

Spin 1/2: Formalismo de duas componentes de Pauli

Começemos por:

$$\begin{cases} |+\rangle \doteq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \chi_+ & \rightarrow & \langle +| \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \chi_+^\dagger \\ |-\rangle \doteq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \chi_- & \rightarrow & \langle -| \doteq \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} = \chi_-^\dagger \end{cases}$$

que nos leva à:

$$\begin{cases} |\alpha\rangle = |+\rangle\langle +|\alpha\rangle + |-\rangle\langle -|\alpha\rangle \doteq \begin{pmatrix} \langle +|\alpha\rangle \\ \langle -|\alpha\rangle \end{pmatrix} \\ \langle \alpha| = \langle \alpha|+\rangle\langle +| + \langle \alpha|-\rangle\langle -| \doteq \begin{pmatrix} \langle +|\alpha\rangle^* & \langle -|\alpha\rangle^* \end{pmatrix} \end{cases}$$

Assim, representamos kets e bras arbitrários por spinores, χ :

$$\begin{cases} \chi = \begin{pmatrix} \langle +|\alpha\rangle \\ \langle -|\alpha\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_+ \\ C_- \end{pmatrix} = C_+\chi_+ + C_-\chi_- \\ \chi^\dagger = \begin{pmatrix} \langle +|\alpha\rangle^* & \langle -|\alpha\rangle^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_+^* & C_-^* \end{pmatrix} = \\ = C_+^*\chi_+^\dagger + C_-^*\chi_-^\dagger \end{cases}$$

Spin 1/2: Matrizes de Pauli

$$\text{Definindo } \begin{cases} \langle \pm | S_k | \pm \rangle \equiv \frac{\hbar}{2} (\sigma_k)_{\pm, \pm} \\ \langle \pm | S_k | \mp \rangle \equiv \frac{\hbar}{2} (\sigma_k)_{\pm, \mp} \end{cases} \quad \text{chamamos: } \begin{cases} \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

de matrizes de Pauli. Em função delas, o valor médio de S_k , fica

$$\langle S_k \rangle = \langle \alpha | S_k | \alpha \rangle = \sum_{a'=+, -} \sum_{a''=+, -} \langle \alpha | a' \rangle \langle a' | S_k | a'' \rangle \langle a'' | \alpha \rangle = \frac{\hbar}{2} \chi^\dagger \sigma_k \chi$$

Algumas propriedades das matrizes de Pauli:

- $\begin{cases} \sigma_i^2 = 1 \\ \sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 0 \quad i \neq j \end{cases} \implies \{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}$
- $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k$
- coisas do tipo: $\begin{cases} \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_1 = 0 \\ \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_1 = 2i\sigma_3 \end{cases} \implies \sigma_1 \sigma_2 = i\sigma_3$
- e outras, tais como, $\sigma_i^\dagger = \sigma_i$; $\text{Tr}(\sigma_i) = 0$; $\det(\sigma_i) = -1$

Mais propriedades das Matrizes de Pauli

1) Suponha que $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ seja um vetor. Então vale:

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a} = \sum_k a_k \sigma_k = \begin{pmatrix} a_3 & a_1 - ia_2 \\ a_1 + ia_2 & -a_3 \end{pmatrix}$$

2) $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ leia $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbb{1}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$

Demonstração: $(\sum_j \sigma_j a_j)(\sum_k \sigma_k b_k) = \sum_{jk} \sigma_j \sigma_k a_j b_k.$

Use que $\sigma_j \sigma_k = \frac{1}{2}\{\sigma_j, \sigma_k\} + \frac{1}{2}[\sigma_j, \sigma_k] = \delta_{jk} + i\epsilon_{jkl}\sigma_l.$ Assim, temos

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{b}) &= \sum_{jk} (\delta_{jk} a_j b_k + i\epsilon_{jkl} a_j b_k \sigma_l) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + i \sum_{jk} \epsilon_{jkl} a_j b_k \sigma_l = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \\ &+ i(a_1 b_2 - a_2 b_1)\sigma_3 + i(a_2 b_3 - a_3 b_2)\sigma_1 + i(a_3 b_1 - a_1 b_3)\sigma_2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \end{aligned}$$

3) Se as componentes de \mathbf{a} são reais, desta última propriedade, temos:

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{a}) = |\mathbf{a}|^2$$

Spin $1/2$: Rotações

$$\mathcal{D}(\mathbf{n}, \varphi) = \exp\left(\frac{-i\varphi}{\hbar} \mathbf{S} \cdot \mathbf{n}\right) = \exp\left(\frac{-i\varphi}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}\right) = 1 - \frac{i\varphi}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} + \frac{1}{2!} \left(\frac{i\varphi}{2}\right)^2 (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{i\varphi}{2}\right)^3 (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})^3 + \dots$$

note que $\begin{cases} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})^2 = |\mathbf{n}|^2 = 1 \\ (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})^3 = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})^2 (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \end{cases} \therefore (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})^k = \begin{cases} 1 \text{ se } k \text{ par} \\ (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \text{ se } k \text{ ímpar} \end{cases}$

$$\text{Assim, } \mathcal{D}(\mathbf{n}, \varphi) = \left[1 - \frac{1}{2!} \left(\frac{\varphi}{2}\right)^2 + \frac{1}{4!} \left(\frac{\varphi}{2}\right)^4 + \dots\right] - i\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \left[\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\varphi}{2}\right)^3 + \dots\right]$$

Ou seja $\mathcal{D}(\mathbf{n}, \varphi) = \cos \frac{\varphi}{2} - i\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \sin \frac{\varphi}{2}$. Ou de forma explícita

$$\mathcal{D}(\mathbf{n}, \varphi) = \exp\left(\frac{-i\varphi}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}\right) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\varphi}{2} - in_z \sin \frac{\varphi}{2} & (-in_x - n_y) \sin \frac{\varphi}{2} \\ (-in_x + n_y) \sin \frac{\varphi}{2} & \cos \frac{\varphi}{2} + in_z \sin \frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}.$$

Esta matriz atua em χ da mesma forma que $\exp\left(\frac{-i\varphi}{\hbar} \mathbf{S} \cdot \mathbf{n}\right)$ atua em $|\alpha\rangle$.

Spin 1/2: Matrizes de Pauli

Mediante rotação: $\chi \rightarrow \exp\left(\frac{-i\varphi}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}\right)\chi$. Embora $\boldsymbol{\sigma}$ pareça vetor, de fato não muda como tal quando rodamos o sistema físico. Entretanto, $\chi^\dagger\sigma_k\chi$ deve obedecer a propriedade de transformação de um vetor, pois está diretamente relacionado à $\langle\alpha|S_k|\alpha\rangle = \frac{\hbar}{2}\chi^\dagger\sigma_k\chi$. Esperamos que $\chi^\dagger\sigma_k\chi \rightarrow \sum_\ell R_{k\ell}\chi^\dagger\sigma_\ell\chi$.

Testaremos
com φ
ao redor
de $\mathbf{n}=\mathbf{z}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi \rightarrow \exp\left(\frac{-i\varphi}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}\right)\chi = \exp\left(\frac{-i\varphi}{2}\sigma_3\right)\chi \\ \chi^\dagger \rightarrow \chi^\dagger \exp\left(\frac{+i\varphi}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}\right) = \chi^\dagger \exp\left(\frac{+i\varphi}{2}\sigma_3\right) \end{array} \right. \quad \text{e, por exemplo,}$$

rodando $\chi^\dagger\sigma_1\chi \rightarrow \chi^\dagger \exp\left(\frac{+i\varphi}{2}\sigma_3\right)\sigma_1 \exp\left(\frac{-i\varphi}{2}\sigma_3\right)\chi$. Para isso, use que

$$\mathcal{D}(\mathbf{n}, \varphi) = \cos\frac{\varphi}{2} - i\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}\sin\frac{\varphi}{2} \quad \text{ou melhor que } \mathcal{D}(\mathbf{z}, \varphi) = \cos\frac{\varphi}{2} - i\sigma_3\sin\frac{\varphi}{2} \quad \text{e}$$

$$\text{expresse } \chi^\dagger\sigma_1\chi \text{ rodado por } \chi^\dagger\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sigma_3\sin\frac{\varphi}{2}\right)\sigma_1\left(\cos\frac{\varphi}{2} - i\sigma_3\sin\frac{\varphi}{2}\right)\chi =$$

$$= \chi^\dagger\left(\cos^2\frac{\varphi}{2}\sigma_1 - i\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\underbrace{\sigma_1\sigma_3}_{-i\sigma_2} + i\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\underbrace{\sigma_3\sigma_1}_{i\sigma_2} + \underbrace{\sigma_3\sigma_1\sigma_3}_{-\sigma_1}\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)\chi$$

$$= \left(\cos^2\frac{\varphi}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}\right)\chi^\dagger\sigma_1\chi - 2\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\chi^\dagger\sigma_2\chi = \chi^\dagger\sigma_1\chi\cos\varphi - \chi^\dagger\sigma_2\chi\sin\varphi$$

c.q.d.

Spin $1/2$: Matrizes de Pauli

Como ficam as rotações de 2π ? Vimos que para spin $\frac{1}{2}$, o estado $|\alpha\rangle$ vai para $-|\alpha\rangle$. No caso das matrizes 2×2 , teremos:

$$\exp\left(\frac{-i\varphi}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}\right)\Big|_{\varphi=2\pi} = \left[\cos\frac{\varphi}{2} - i\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}\sin\frac{\varphi}{2}\right]\Big|_{\varphi=2\pi} = -\mathbb{1} \quad \forall \mathbf{n}.$$

Um exemplo interessante do uso de

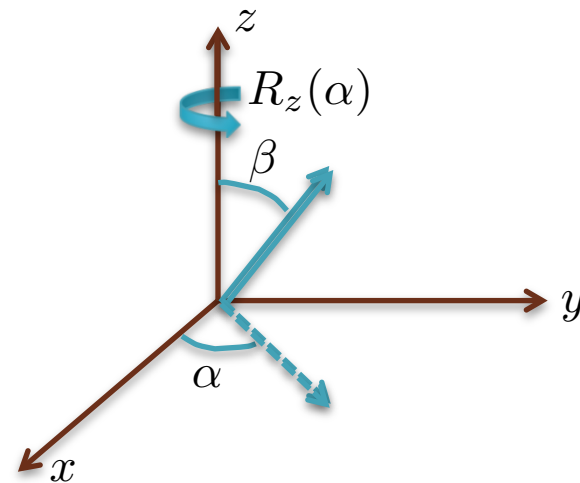
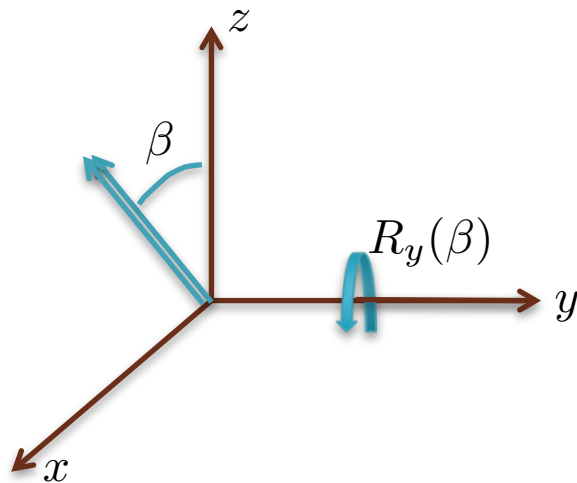
$$\mathcal{D}(\mathbf{n}, \varphi) = \exp\left(\frac{-i\varphi}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}\right) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\varphi}{2} - in_z\sin\frac{\varphi}{2} & (-in_x - n_y)\sin\frac{\varphi}{2} \\ (-in_x + n_y)\sin\frac{\varphi}{2} & \cos\frac{\varphi}{2} + in_z\sin\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix},$$

esta em achar χ , tal que $\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}\chi = \chi$. Equivale a buscar $|\mathbf{S}\cdot\mathbf{n}; +\rangle$ tal que $\mathbf{S}\cdot\mathbf{n}|\mathbf{S}\cdot\mathbf{n}; +\rangle = \frac{\hbar}{2}|\mathbf{S}\cdot\mathbf{n}; +\rangle$. Diagonalizando é simples: vocês fizeram ou podem fazer o problema 1.9 para obter:

$|\mathbf{S}\cdot\mathbf{n}; +\rangle = \cos\left(\frac{\beta}{2}\right)|+\rangle + \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)e^{i\alpha}|-\rangle$ que na linguagem de spinor fica:

$$\chi = \begin{pmatrix} \cos\frac{\beta}{2} \\ e^{i\alpha}\sin\frac{\beta}{2} \end{pmatrix}. \text{ Vamos obter isso, usando rotações.}$$

Spin 1/2: Matrizes de Pauli



Suponha (β, α) os ângulos que definem \mathbf{n} .

$$\begin{aligned}
 \text{O autoket de } \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \text{ seria } & \exp\left(\frac{-i\sigma_3\alpha}{2}\right) \exp\left(\frac{-i\sigma_2\beta}{2}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \\
 & = \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} - i \sin \frac{\alpha}{2} & 0 \\ 0 & \cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\beta}{2} & -\sin \frac{\beta}{2} \\ \sin \frac{\beta}{2} & +\cos \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \\
 & = \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} - i \sin \frac{\alpha}{2} & 0 \\ 0 & \cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\beta}{2} \\ \sin \frac{\beta}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{i\alpha}{2}} \cos \frac{\beta}{2} \\ e^{\frac{i\alpha}{2}} \sin \frac{\beta}{2} \end{pmatrix} = \\
 & = e^{-\frac{i\alpha}{2}} \begin{pmatrix} \cos \frac{\beta}{2} \\ e^{i\alpha} \sin \frac{\beta}{2} \end{pmatrix} \text{ que é igual ao anterior, a menos de uma fase global.}
 \end{aligned}$$

SO(3), SU(2), e Rotações de Euler

O que é necessário especificar para definir uma rotação geral? Que tal \mathbf{n} e φ (3 números, onde \mathbf{n} é definido por (β, α)). A melhor forma de representá-la é por meio de matrizes reais 3×3 (nove elementos). A condição de ortogonalidade, $R^T R = 1$ gera nove equações, mas só seis são linearmente independentes. Para

ver isso, observe que

$$\begin{cases} (RR^T)_{ik} = \sum_j R_{ij} R_{jk}^T = \sum_j \underbrace{R_{ij} R_{kj}}_{= 's} = \delta_{ik} \\ (RR^T)_{ki} = \sum_j R_{kj} R_{ji}^T = \sum_j \underbrace{R_{kj} R_{ij}} = \delta_{ki} \end{cases} \quad \text{ou seja a}$$

equação do elemento ik é igual a equação do elemento ki de RR^T . Assim,

temos seis equações independentes, com três parâmetros livres

$$\begin{cases} (1) \sum_j R_{1j}^2 = 1; & (2) \sum_j R_{2j}^2 = 1; & (3) \sum_j R_{3j}^2 = 1; \\ (4) \sum_j R_{1j} R_{2j} = 0 \text{ igual à } \sum_j R_{2j} R_{1j} = 0; \\ (5) \sum_j R_{1j} R_{3j} = 0 \text{ igual à } \sum_j R_{3j} R_{1j} = 0; \\ (6) \sum_j R_{2j} R_{3j} = 0 \text{ igual à } \sum_j R_{3j} R_{2j} = 0. \end{cases}$$

Estes três parâmetros que restaram dos nove, definem \mathbf{n} e φ .

Grupo $SO(3)$

O conjunto de todas as operações de multiplicação com matrizes ortogonais formam um grupo. Isto porque as seguintes condições estão sendo satisfeitas:

1) O produto de \forall 2 matrizes ortogonais é ortogonal, pois:

$$(R_1 R_2)(R_1 R_2)^T = R_1 \underbrace{R_2 R_2^T}_{1} R_1^T = R_1 R_1^T = 1$$

2) Vale a lei associativa

$$R_1(R_2 R_3) = (R_1 R_2)R_3 = R_1 R_2 R_3$$

3) \exists a matriz identidade (corresponde fisicamente à não rodar) e ela é ortogonal

$$1R = R1 = R; \text{ e } 1^T 1 = 1$$

4) \exists a matriz inversa (rodar ao contrário) e ela é ortogonal, $R^{-1} = R^T$

$$RR^{-1} = R^{-1}R = 1$$

Este grupo é chamado $SO(3)$ (ortogonal especial de 3 dimensões)

O Grupo unimodular unitário está ligado a representação matricial (2×2) que roda os spinores: $\chi \rightarrow \exp\left(-i\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \varphi}{2}\right)\chi$. Transformação esta que resulta em:

$$\chi^\dagger \chi \implies \chi^\dagger \exp\left(+i\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \varphi}{2}\right) \exp\left(-i\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \varphi}{2}\right)\chi = \chi^\dagger \chi \text{ ou seja, } |C_+|^2 + |C_-|^2 = 1 \text{ é}$$

invariante. Note também que

$$\exp\left(\frac{-i\varphi}{2}\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}\right) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\varphi}{2} - in_z \sin \frac{\varphi}{2} & (-in_x - n_y) \sin \frac{\varphi}{2} \\ (-in_x + n_y) \sin \frac{\varphi}{2} & \cos \frac{\varphi}{2} + in_z \sin \frac{\varphi}{2} \end{pmatrix} \text{ tem determinante}$$

igual à:

1

$$\cos^2 \frac{\varphi}{2} + n_z^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} + \overbrace{(n_x^2 + n_y^2)} \sin^2 \frac{\varphi}{2} = \cos^2 \frac{\varphi}{2} + (n_z^2 + n_x^2 + n_y^2) \sin^2 \frac{\varphi}{2} = 1$$

Daí o termo unimodular. A forma mais geral de escrever uma matriz unimodular

$$\text{é: } u(a, b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \text{ com } |a|^2 + |b|^2 = 1. \text{ Note que } u^\dagger(a, b)u(a, b) =$$

$$= \begin{pmatrix} a^* & -b \\ b^* & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |a|^2 + |b|^2 & a^*b - ba^* \\ b^*a - ab^* & |a|^2 + |b|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

Note que a transformação

$$u(a, b)\chi = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_+ \\ C_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aC_+ + bC_- \\ -b^*C_+ + a^*C_- \end{pmatrix}$$

conserva a norma do spinor, isto é:

$$\begin{pmatrix} a^*C_+^* + b^*C_-^* & -bC_+^* + aC_-^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} aC_+ + bC_- \\ -b^*C_+ + a^*C_- \end{pmatrix} = |a|^2|C_+|^2 + |b|^2|C_-|^2 + a^*bC_+^*C_- + b^*aC_-^*C_+ + |b|^2|C_+|^2 + |a|^2|C_-|^2 - a^*bC_+^*C_- - b^*aC_-^*C_+ = |C_+|^2 + |C_-|^2.$$

Além disso, note que $u(a, b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}$ tem 3 parâmetros independentes.

Poderia ser 4, pois a e b são complexos, e podem ser escritos como: $a = Ae^{i\varphi_A}$; $b = Be^{i\varphi_B}$ com $A, B, \varphi_A, \varphi_B$ reais. A condição $|a|^2 + |b|^2 = A^2 + B^2 = 1$, elimina a liberdade de escolha de um deles. Note ainda que cada $u(a, b)$ pode ser interpretada como uma rotação. Basta comparar $u(a, b)$ com a matriz que roda spinores e inverter as equações. Faremos isso em seguida.

Grupo SU(2)

Igual a forma geral da Matriz Unitária Unimodular, com a matriz que realiza rotações de spinores.

$$u(a, b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\varphi}{2} - in_z \sin \frac{\varphi}{2} & (-in_x - n_y) \sin \frac{\varphi}{2} \\ (-in_x + n_y) \sin \frac{\varphi}{2} & \cos \frac{\varphi}{2} + in_z \sin \frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}$$

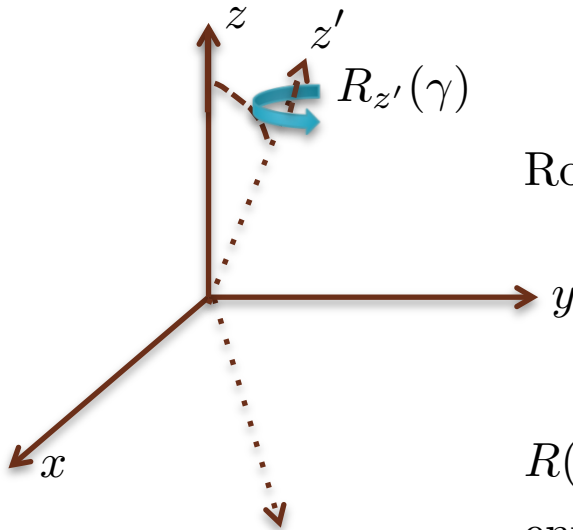
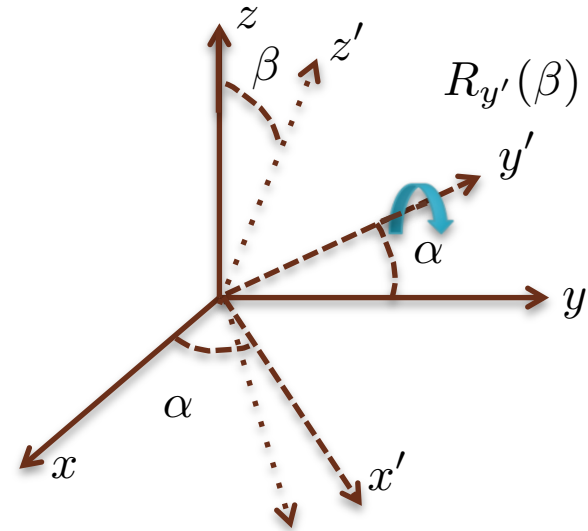
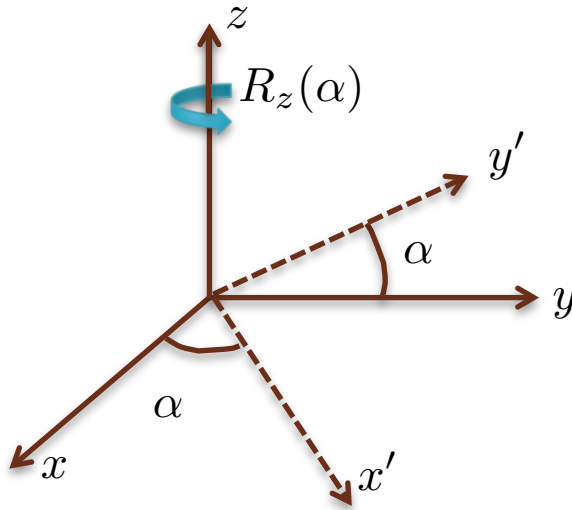
e conclua:

$$\begin{cases} \text{Re}(a) = \cos \frac{\varphi}{2} \\ \text{Im}(a) = -n_z \sin \frac{\varphi}{2} \\ \text{Re}(b) = -n_y \sin \frac{\varphi}{2} \\ \text{Im}(b) = -n_x \sin \frac{\varphi}{2} \end{cases} \quad \{a, b\} \equiv \text{parâmetros de Cayley-Klein}$$

Mostre que o conjunto de matrizes $\begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}$ com $|a|^2 + |b|^2 = 1$

formam um grupo. **Este é o grupo SU(2).**

Rotações de Euler



Rotações de Euler

- $R_z(\alpha)$ roda de α ao redor de z
- $R_{y'}(\beta)$ roda de β ao redor de y'
- $R_{z'}(\gamma)$ roda de γ ao redor de z'

$R(\alpha, \beta, \gamma) \equiv R_{z'}(\gamma)R_{y'}(\beta)R_z(\alpha)$. Inconveniente, pois envolvem rotações ao redor do corpo rodado

rotações de Euler

Seria melhor se rodássemos sobre eixos fixos no laboratório.

Que tal usarmos que

$$\begin{cases} R_{y'}(\beta) = R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z^{-1}(\alpha) \\ R_{z'}(\gamma) = R_{y'}(\beta)R_z(\gamma)R_{y'}^{-1}(\beta) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \therefore R_{z'}(\gamma) &= \underbrace{R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z^{-1}(\alpha)}_{R_{y'}(\beta)} R_z(\gamma) \underbrace{(R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z^{-1}(\alpha))^{-1}}_{R_{y'}^{-1}(\beta)} = \\ &= R_z(\alpha)R_y(\beta) \underbrace{R_z^{-1}(\alpha)R_z(\gamma)R_z(\alpha)}_{\text{comutam}} R_y^{-1}(\beta)R_z^{-1}(\alpha) \\ &= R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z(\gamma)R_y^{-1}(\beta)R_z^{-1}(\alpha) \end{aligned}$$

As rotações de Euler ficam: $R(\alpha, \beta, \gamma) \equiv R_{z'}(\gamma)R_{y'}(\beta)R_z(\alpha) =$

$$\begin{aligned} &= \underbrace{R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z(\gamma)R_y^{-1}(\beta)R_z^{-1}(\alpha)}_{R_{z'}(\gamma)} \underbrace{R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z^{-1}(\alpha)}_{R_{y'}(\beta)} R_z(\alpha) = \\ &= R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z(\gamma) \text{ todas com respeito a eixos fixos} \end{aligned}$$

Rotações de Euler

Usando os ângulos de Euler, definimos uma maneira de rodar um sistema físico clássico de forma arbitrária. Como fica este assunto na mecânica quântica? Lembre que basta trocar R por D_R . Isto é:

$$R(\alpha, \beta, \gamma) \equiv R_{z'}(\gamma)R_{y'}(\beta)R_z(\alpha) = R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z(\gamma)$$

por

$$D(\alpha, \beta, \gamma) = D_z(\alpha)D_y(\beta)D_z(\gamma)$$

$$\text{Caso spin } \frac{1}{2} : D(\alpha, \beta, \gamma) = \exp\left(-\frac{i\sigma_3\alpha}{2}\right) \exp\left(-\frac{i\sigma_2\beta}{2}\right) \exp\left(-\frac{i\sigma_3\gamma}{2}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\alpha}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\alpha}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\beta}{2} & -\sin \frac{\beta}{2} \\ \sin \frac{\beta}{2} & +\cos \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\gamma}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\gamma}{2}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-i\frac{(\alpha+\gamma)}{2}} \cos \frac{\beta}{2} & -e^{-i\frac{(\alpha-\gamma)}{2}} \sin \frac{\beta}{2} \\ e^{i\frac{(\alpha-\gamma)}{2}} \sin \frac{\beta}{2} & +e^{i\frac{(\alpha+\gamma)}{2}} \cos \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$$

Note que é uma matriz unitária unimodular

Rotações de Euler

A escolha dos eixos, z, y' e z' , permitiu que a matriz que tem elementos fora da diagonal, no caso a $D_y(\beta)$, ficasse real. Podemos escrever a representação de $D(\alpha, \beta, \gamma)$ em $j = \frac{1}{2}$ da seguinte forma:

$$D_{m'm}^{(1/2)}(\alpha, \beta, \gamma) = \langle j = \frac{1}{2}, m' | \exp\left(-\frac{J_z \alpha}{\hbar}\right) \exp\left(-\frac{J_y \beta}{\hbar}\right) \exp\left(-\frac{J_z \gamma}{\hbar}\right) | j = \frac{1}{2}, m \rangle$$

Calcularemos esta matriz para alguns casos de $j \neq 1/2$ nas próximas aulas.