

Transformação de Gauge

É razoável esperar que os valores esperados de quantidades clássicas invariantes mediante transformações de Gauge também sejam invariantes. Assim, esperamos que $\langle \mathbf{x} \rangle$ e $\langle \mathbf{\Pi} \rangle$ não mudem mediante transformação de Gauge, mas $\langle \mathbf{p} \rangle$ mude. Em outras palavras:

Se $\left\{ \begin{array}{l} |\alpha\rangle \text{ um estado na presença de } \mathbf{A} \\ |\tilde{\alpha}\rangle \text{ um estado na presença de } \tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \nabla\lambda \end{array} \right.$

então, esperamos que: $\left\{ \begin{array}{l} \langle \alpha | \mathbf{x} | \alpha \rangle = \langle \tilde{\alpha} | \mathbf{x} | \tilde{\alpha} \rangle \\ \langle \alpha | \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} | \alpha \rangle = \langle \tilde{\alpha} | \mathbf{p} - \frac{e}{c} \tilde{\mathbf{A}} | \tilde{\alpha} \rangle \end{array} \right.$

com $\langle \alpha | \alpha \rangle = \langle \tilde{\alpha} | \tilde{\alpha} \rangle = 1$.

Vamos construir um operador G tal que $|\tilde{\alpha}\rangle = G|\alpha\rangle$ e que quando inserido em $\langle \tilde{\alpha} | \mathbf{x} | \tilde{\alpha} \rangle = \langle \alpha | G^\dagger \mathbf{x} G | \alpha \rangle \stackrel{\text{desejo}}{=} \langle \alpha | \mathbf{x} | \alpha \rangle$ e $\therefore G^\dagger \mathbf{x} G = \mathbf{x}$.

Ou, de forma semelhante, para o momento cinemático:

$$\langle \tilde{\alpha} | \mathbf{p} - \frac{e}{c} \tilde{\mathbf{A}} | \tilde{\alpha} \rangle = \langle \alpha | G^\dagger \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} - \frac{e}{c} \nabla\lambda \right) G | \alpha \rangle \stackrel{\text{desejo}}{=} \langle \alpha | \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) | \alpha \rangle$$

$$\text{e } \therefore G^\dagger \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} - \frac{e}{c} \nabla\lambda \right) G = \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)$$

Transformação de Gauge

Tiramos do chapéu que $G = \exp\left(\frac{ie}{\hbar c} \lambda(\mathbf{x})\right)$ é a solução. Inspirada na condição $\langle \alpha | \alpha \rangle = \langle \tilde{\alpha} | \tilde{\alpha} \rangle = 1 \rightarrow G^\dagger G = 1$

Podemos verificar se funciona para o caso

$$G^\dagger \mathbf{x} G = \exp\left(-\frac{ie}{\hbar c} \lambda(\mathbf{x})\right) \mathbf{x} \exp\left(\frac{ie}{\hbar c} \lambda(\mathbf{x})\right) = \mathbf{x} \text{ pois, } [\mathbf{x}, \lambda(\mathbf{x})] = 0 \quad (\text{c.q.f.})$$

De forma semelhante, podemos verificar:

$$\begin{aligned} G^\dagger \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} - \frac{e}{c} \nabla \lambda \right) G &= \exp\left(-\frac{ie}{\hbar c} \lambda(\mathbf{x})\right) \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} - \frac{e}{c} \nabla \lambda \right) \exp\left(\frac{ie}{\hbar c} \lambda(\mathbf{x})\right) \\ &= \exp\left(-\frac{ie}{\hbar c} \lambda(\mathbf{x})\right) \mathbf{p} \exp\left(\frac{ie}{\hbar c} \lambda(\mathbf{x})\right) \underbrace{-\frac{e}{c} \mathbf{A} - \frac{e}{c} \nabla \lambda}_{\substack{[\mathbf{A}, \lambda] = 0 \text{ e } [g(\lambda), \lambda] = 0}} \end{aligned}$$

$$[\mathbf{A}, \lambda] = 0 \text{ e } [g(\lambda), \lambda] = 0$$

falta $\exp\left(-\frac{ie}{\hbar c} \lambda(\mathbf{x})\right) \mathbf{p} \exp\left(\frac{ie}{\hbar c} \lambda(\mathbf{x})\right)$ que pode ser calculado com auxílio da expressão

$$[\mathbf{p}, G(\mathbf{x})] = -i\hbar \nabla G(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{p}G(\mathbf{x}) - G(\mathbf{x})\mathbf{p} = -i\hbar \exp\left(\frac{ie}{\hbar c} \lambda(\mathbf{x})\right) \frac{ie}{\hbar c} \nabla \lambda$$

$$\text{ou seja } \mathbf{p}G(\mathbf{x}) - G(\mathbf{x})\mathbf{p} = G \frac{e}{c} \nabla \lambda \rightarrow G^\dagger (\mathbf{p}G(\mathbf{x}) - G(\mathbf{x})\mathbf{p}) = G^\dagger G \frac{e}{c} \nabla \lambda$$

$$G^\dagger \mathbf{p}G = \mathbf{p} + \frac{e}{c} \nabla \lambda \rightarrow G^\dagger \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} - \frac{e}{c} \nabla \lambda \right) G = \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \quad (\text{c.q.f.})$$

de volta para a expressão acima

Transformação de Gauge

Olhemos a equação de Schrödinger para $|\alpha, t_0; t\rangle$ com o potencial vetor \mathbf{A} . Se

$[\frac{1}{2m}(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A})^2 + e\phi]|\alpha, t_0; t\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\alpha, t_0; t\rangle$ é satisfeita, a expectativa é que

$|\widetilde{\alpha}, t_0; t\rangle$ satisfaça a equação: $[\frac{1}{2m}(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A} - \frac{e}{c}\nabla\lambda)^2 + e\phi]|\widetilde{\alpha}, t_0; t\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\widetilde{\alpha}, t_0; t\rangle$.

Verifiquemos se a seguinte relação é verdadeira $|\widetilde{\alpha}, t_0; t\rangle = \exp(\frac{ie}{\hbar c}\lambda(\mathbf{x}))|\alpha, t_0; t\rangle$?

Para tanto, insira esta expressão na equação acima de Schrödinger para $|\widetilde{\alpha}, t_0; t\rangle$,

e multiplique a equação toda pela esquerda por $\exp(-\frac{ie}{\hbar c}\lambda(\mathbf{x}))$.

Note que $\exp(-\frac{ie}{\hbar c}\lambda(\mathbf{x}))[(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A} - \frac{e}{c}\nabla\lambda)^2]\exp(\frac{ie}{\hbar c}\lambda(\mathbf{x})) =$

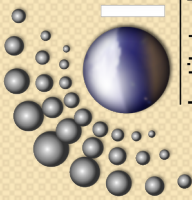
$\exp(-\frac{ie}{\hbar c}\lambda(\mathbf{x}))(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A} - \frac{e}{c}\nabla\lambda)\exp(\frac{ie}{\hbar c}\lambda(\mathbf{x})) \times$

$\times \exp(-\frac{ie}{\hbar c}\lambda(\mathbf{x}))(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A} - \frac{e}{c}\nabla\lambda)\exp(\frac{ie}{\hbar c}\lambda(\mathbf{x}))$ e aplique

$\exp(-\frac{ie}{\hbar c}\lambda(\mathbf{x}))(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A} - \frac{e}{c}\nabla\lambda)\exp(\frac{ie}{\hbar c}\lambda(\mathbf{x})) = \mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}$ duas vezes. A

equação que sobra é a equação de Schrödinger para $|\alpha, t_0; t\rangle$ com \mathbf{A} e isso

demonstra a relação entre $|\widetilde{\alpha}, t_0; t\rangle$ e $|\alpha, t_0; t\rangle$.



Transformação de Gauge

Na representação das coordenadas a relação entre $|\widetilde{\alpha}, t_0; t\rangle$ e $|\alpha, t_0; t\rangle$ fica $\widetilde{\psi}_\alpha(\mathbf{x}', t) = \exp\left(\frac{ie}{\hbar c}\lambda(\mathbf{x}')\right)\psi_\alpha(\mathbf{x}', t)$, onde $\lambda(\mathbf{x}')$ é uma função real do vetor posição \mathbf{x}' . Em termos de ρ e S , a função de onda pode ser escrita por

$$\widetilde{\psi}_\alpha(\mathbf{x}', t) = \exp\left(\frac{ie}{\hbar c}\lambda(\mathbf{x}')\right)\sqrt{\rho}\exp\left(\frac{iS}{\hbar}\right) = \sqrt{\rho}\exp\left(\frac{i}{\hbar}\left(S + \frac{e}{c}\lambda(\mathbf{x}')\right)\right)$$

Ou seja, basta
$$\begin{cases} \rho \rightarrow \rho \\ S \rightarrow S + \frac{e}{c}\lambda \end{cases}$$

Como fica o fluxo de probabilidade $\mathbf{j} = \frac{\rho}{m}(\nabla S - \frac{e}{c}\mathbf{A})$?

Mediante a transformação de Gauge $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla\lambda$, temos

$$\mathbf{j} = \frac{\rho}{m}(\nabla(S + \frac{e}{c}\lambda) - \frac{e}{c}(\mathbf{A} + \nabla\lambda)) = \frac{\rho}{m}(\nabla S - \frac{e}{c}\mathbf{A}) \text{ e}$$

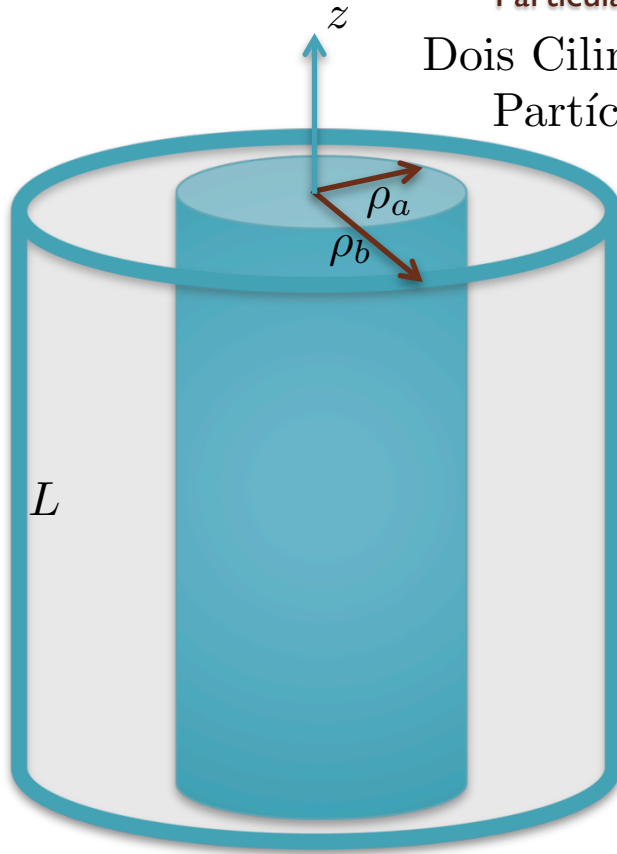
∴ o fluxo de probabilidade é invariante mediante transformação de Gauge.

Variável dinâmica fundamental: **A** ou **B**?

Partícula prisioneira em cabo coaxial

Dois Cilindros metálicos, um dentro do outro.

Partícula confinada entre ρ_a e ρ_b



O espectro de energia é encontrado resolvendo a equação $-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi = E\psi$ em coordenadas cilíndricas e condições de contorno abaixo.

Condições de contorno para $\psi(z, \rho, \varphi)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi(0, \rho, \varphi) = 0 \\ \psi(L, \rho, \varphi) = 0 \\ \psi(z, \rho_a, \varphi) = 0 \\ \psi(z, \rho_b, \varphi) = 0 \end{array} \right.$$

○ Espectro de Energia

A equação de Schrödinger $-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi = E\psi$ em coordenadas cilíndricas fica:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2}\psi \rightarrow \text{com } \psi(z, \rho, \varphi) = R(\rho)Q(\varphi)Z(z)$$

$$\text{temos } \begin{cases} \frac{d^2Z(z)}{dz^2} = -k_0^2Z \rightarrow Z(z) = \exp(\pm ik_0z) \\ \frac{d^2Q(\varphi)}{d\varphi^2} = -\nu^2Q \rightarrow Q(\varphi) = \exp(\pm i\nu\varphi) \end{cases} \begin{cases} z(0) = Z(L) = 0 \\ Z(z) = \sin k_0z; \\ k_0 = \frac{\ell\pi}{L}, \ell \text{ inteiro} \\ Q(0) = Q(2\pi) \\ \nu \text{ inteiro} \end{cases}$$

Para ρ temos: $\frac{\partial^2 R}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial R}{\partial\rho} - \frac{\nu^2}{\rho^2}R + \left(\frac{2mE}{\hbar^2} - k_0^2\right)R = 0$

se tomarmos $\begin{cases} x = k\rho \\ k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2} - k_0^2} \end{cases} \rightarrow \frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dR}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)R = 0$ com

soluções conhecidas $R = AJ_\nu(k\rho) + BN_\nu(k\rho)$. Aplique $R(k\rho_a) = R(k\rho_b) = 0$, e

$$\text{obtenha } \begin{cases} AJ_\nu(k\rho_a) + BN_\nu(k\rho_a) = 0 \\ AJ_\nu(k\rho_b) + BN_\nu(k\rho_b) = 0 \end{cases} \underbrace{J_\nu(k\rho_a)N_\nu(k\rho_b) - J_\nu(k\rho_b)N_\nu(k\rho_a)}_{m \equiv m\text{-ésima raiz}} = 0$$

Isso quantiza k e a energia $E_{\ell m \nu} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(k_{m\nu}^2 + \left(\frac{\ell\pi}{L}\right)^2\right)$

Campo magnético constante no interior do cabo

A partícula não vê o \mathbf{B} . Só vê o \mathbf{A} !

Suponha agora um campo magnético $B = B_0 \hat{\mathbf{z}}$ no interior do cilindro $\rho < \rho_a$.

Quanto vale o potencial vetor para $\rho < \rho_a$ e $\rho > \rho_a$?

Caso $\rho > \rho_a$

$$\int_{\text{superfície circular de raio } \rho > \rho_a} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = B_0 \pi \rho_a^2 = \int_{\text{superfície circular de raio } \rho > \rho_a} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a} = \oint_{\text{linha fechada sobre o anel de raio } \rho > \rho_a} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

mas, $d\mathbf{l} = \rho d\varphi \mathbf{e}_\phi$ e $\therefore \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \rho A_\phi d\varphi \rightarrow B_0 \pi \rho_a^2 = \rho A_\phi \oint_{\text{linha fechada sobre o anel}} d\varphi = 2\pi \rho A_\phi$

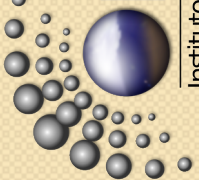
$$\therefore A_\phi = \frac{B_0 \rho_a^2}{2\rho} \rightarrow \text{Mostre que } \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = 0.$$

Caso $\rho < \rho_a$

$$\int_{\text{superfície circular de raio } \rho < \rho_a} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = B_0 \pi \rho^2 = \int_{\text{superfície circular de raio } \rho < \rho_a} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a} = \oint_{\text{linha fechada sobre o anel de raio } \rho < \rho_a} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

de novo, $d\mathbf{l} = \rho d\varphi \mathbf{e}_\phi$ e $\therefore \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \rho A_\phi d\varphi \rightarrow B_0 \pi \rho^2 = \rho A_\phi \oint_{\text{linha fechada sobre o anel}} d\varphi = 2\pi \rho A_\phi$

$$\therefore A_\phi = \frac{B_0 \rho}{2} \rightarrow \text{Mostre que } \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = B_0 \hat{\mathbf{z}}.$$



Novo Espectro de Energia

A partícula não vê o **B**. Só vê o **A**!

A solução do problema, com campo magnético constante no interior do cilindro

$$\rho < \rho_a, \text{ será obtida com } \begin{cases} A_\rho = A_z = 0 \text{ e } A_\phi = \frac{B_0 \rho}{2} \text{ p/ } \rho < \rho_a \rightarrow \mathbf{B} = B_0 \hat{\mathbf{z}} \\ A_\rho = A_z = 0 \text{ e } A_\phi = \frac{B_0 \rho_a^2}{2\rho} \text{ p/ } \rho > \rho_a \rightarrow \mathbf{B} = 0 \end{cases}$$

Note que, embora a partícula não sinta o campo **B** na região $\rho > \rho_a$, ela sente **A**, pois $\mathbf{A} \neq 0$ nesta região.

Para encontrar os autovalores para este novo problema, precisamos trocar

∇ por $\nabla - \frac{ie}{\hbar c} \mathbf{A}$. Lembrando que ∇ em coordenadas cilíndricas é:

$$\nabla = \hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z} - \hat{\phi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \text{ temos que trocar } \frac{\partial}{\partial \phi} \rightarrow \frac{\partial}{\partial \phi} - \frac{ie}{\hbar c} \frac{B_0 \rho_a^2}{2\rho}$$

Tal troca resulta em uma mudança no espectro de energia! (surpreendente, pois o campo é zero onde a partícula pode estar.) A equação de Schrödinger em coordenadas cilíndricas é:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2} \psi \text{ e usando a troca sugerida com}$$

$$a = \frac{e}{\hbar c} \frac{B_0 \rho_a^2}{2}, \text{ temos } \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{a^2}{\rho^2} \psi - \frac{2ai}{\rho^2} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} = -\frac{2mE}{\hbar^2} \psi$$

O potencial vetor A é a variável dinâmica fundamental

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{a^2}{\rho^2} \psi - \frac{2ai}{\rho^2} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = -\frac{2mE}{\hbar^2} \psi \text{ e } \psi = R(\rho)Q(\varphi)Z(z)$$

nos leva à:

$$\begin{cases} \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} = -k_0^2 Z \rightarrow Z(z) = \exp(\pm ik_0 z) \\ \frac{d^2 Q(\varphi)}{d\varphi^2} = -\nu^2 Q \rightarrow Q(\varphi) = \exp(\pm i\nu \varphi) \end{cases} \begin{cases} z(0) = Z(L) = 0 \\ Z(z) = \sin k_0 z; \\ k_0 = \frac{\ell\pi}{L}, \ell \text{ inteiro} \\ Q(0) = Q(2\pi) \\ \nu \text{ inteiro positivo} \end{cases}$$

Para ρ agora temos:

$$\frac{\partial^2 R}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial R}{\partial \rho} - \frac{\nu^2}{\rho^2} R - \frac{a^2}{\rho^2} R - \frac{2ai}{\rho^2} (\pm i\nu) R + \left(\frac{2mE}{\hbar^2} - k_0^2\right) R = 0$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial R}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2} (\nu \pm a)^2 R + \left(\frac{2mE}{\hbar^2} - k_0^2\right) R = 0 \text{ se } \begin{cases} x = k\rho \\ k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2} - k_0^2} \end{cases}$$

$$\rightarrow \frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dR}{dx} + \left(1 - \frac{(\nu \pm a)^2}{x^2}\right) R = 0 \text{ com } R = AJ_{\nu'}(k\rho) + BN_{\nu'}(k\rho).$$

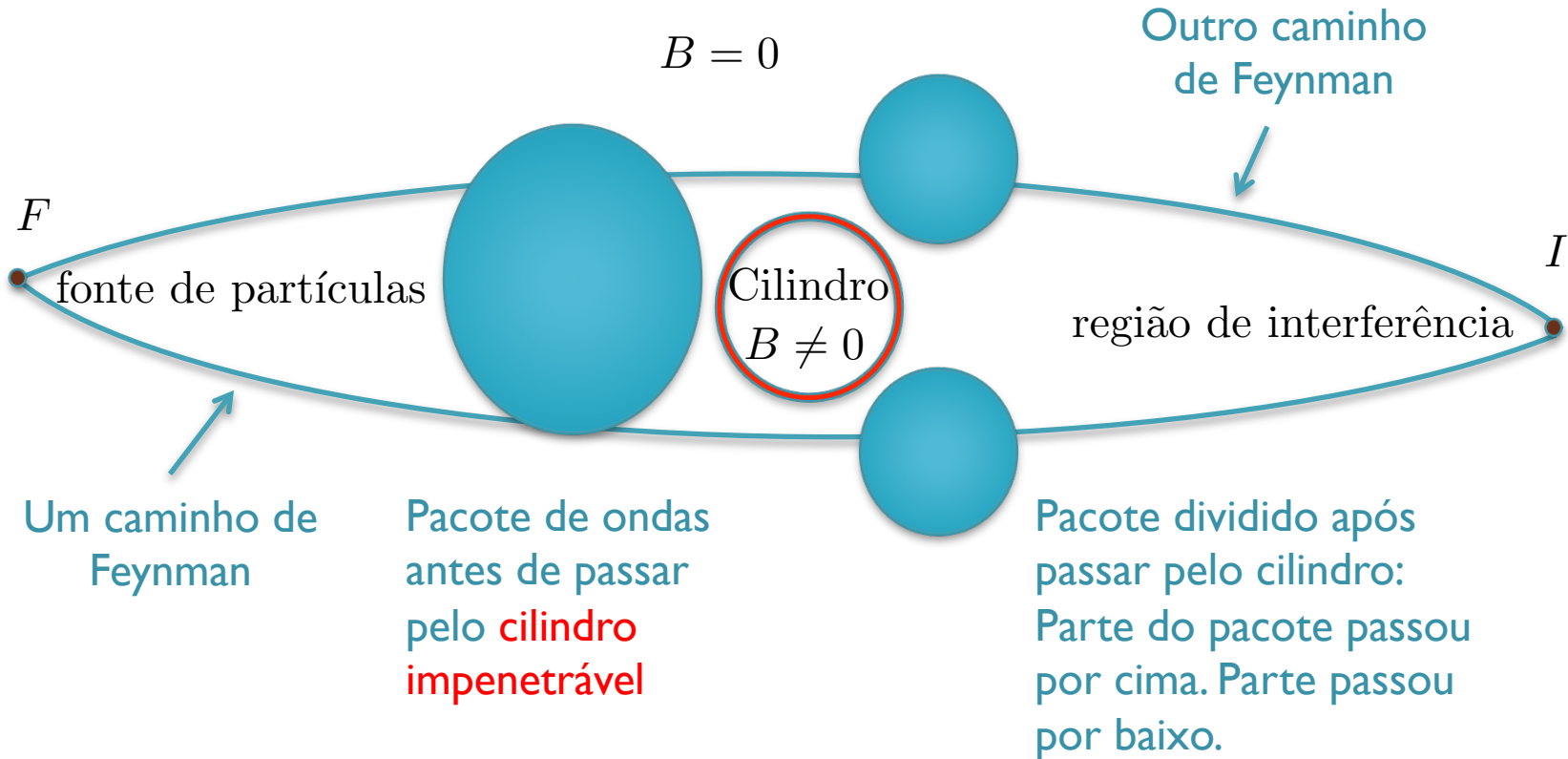
Note que $\nu' = |\nu \pm a|$ não é inteiro. Aplique $R(k\rho_a) = R(k\rho_b) = 0$,

$$\rightarrow \begin{cases} AJ_{\nu'}(k\rho_a) + BN_{\nu'}(k\rho_a) = 0 \\ AJ_{\nu'}(k\rho_b) + BN_{\nu'}(k\rho_b) = 0 \end{cases} \quad \underbrace{J_{\nu'}(k\rho_a)N_{\nu'}(k\rho_b) - J_{\nu'}(k\rho_b)N_{\nu'}(k\rho_a)} = 0$$

$$m \equiv m\text{-ésima raiz} \rightarrow E_{\ell m \nu'} = \frac{\hbar^2}{2m} \left(k_{m\nu'}^2 + \left(\frac{\ell\pi}{L}\right)^2 \right).$$

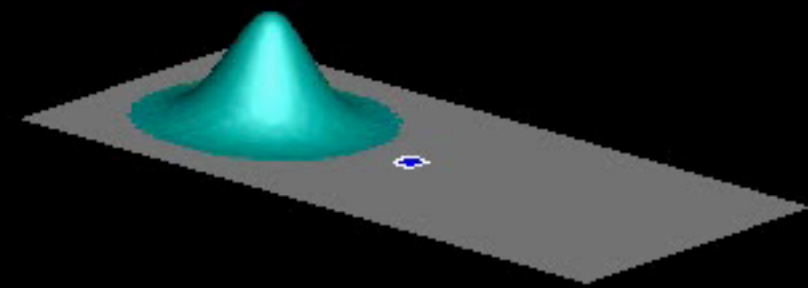
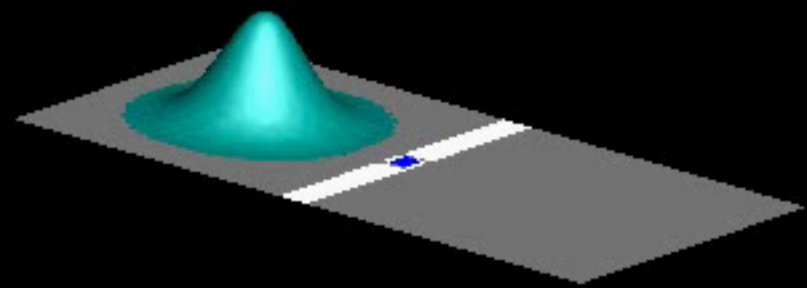
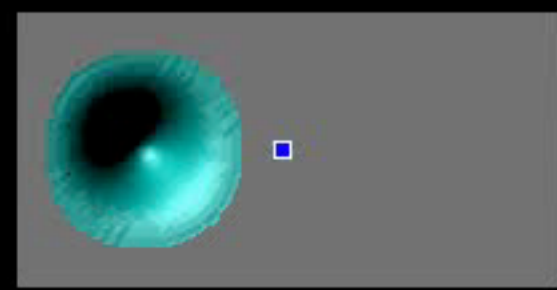
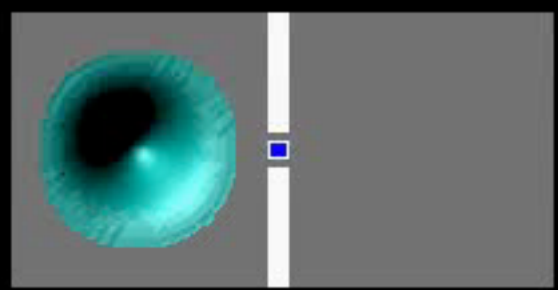
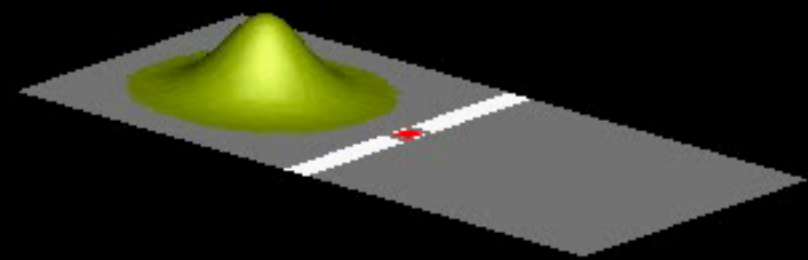
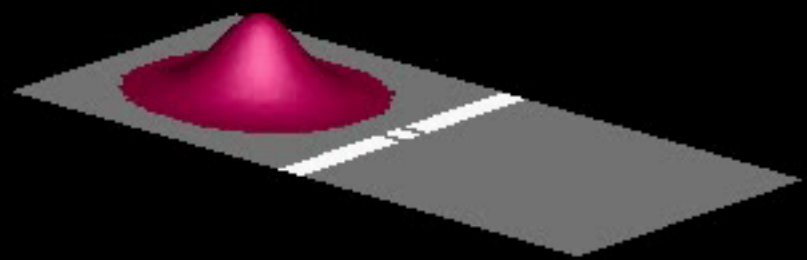
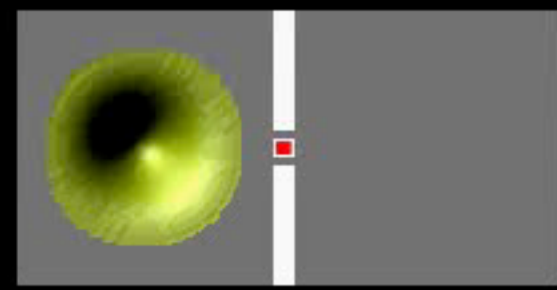
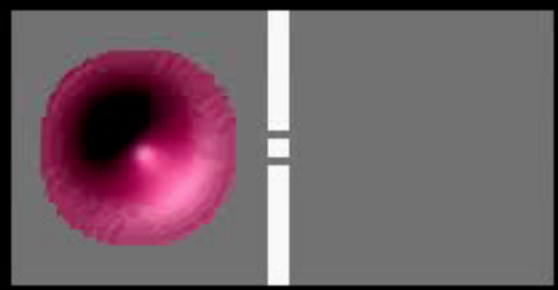
O efeito de Aharonov-Bohm

Experimento de correlação



Queremos estudar como a probabilidade de encontrar a partícula na região de interferência I depende do fluxo magnético. O estudo será feito com integrais de Feynman. A partícula não pode penetrar no cilindro, assim, de novo, ela percebe o potencial vetor, mas não vai onde $\mathbf{B} \neq 0$. $\mathbf{B} = 0$ fora do cilindro.

O efeito de Aharanov-Bohm



O efeito de Aharanov-Bohm

Passos cruciais

- 1) $L_{\text{clássico}} = \frac{m}{2} \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt} \right)^2 \xrightarrow{\text{liga } \mathbf{B}} L_{\text{clássico}} = \frac{m}{2} \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt} \right)^2 + \frac{e}{c} \frac{d\mathbf{x}}{dt} \cdot \mathbf{A}$
- 2) $S^{(0)}(n, n-1) \xrightarrow{\text{liga } \mathbf{B}} S^{(0)}(n, n-1) + \frac{e}{c} \int_{t_{n-1}}^{t_n} dt \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt} \cdot \mathbf{A} \right)$
- 3) $\frac{e}{c} \int_{t_{n-1}}^{t_n} dt \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt} \cdot \mathbf{A} \right) = \frac{e}{c} \int_{x_{n-1}}^{x_n} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$
- 4) $\prod \exp \left[\frac{iS^{(0)}(n, n-1)}{\hbar} \right] \xrightarrow{\text{liga } \mathbf{B}} \prod \exp \left[\frac{iS^{(0)}(n, n-1)}{\hbar} \right] \exp \left[\frac{ie}{\hbar c} \int_{x_{n-1}}^{x_n} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \right]$
- 5) $\int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ não depende do caminho, se $\Phi_B = 0$.
- 6) $\int_{\text{por cima}} \mathcal{D}(\mathbf{x}(t)) \exp \left[\frac{iS^{(0)}(N, 1)}{\hbar} \right] + \int_{\text{por baixo}} \mathcal{D}(\mathbf{x}(t)) \exp \left[\frac{iS^{(0)}(N, 1)}{\hbar} \right]$
 $\xrightarrow{\text{liga } \mathbf{B}} \int_{\text{por cima}} \mathcal{D}(\mathbf{x}(t)) \exp \left[\frac{iS^{(0)}(N, 1)}{\hbar} \right] \left\{ \exp \left[\frac{ie}{\hbar c} \int_{x_1}^{x_N} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \right]_{\text{cima}} \right\} +$
 $+ \int_{\text{por baixo}} \mathcal{D}(\mathbf{x}(t)) \exp \left[\frac{iS^{(0)}(N, 1)}{\hbar} \right] \exp \left[\frac{ie}{\hbar c} \int_{x_1}^{x_N} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \right]_{\text{baixo}} \left\{ \right.$
- 7) Quando quadramos, os termos de interferência são do tipo:
 $\left[\frac{e}{\hbar c} \int_{x_1}^{x_N} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \right]_{\text{cima}} - \left[\frac{e}{\hbar c} \int_{x_1}^{x_N} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \right]_{\text{baixo}} = \frac{e}{\hbar c} \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \frac{e}{\hbar c} \Phi_B$

Monopolo Magnético

$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho$ (\exists carga elétrica), mas $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ (\nexists carga ou monopolo magnético)

Suponha que ele exista. Veremos que a mecânica quântica prediz que ele é quantizado em termos de e , \hbar , e c .

Se existir $\rightarrow \mathbf{B} = \frac{e_m}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$. Como seria \mathbf{A} ? Nas coordenadas esféricas o $\nabla \times \mathbf{A}$ é dado por:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} = & \hat{\mathbf{r}} \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (A_\phi \sin \theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right] + \hat{\theta} \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \right] + \\ & + \hat{\phi} \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \end{aligned}$$

lousa

É possível mostrar que $\mathbf{A} = \left[\frac{e_m(1 - \cos \theta)}{r \sin \theta} \right] \hat{\phi}$ cumpre o papel, mas existe um problema. Este potencial vetor tem uma singularidade em $\theta = \pi$. Será que esta singularidade é removível? Para avaliar isso,

considere: $\left\{ \begin{array}{l} \int_{\text{superfície fechada}} \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = 4\pi \int d^3r \rho_m = 4\pi e_m \\ \int d^3r \nabla \cdot \mathbf{B} = \int \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \text{ salvo se } \mathbf{A} \text{ for singular.} \end{array} \right.$

Monopolo Magnético

Tomaremos
$$\begin{cases} \mathbf{A}^{(I)} = \left[\frac{e_m(1-\cos\theta)}{r \sin\theta} \right] \hat{\phi} \text{ para } \theta < \pi - \epsilon \\ \mathbf{A}^{(II)} = - \left[\frac{e_m(1+\cos\theta)}{r \sin\theta} \right] \hat{\phi} \text{ para } \theta > \epsilon \end{cases}$$

Note que
$$\mathbf{A}^{(II)} = \mathbf{A}^{(I)} - \underbrace{\frac{2e_m}{r \sin\theta}} \hat{\phi}$$

$\nabla\lambda$ e que $\lambda = -2e_m\phi$ fornece o gradiente desejado.

(verifique sabendo que $\nabla\lambda = \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial\lambda}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial\lambda}{\partial\theta} + \hat{\phi} \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial\lambda}{\partial\phi}$. Observe $\theta > \epsilon$)

Vimos que as funções de onda obtidas de $\mathbf{A}^{(I)}$ e $\mathbf{A}^{(II)}$ estão relacionadas:

$$\psi^{(II)}(\mathbf{x}', t) = \exp\left(\frac{ie\lambda(\mathbf{x}')}{\hbar c}\right) \psi^{(I)}(\mathbf{x}', t) \rightarrow \psi^{(II)}(\mathbf{x}', t) = \exp\left(\frac{-2iee_m}{\hbar c} \phi\right) \psi^{(I)}(\mathbf{x}', t)$$

Escolha $\theta = \frac{\pi}{2}$
$$\begin{cases} \psi^{(II)}(\theta = \frac{\pi}{2}, \phi = 0, r) = \psi^{(I)}(\theta = \frac{\pi}{2}, \phi = 0, r) \\ \psi^{(II)}(\theta = \frac{\pi}{2}, \phi = 2\pi, r) = \exp\left(\frac{-2iee_m}{\hbar c} 2\pi\right) \psi^{(I)}(\theta = \frac{\pi}{2}, \phi = 2\pi, r) \end{cases}$$

A função de onda não pode mudar de valor quando damos uma volta

$\therefore \frac{2ee_m}{\hbar c} 2\pi = N2\pi$ (N inteiro). Assim, se o monopolo magnético existisse, sua

“carga” seria $e_m = N \frac{\hbar c}{2e}$ (quantização em unidades de $\frac{\hbar c}{2|e|} \approx \frac{137}{2}|e|$).

Nas coordenadas esféricas o $\nabla \times \mathbf{A}$ é dado por:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \hat{\mathbf{r}} \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (A_\phi \sin \theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right] + \hat{\theta} \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \right] + \hat{\phi} \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right].$$

Substituindo nessa expressão $\mathbf{A} = A_\phi \hat{\phi} = \left[\frac{e_m (1 - \cos \theta)}{r \sin \theta} \right] \hat{\phi}$, e observando

que, $\frac{\partial}{\partial \phi} A_\theta = 0$; $\frac{\partial}{\partial \phi} A_r = 0$; $\frac{\partial}{\partial r} r A_\phi = 0$; $\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) = 0$; e $\frac{\partial A_r}{\partial \theta} = 0$ temos

$$\nabla \times \mathbf{A} = \hat{\mathbf{r}} \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{e_m (1 - \cos \theta)}{r \sin \theta} \sin \theta \right] \right] = \hat{\mathbf{r}} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{-e_m \cos \theta}{r} \right] = \hat{\mathbf{r}} \frac{e_m}{r^2}$$

Repita o procedimento para $A^{(II)}$ do slide 14.