt} = \frac{p_i - \frac{e}{c} A_i}{m}$  o que mostra que  $\mathbf{p}$  (nosso gerador de translações) não

é o mesmo que  $m \frac{d\mathbf{x}}{dt}$ . Definiremos  $\underbrace{\boldsymbol{\Pi}}_{\text{momento cinemático}} \equiv m \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \underbrace{\mathbf{p}}_{\text{momento canônico}} - \frac{e\mathbf{A}}{c}$

O momento canônico tem a propriedade  $[p_i, p_j] = 0$ . E o cinemático?

$$[\Pi_i, \Pi_j] = [p_i - \frac{e}{c} A_i, p_j - \frac{e}{c} A_j] = -\frac{e}{c} \{ [p_i, A_j] + [A_i, p_j] \} = \frac{i\hbar e}{c} \left\{ \frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \right\}$$

onde usamos que  $[p_i, G(\mathbf{x})] = -i\hbar \frac{\partial G}{\partial x_i}$ .

$$(\nabla \times \mathbf{A})_k = B_k$$

0 se  $i = j$

De um modo geral podemos escrever:  $[\Pi_i, \Pi_j] = \frac{i\hbar e}{c} \epsilon_{ijk} B_k$ , onde

para  $i \neq j \neq k$ ,  $\epsilon_{ijk} = 1$  se cíclico em 1,2,3 e  $\epsilon_{ijk} = -1$ , se não cíclico

# Partícula carregada sujeita à um campo eletromagnético

A Hamiltoniana pode ser reescrita como

$$H = \frac{1}{2m} \left( \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + e\phi = \frac{\mathbf{\Pi}^2}{2m} + e\phi$$

Já sabemos que  $m \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{\Pi} = \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A}$ . Quanto vale  $m \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = \frac{d\mathbf{\Pi}}{dt}$ ?

Façamos a conta para a componente  $i = 1$ , isto é:

$$\frac{d\Pi_1}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\Pi_1, H] = \frac{1}{i\hbar} \left[ \Pi_1, \frac{\mathbf{\Pi}^2}{2m} + e\phi \right]$$

Mostre que 
$$\begin{cases} [\Pi_1, \Pi_1^2] = 0 \\ [\Pi_1, \Pi_2^2] = \frac{i\hbar e}{c} \left( m \frac{dx_2}{dt} B_3 + B_3 m \frac{dx_2}{dt} \right) \\ [\Pi_1, \Pi_3^2] = -\frac{i\hbar e}{c} \left( m \frac{dx_3}{dt} B_2 + B_2 m \frac{dx_3}{dt} \right) \\ [\Pi_1, e\phi] = -i\hbar e \frac{\partial \phi}{\partial x_1} = i\hbar e E_1 \end{cases}$$
 e obtenha

para a componente 1 : 
$$\frac{d\Pi_1}{dt} = eE_1 + \frac{e}{2c} \left\{ \left( \frac{d\mathbf{x}}{dt} \times \mathbf{B} \right)_1 - \left( \mathbf{B} \times \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right)_1 \right\}$$

Enfim temos: 
$$m \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = \frac{d\mathbf{\Pi}}{dt} = e \left[ \mathbf{E} + \frac{1}{2c} \left( \frac{d\mathbf{x}}{dt} \times \mathbf{B} - \mathbf{B} \times \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right) \right]$$

*A versão quântica da força de Lorentz (teorema de Ehrenfest).*

*Compare com equação do slide 11.*



# Partícula carregada sujeita à um campo eletromagnético

Como fica a equação de Schrödinger com  $\phi$  e  $\mathbf{A}$ ?

$$\langle \mathbf{x}' | H | \alpha, t_0; t \rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle \mathbf{x}' | \alpha, t_0; t \rangle$$

Começemos por

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m} \langle \mathbf{x}' | (\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{x}))^2 | \alpha, t_0; t \rangle &= \\ &= \frac{1}{2m} \left( -i\hbar \nabla' - \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{x}') \right) \langle \mathbf{x}' | (\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{x})) | \alpha, t_0; t \rangle = \\ &= \frac{1}{2m} \left( -i\hbar \nabla' - \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{x}') \right) \left( -i\hbar \nabla' - \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{x}') \right) \langle \mathbf{x}' | \alpha, t_0; t \rangle \end{aligned}$$

Note que o gradiente da esquerda “pega” todo mundo (inclusive o  $\mathbf{A}(\mathbf{x}')$  da direita). Com isso, a equação de Schrödinger é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m} \left( -i\hbar \nabla' - \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{x}') \right) \left( -i\hbar \nabla' - \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{x}') \right) \langle \mathbf{x}' | \alpha, t_0; t \rangle + e\phi(\mathbf{x}') \langle \mathbf{x}' | \alpha, t_0; t \rangle &= \\ = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle \mathbf{x}' | \alpha, t_0; t \rangle \end{aligned}$$

Como seria a nova definição de  $\mathbf{j}$ , o fluxo de probabilidade? Lembram

de como defini-lo? Use  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ ,  $\rho = \psi^* \psi$ , com  $\psi = \langle \mathbf{x}' | \alpha, t_0; t \rangle$

## Partícula carregada sujeita à um campo eletromagnético

Para calcular  $\mathbf{j}$ , o fluxo de probabilidade, comece por  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \psi + \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t}$ , e use a equação de Schrödinger do slide anterior para obter:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} \left[ - \langle \mathbf{x}' | \frac{\Pi^2}{2m} | \alpha, t_0; t \rangle^* \langle \mathbf{x}' | \alpha, t_0; t \rangle + \langle \mathbf{x}' | \alpha, t_0; t \rangle^* \langle \mathbf{x}' | \frac{\Pi^2}{2m} | \alpha, t_0; t \rangle \right].$$

Note que a parte em  $\phi$  cancelou, pois  $\phi^* = \phi$ . A tarefa se resume em colocar

a expressão acima na forma:  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla' \cdot \mathbf{j} = 0$ . Depois de algum trabalho, temos:

$$\mathbf{j} = \frac{\hbar}{m} \text{Im}(\psi^* \nabla' \psi) - \frac{e}{mc} \mathbf{A} |\psi|^2$$

que poderia ter sido obtido, com  $\left\{ \begin{array}{l} \text{troca } \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - \frac{e}{mc} \mathbf{A} \\ \frac{\hbar}{i} \nabla' - \frac{e}{mc} \mathbf{A}(\mathbf{x}') \rightarrow \text{representação } \mathbf{x} \end{array} \right.$

Quando escrevemos a função de onda na forma  $\psi(\mathbf{x}', t) = \sqrt{\rho} \exp\left(\frac{iS}{\hbar}\right)$ ,

$S$  real, obtivemos  $\text{Im}(\psi^* \nabla' \psi) = \frac{\rho}{\hbar} \nabla' S$ . Assim, o  $\mathbf{j}$ , pode ser escrito por:

$$\mathbf{j} = \frac{\hbar}{m} \frac{\rho}{\hbar} \nabla' S - \frac{e}{mc} \mathbf{A} \rho = \frac{\rho}{m} \left( \nabla' S - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)$$

Mostre, seguindo o que fizemos para  $\mathbf{A} = 0$ , que  $\int d^3 x' \mathbf{j} = \frac{\langle \Pi \rangle}{m}$ .

## Transformação de Gauge

Estamos prontos para estudar transformação de Gauge. Considere primeiro:

$\phi \rightarrow \phi + \lambda$  e  $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}$ , onde  $\lambda$  é constante - não depende de  $\mathbf{x}$  e  $t$ .

Esta transformação já foi estudada antes (mudança no zero da energia).

Uma transformação mais interessante é: 
$$\begin{cases} \phi \rightarrow \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \lambda}{\partial t} \\ \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla \lambda(\mathbf{x}, t) \end{cases}$$

Cujos campos 
$$\begin{cases} \mathbf{E} = -\nabla(\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \lambda}{\partial t}) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{A} + \nabla \lambda) = -\nabla \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{A} + \nabla \lambda) = \nabla \times \mathbf{A} + \underbrace{\nabla \times \nabla \lambda}_{0} = \nabla \times \mathbf{A} \end{cases}$$

ficam inalterados e  $\therefore$  a trajetória clássica da partícula carregada sob ação destes campos não se altera (a força de Lorenz não se altera).

Queremos estudar os efeitos quânticos da transformação de Gauge.

Para isso, considere um caso particular 
$$\begin{cases} \phi \rightarrow \phi \\ \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla \lambda(\mathbf{x}) \end{cases}$$

$\lambda(\mathbf{x}, t) = \lambda(\mathbf{x})$  não depende de  $t$ .

# Transformação de Gauge

Considere  $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$ . Tal campo pode ser derivado de  $\begin{cases} A_x = -\frac{By}{2} \\ A_y = \frac{Bx}{2} \\ A_z = 0 \end{cases}$  pois,

$$B = \nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{z}} = B\hat{\mathbf{z}}$$

ou de  $\begin{cases} A_x = -By \\ A_y = 0 \\ A_z = 0 \end{cases}$  pela mesma razão, ou seja  $B = \nabla \times \mathbf{A} = B\hat{\mathbf{z}}$ .

Note que os dois  $\mathbf{A}'$ s se relacionam por  $\mathbf{A}_{\text{nov}} = \mathbf{A}_{\text{velho}} + \nabla \left( \underbrace{-\frac{Bxy}{2}}_{\lambda(\mathbf{x})} \right)$

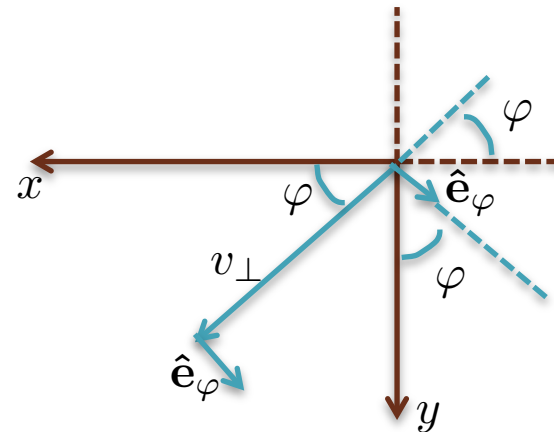
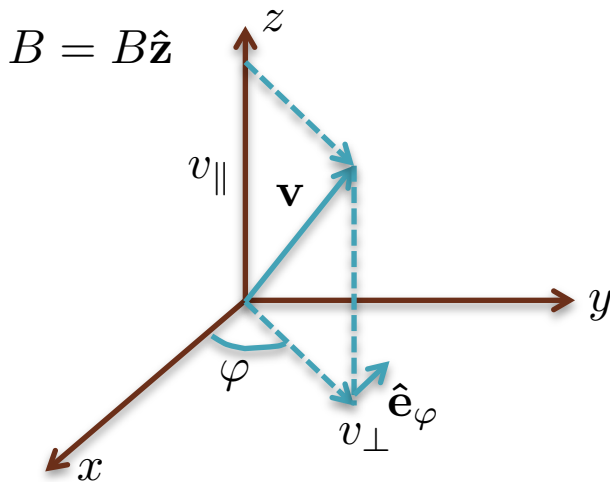
# Transformação de Gauge

Para  $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$ , considere a força de Lorentz

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= e\left(\frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c}\right) = \frac{e}{c} \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = \frac{eB}{c}(v_y\hat{\mathbf{x}} - v_x\hat{\mathbf{y}}) = \\ &= \frac{eB}{c}v_{\perp}(\underbrace{\sin\varphi\hat{\mathbf{x}} - \cos\varphi\hat{\mathbf{y}}}_{-\hat{\mathbf{e}}_{\varphi}}) = -\frac{eB}{c}v_{\perp}(\hat{\mathbf{e}}_{\varphi})\end{aligned}$$

∄ força na direção  $\hat{\mathbf{z}}$  e a força sempre aponta  $\perp$  à  $\mathbf{v}$  e no plano  $xy$ .

∴ a partícula realiza uma espiral (movimento circular no plano  $xy$ ).



# Transformação de Gauge

Considere agora a equação de Hamilton  $\frac{dp_x}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}$

$$\text{onde } H = \frac{1}{2m} \left( \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + e \underbrace{\phi}_0 = \frac{1}{2m} \left( \mathbf{p}^2 - \frac{e}{c} \mathbf{p} \cdot \mathbf{A} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{p} + \frac{e^2}{c^2} \mathbf{A}^2 \right)$$

$$\frac{dp_x}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} \begin{cases} = 0 \text{ se usarmos } \mathbf{A} = (-By, 0, 0) \\ \neq 0 \text{ se usarmos } \mathbf{A} = \left(-\frac{By}{2}, \frac{Bx}{2}, 0\right) \end{cases}$$

Isto mostra que em geral o momento canônico não é invariante de Gauge. É importante, entretanto que  $\mathbf{\Pi}$  seja invariante de Gauge, pois ele é responsável pela trajetória que depende apenas das condições iniciais e da força de Lorentz (que não depende de  $\lambda$ ).

Como  $\mathbf{\Pi}$  e  $\mathbf{p}$  estão relacionados por  $\mathbf{\Pi} = \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{p}$  e  $\frac{e}{c} \mathbf{A}$  devem mudar de forma a não alterar  $\mathbf{\Pi}$ .

Na lousa, mostramos isso, usando a transformação de Gauge para redefinir a Lagrangeana e o momento canônico  $\mathbf{p}$ .

[lousa](#)



Da força de Lorentz  $m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = \mathbf{F} = e \left[ \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} \right]$  e lei de Newton

construímos a Lagrangeana  $L = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{x}}^2 + \frac{e}{c} \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) - e\phi(\mathbf{x}, t)$  e

obtivemos o momento canônico  $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{x}} + \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ . No exemplo, em questão,

$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{x})$  e  $\phi(\mathbf{x}, t) = 0 \Rightarrow L = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{x}}^2 + \frac{e}{c} \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x})$  com  $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{x}} + \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{x})$ .

A transformação de Gauge  $\mathbf{A}_N(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}) + \nabla \lambda(\mathbf{x})$ , resulta em um nova

Lagrangeana  $L_N = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{x}}^2 + \frac{e}{c} \dot{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{A}(\mathbf{x}) + \nabla \lambda(\mathbf{x}))$  e um novo momento canônico

$\mathbf{p}_N = m\dot{\mathbf{x}} + \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{x}) + \frac{e}{c} \nabla \lambda(\mathbf{x})$ . Como fica o novo momento cinemático  $\mathbf{\Pi}_N$ ?

$\mathbf{\Pi}_N = \mathbf{p}_N - \frac{e}{c} \mathbf{A}_N(\mathbf{x}) = \left( m\dot{\mathbf{x}} + \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{x}) + \frac{e}{c} \nabla \lambda(\mathbf{x}) \right) - \frac{e}{c} (\mathbf{A}(\mathbf{x}) + \nabla \lambda(\mathbf{x})) = m\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{\Pi}$

A Hamiltoniana, que pode ser reescrita como

$H = \frac{1}{2m} \left( \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + e\phi = \frac{\mathbf{\Pi}^2}{2m} + e\phi \Rightarrow$  não muda (mesmo espectro).