

Operadores Densidade e Ensembles Misturados e Puros

Até aqui quando realizávamos uma experiência, todas as partículas estavam no estado $|\alpha\rangle$. Que tal agora a seguinte situação: 40% das partículas em um estado e 60% em outro?

Para explorar este assunto, considere os átomos de prata provenientes de um forno. Se não fizéssemos uma medida do tipo SG, cada átomo estaria em um estado e de forma geral cada estado é do tipo: $|\alpha\rangle = C_+|+\rangle + C_-|-\rangle$. Será $|\alpha\rangle$ a representação correta da situação?

Não! Este estado representa apenas um dos possíveis, e de fato representa o spin polarizado em uma direção \mathbf{n} . Para ver isso, considere o autoestado de $\sigma \cdot \mathbf{n}$ dado

por: $e^{-\frac{i\alpha}{2}} \begin{pmatrix} \cos \frac{\beta}{2} \\ e^{i\alpha} \sin \frac{\beta}{2} \end{pmatrix}$. Isso define C_+ e C_- por
$$\begin{cases} C_+ = e^{-\frac{i\alpha}{2}} \cos \frac{\beta}{2} \\ C_- = e^{\frac{i\alpha}{2}} \sin \frac{\beta}{2} \end{cases}$$

Ou seja, o ket genérico representa um átomo com uma certa orientação (em um experimento SG naquela direção, todos que estivessem neste estado passariam sem alteração do estado). A situação também não pode ser representada por uma simples combinação de estados. Isto daria um outro estado que apenas corresponderia à uma nova direção \mathbf{n}' .

Ensembles Misturados e Puros

Para tentar descrever um coletivo de átomos com spins orientados de forma aleatória, introduzimos o conceito de população fracional ou peso de probabilidade ω_i

Um “ensemble”
de átomos de
prata com
orientações de
spin aleatórias.
Alguns exemplos:

- 1) $\omega_+ = 0,5$ $\omega_- = 0,5$
com 50% em $|+\rangle$ e 50% em $|-\rangle$
- 2) $\omega_1 = 0,3$ $\omega_2 = 0,7$
com 30% em $|S_x, +\rangle$ e 70% em $|S_y, -\rangle$
- 3) $\omega_1 = 0,25$ $\omega_2 = 0,65$ $\omega_3 = 0,1$
com 25% em $|S_y, -\rangle$ e 65% em $|S_z, -\rangle$ e 10% em $|S_x, +\rangle$
- 4) $\omega_1 = 0,4$ $\omega_2 = 0,6$
com 40% em $|\mathbf{S}\cdot\mathbf{n}_1, +\rangle$ e 60% em $|\mathbf{S}\cdot\mathbf{n}_2, -\rangle$
onde \mathbf{n}_1 e \mathbf{n}_2 são direções quaisquer.

O importante é não confundir, por exemplo, o caso 1 com $|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle$

Ensembles Misturados e Puros

Não confunda w_+ e w_- com $|C_+|^2$ e $|C_-|^2$. Ensemble completamente aleatório é dito despolarizado. Ensemble puro é dito polarizado.

No {

- 1) Despolarizado, se colocarmos um experimento de SG, em qualquer orientação, obteremos sempre 1/2 a 1/2 entre as populações + e - daquela orientação;
- 2) No polarizado as intensidades são $\cos^2(\beta/2)$ e $\sin^2(\beta/2)$.

Ensemble misturado: {

- 70% caracterizados por $|\alpha\rangle$
- 30% caracterizados por $|\beta\rangle$

Isto não significa que o estado é: $\sqrt{0,7}|\alpha\rangle + \sqrt{0,3}|\beta\rangle$.

E sim, que {

- 70% das partículas estão no estado $|\alpha\rangle$
- 30% das partículas estão no estado $|\beta\rangle$

Como já vimos $|\alpha\rangle$ e $|\beta\rangle$ não precisam ser ortogonais. Poderíamos

ter {

- 70% das partículas estão no estado $|S_x, +\rangle$
- 30% das partículas estão no estado $|S_z, -\rangle$

Médias do Ensemble e Operador Densidade

$$\text{Ensemble misturado} \begin{cases} \omega_1 \rightarrow |\alpha^{(1)}\rangle \\ \omega_2 \rightarrow |\alpha^{(2)}\rangle \\ \vdots \rightarrow \vdots \\ \omega_i \rightarrow |\alpha^{(i)}\rangle \end{cases} \quad c/ \sum_i \omega_i = 1 \quad \begin{array}{l} \text{soma} \neq \text{dimensão do espaço} \\ \text{ver exemplo 3 do slide 2} \\ \text{soma corre até 3 e } N=2 \end{array}$$

Quanto valeria o valor médio de uma observável A em um dado ensemble?

Que tal
$$[A] = \sum_i \omega_i \langle \alpha^{(i)} | A | \alpha^{(i)} \rangle$$

onde $\begin{cases} \text{a soma em } i \text{ corre sobre as possibilidades existentes.} \\ \omega_i \rightarrow \text{população fracional de partículas que estão em } |\alpha^{(i)}\rangle. \\ \langle \alpha^{(i)} | A | \alpha^{(i)} \rangle \rightarrow \text{valor médio para medida de } A \text{ para partículas em } |\alpha^{(i)}\rangle. \end{cases}$

Note que

$$[A] = \sum_i \omega_i \langle \alpha^{(i)} | A | \alpha^{(i)} \rangle = \sum_i \omega_i \langle \alpha^{(i)} | A \mathbb{1} | \alpha^{(i)} \rangle = \sum_i \omega_i \langle \alpha^{(i)} | A \left(\sum_{a'} |a'\rangle \langle a'| \right) | \alpha^{(i)} \rangle$$

Ou seja

$$[A] = \sum_i \sum_{a'} \omega_i \langle \alpha^{(i)} | a' \rangle \langle a' | \alpha^{(i)} \rangle a' = \sum_i \sum_{a'} \omega_i \underbrace{|\langle a' | \alpha^{(i)} \rangle|^2}_{\text{probabilidade de encontrar } a' \text{ se o estado é } |\alpha^{(i)}\rangle} a'$$

probabilidade de encontrar a' se o estado é $|\alpha^{(i)}\rangle$

Médias do Ensemble e Operador Densidade

Note também que, se usássemos o $\mathbb{1}$ feito de autokets de B , teríamos:

$$[A] = \sum_i \omega_i \langle \alpha^{(i)} | \mathbb{1} A \mathbb{1} | \alpha^{(i)} \rangle = \sum_i \omega_i \langle \alpha^{(i)} | \left(\sum_{b'} |b'\rangle \langle b'| \right) A \left(\sum_{b''} |b''\rangle \langle b''| \right) | \alpha^{(i)} \rangle$$

$$\text{que pode ser reescrito por: } [A] = \sum_{b'} \sum_{b''} \left(\sum_i \omega_i \langle b'' | \alpha^{(i)} \rangle \langle \alpha^{(i)} | b' \rangle \right) \langle b' | A | b'' \rangle$$

o que permite definir $\rho \equiv \sum_i \omega_i | \alpha^{(i)} \rangle \langle \alpha^{(i)} |$ o operador densidade.

Na representação $\{|b'\rangle\}$ teremos $[A] = \sum_{b'} \sum_{b''} \langle b'' | \rho | b' \rangle \langle b' | A | b'' \rangle$ ou seja

$$[A] = \sum_{b''} \langle b'' | \rho A | b'' \rangle = \text{Tr}\{\rho A\}$$

Lembre que o traço não depende da representação. Isso será útil.

$$\text{Algumas propriedades} \left\{ \begin{array}{l} \rho^\dagger = \rho \text{ (o operador densidade é Hermiteano)} \\ \text{Tr}\{\rho\} = \sum_{b'} \langle b' | \left(\sum_i \omega_i | \alpha^{(i)} \rangle \langle \alpha^{(i)} | \right) | b' \rangle = \\ = \sum_i \omega_i \langle \alpha^{(i)} | \left(\sum_{b'} |b'\rangle \langle b'| \right) | \alpha^{(i)} \rangle = \\ = \sum_i \omega_i \langle \alpha^{(i)} | \alpha^{(i)} \rangle = \sum_i \omega_i = 1 \end{array} \right.$$

Médias do Ensemble e Operador Densidade

Note que $\rho =$

$$\begin{pmatrix} \underbrace{\sum_i \omega_i \langle b_1 | \alpha^{(i)} \rangle \langle \alpha^{(i)} | b_1 \rangle}_{\# \text{ real}} & \underbrace{\sum_i \omega_i \langle b_1 | \alpha^{(i)} \rangle \langle \alpha^{(i)} | b_2 \rangle}_{c = \# \text{ complexo}} \\ \underbrace{\sum_i \omega_i \langle b_2 | \alpha^{(i)} \rangle \langle \alpha^{(i)} | b_1 \rangle}_{c^* = \# \text{ complexo}} & \underbrace{\sum_i \omega_i \langle b_2 | \alpha^{(i)} \rangle \langle \alpha^{(i)} | b_2 \rangle}_{\# \text{ real}} \end{pmatrix}$$

\therefore Para um sistema de 2 níveis, precisamos de 4 variáveis reais para definir ρ . A condição de normalização implica que apenas três sejam variáveis independentes. Para o caso em questão, conhecer $[S_x], [S_y]$ e $[S_z]$ é suficiente para construir o operador densidade. Para ver isso, considere:

$$S_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad S_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad S_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \rho = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix} c/$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Tr}\{\rho\} = \rho_{11} + \rho_{22} = 1 \\ \text{Tr}\{\rho S_x\} = [S_x] = \frac{\hbar}{2} \text{Tr} \begin{pmatrix} \rho_{12} & \rho_{11} \\ \rho_{22} & \rho_{21} \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} (\rho_{12} + \rho_{21}) = \frac{\hbar}{2} (\rho_{12} + \rho_{12}^*) = \hbar \text{Re}(\rho_{12}) \\ \text{e: } [S_y] = -\hbar \text{Im}(\rho_{12}) \text{ e } [S_z] = \frac{\hbar}{2} (\rho_{11} - \rho_{22}). \end{array} \right.$$

lousa

Médias do Ensemble e Operador Densidade

Resolvendo as equações do slide anterior para os elementos de ρ ,

$$\text{temos } \begin{cases} \rho_{11} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{\hbar} [S_z] \right) & \rho_{22} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2}{\hbar} [S_z] \right) \\ \text{Re}(\rho_{12}) = \frac{1}{\hbar} [S_x] & \text{Im}(\rho_{12}) = -\frac{1}{\hbar} [S_y] \end{cases}$$

Três números caracterizam o ensemble: Isso sugere que \exists muitas formas de se combinar ensembles puros para obter o ensemble em questão.

Um ensemble puro é caracterizado por $\omega_i = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq n \\ 1 & \text{se } i = n \end{cases} |\alpha^{(i)}\rangle$

Neste caso $\rho = |\alpha^{(n)}\rangle\langle\alpha^{(n)}|$ (sem a soma). Note que $\begin{cases} \rho^2 = \rho \\ \rho^2 - \rho = \rho(\rho - 1) = 0 \\ \text{Tr}(\rho^2) = \text{Tr}(\rho) = 1 \end{cases}$

Considere uma base de kets $\{|k\rangle\}$ tal que $\rho|k\rangle = k|k\rangle$. Da equação

$\rho(\rho - 1) = 0$ temos $\rho \sum_k |k\rangle\langle k|(\rho - 1) = 0 \rightarrow \sum_k k|k\rangle\langle k|(k - 1) = 0$ e como

$$|k\rangle\langle k| \neq 0 \quad \therefore \sum_k k(k - 1)|k\rangle\langle k| = 0 \rightarrow k(k - 1) = 0 \quad \begin{cases} k = 0 \\ \text{ou} \\ k = 1 \end{cases}$$

Como $\text{Tr}(\rho) = 1 \Rightarrow$ só um deles é 1. O resto é 0.

Médias do Ensemble e Operador Densidade

Assim, para um ensemble puro, sua representação matricial na base de autokets é dada por:

Zeros e um 1 na diagonal

$$\rho = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

- duas propriedades
- 1) $\text{Tr}(\rho^2)$ é máximo quando o ensemble é puro
 - 2) p/ ensembles misturados $\text{Tr}(\rho^2)$ é positivo e menor que 1

Dado um operador densidade, como construir a matriz densidade correspondente em uma base específica?

$$|\alpha^{(i)}\rangle\langle\alpha^{(i)}| = \sum_{b'b''} |b'\rangle \underbrace{\langle b'|\alpha^{(i)}\rangle}_{\text{matriz coluna}} \underbrace{\langle\alpha^{(i)}|b''\rangle}_{\text{matriz linha}} \langle b''|$$

$$\langle b'|\rho|b''\rangle = \sum_i \omega_i \langle b'|\alpha^{(i)}\rangle \langle\alpha^{(i)}|b''\rangle$$

Exemplo 1) Feixe completamente polarizado com $S_z +$

$$\rho = |+\rangle\langle+| \doteq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo 2) Feixe completamente polarizado com $S_x \pm$

$$\begin{aligned} \rho &= |S_x; \pm\rangle\langle S_x; \pm| = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle \pm |-\rangle) \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle+| \pm \langle-|) \doteq \\ &\doteq \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \pm \frac{1}{2} \\ \pm \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

O que vc espera da diagonalização deste operador?

Médias do Ensemble e Operador Densidade

Exemplo 3) 50% spin para baixo e 50% spin para cima

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{1}{2}|S_z; +\rangle\langle S_z; +| + \frac{1}{2}|S_z; -\rangle\langle S_z; -| \doteq \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} + \\ &+ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \therefore \rho &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Note que se tivéssemos feito 50% spin para cima em x e 50% spin para baixo em x , teríamos a mesma coisa, pois

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{1}{2}|S_x; +\rangle\langle S_x; +| + \frac{1}{2}|S_x; -\rangle\langle S_x; -| = \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Ver slide 9

$$\text{Note que } \rho S_x = \frac{1}{2} S_x; \quad \rho S_y = \frac{1}{2} S_y; \quad \rho S_z = \frac{1}{2} S_z \text{ e}$$

$\therefore \text{Tr}(\rho S_x) = \text{Tr}(\rho S_y) = \text{Tr}(\rho S_z) = 0 \rightarrow [\mathbf{S}] = 0$ valor médio de \mathbf{S} é zero.

Esperado, pois hipótese é de feixe de spins aleatórios.

Exemplo 4) feixe parcialmente polarizado: 75% de $S_z +$ e 25% de $S_x +$

$$\omega(S_z+) = 0,75 \text{ e } \omega(S_x+) = 0,25 \text{ e } \therefore \rho = \frac{3}{4}|S_z; +\rangle\langle S_z; +| + \frac{1}{4}|S_x; +\rangle\langle S_x; +| \doteq$$

$$\doteq \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\therefore \rho = \begin{pmatrix} \frac{7}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

$$\text{Assim } [S_x] = \text{Tr}(\rho S_x) = \frac{\hbar}{2} \text{Tr} \begin{pmatrix} \frac{7}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \text{Tr} \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{7}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{8}$$

De forma similar, pode-se obter $\begin{cases} [S_y] = 0 \\ [S_z] = \frac{3\hbar}{8} \end{cases}$

Evolução temporal dos Ensembles

Suponha conhecido $\rho(t_0) = \sum_i \omega_i |\alpha^{(i)}\rangle \langle \alpha^{(i)}|$. Se o ensemble for deixado sem perturbação, a população fracional, ω_i não mudará. Esperamos que a evolução temporal de ρ seja governada pela evolução dos diversos $|\alpha^{(i)}\rangle$. Sabemos que $|\alpha^{(i)}, t_0\rangle$ é levado para $|\alpha^{(i)}, t_0; t\rangle$ resolvendo a equação:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\alpha^{(i)}, t_0; t\rangle = H |\alpha^{(i)}, t_0; t\rangle$$

Assim, escreva:
$$i\hbar \frac{\partial \rho}{\partial t} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_i \omega_i |\alpha^{(i)}\rangle \langle \alpha^{(i)}| \right) = i\hbar \sum_i \omega_i \frac{\partial}{\partial t} (|\alpha^{(i)}\rangle \langle \alpha^{(i)}|) =$$

$$= i\hbar \sum_i \omega_i \left(\frac{\partial}{\partial t} |\alpha^{(i)}\rangle \right) (\langle \alpha^{(i)}|) + i\hbar \sum_i \omega_i (|\alpha^{(i)}\rangle) \left(\frac{\partial}{\partial t} \langle \alpha^{(i)}| \right) =$$

$$= H \sum_i \omega_i |\alpha^{(i)}\rangle \langle \alpha^{(i)}| - \sum_i \omega_i |\alpha^{(i)}\rangle \langle \alpha^{(i)}| H = H\rho - \rho H = -[\rho, H].$$
 Ou seja,

a equação que governa o futuro de ρ tem o sinal trocado em relação à equação que governa o futuro das observáveis de Heisenberg, e é dada por:

$$i\hbar \frac{\partial \rho}{\partial t} = -[\rho, H] \quad (\exists \text{ um análogo clássico: equação de Liouville})$$

Não se perturbem com o sinal, ρ não é uma observável dinâmica no enfoque de Heisenberg. E, de fato, ρ foi construído com os kets de Schrödinger.

Generalização para o contínuo

Como ficaria o valor médio de uma observável A na representação das coordenadas?

$$[A] = \text{Tr}(\rho A) = \int d^3 x'' \langle x'' | \rho A | x'' \rangle = \int d^3 x'' \int d^3 x' \langle x'' | \rho | x' \rangle \langle x' | A | x'' \rangle$$

onde $\langle x'' | \rho | x' \rangle = \sum_i \omega_i \langle x'' | \alpha^{(i)} \rangle \langle \alpha^{(i)} | x' \rangle = \sum_i \omega_i \psi_i(x'') \psi_i^*(x')$. Note que

$\langle x' | \rho | x' \rangle = \sum_i \omega_i |\psi_i(x')|^2$ e que um mesmo ensemble pode ser escrito,

como: $\left\{ \begin{array}{l} \sum \text{ondas Planas} \\ \sum \text{pacotes gaussianos} \\ \text{etc.} \end{array} \right.$

Conexão entre o formalismo de operador densidade e a Mecânica Estatística

Para um ensemble completamente aleatório (ECA), temos:

$$\rho = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Uma matriz $N \times N$ igual à $\frac{1}{N}$, onde 1 é a matriz unidade $N \times N$. Note que isso vem da definição de ECA, pois pressupomos que neste caso,

podemos p/ \forall representação ter: $\rho = \frac{1}{N} |a_1\rangle\langle a_1| + \dots + \frac{1}{N} |a_N\rangle\langle a_N| = \frac{1}{N}$

Médias do Ensemble e Operador Densidade

Para um ensemble polarizado, temos:

$$\rho = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Uma matriz $N \times N$ com apenas um elemento diferente de zero e igual à um na diagonal. Note que isso vem da proposta que:

$$\rho = |a_n\rangle\langle a_n| \rightarrow \text{na base que diagonaliza } \rho.$$

Exploraremos uma quantidade que diferencia estas duas situações:

$$\sigma = -\text{Tr}(\rho \ln \rho). \text{ Esquisito? Faça na base que diagonaliza } \rho.$$

Assunto da próxima aula

Slide 6

$$\rho S_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \rho_{12} & \rho_{11} \\ \rho_{22} & \rho_{21} \end{pmatrix}$$

$$\rho S_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} i\rho_{12} & -i\rho_{11} \\ i\rho_{22} & -i\rho_{21} \end{pmatrix}$$

$$\rho S_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \rho_{11} & -\rho_{12} \\ \rho_{21} & -\rho_{22} \end{pmatrix}$$

$$\text{Tr}\{\rho\} = \rho_{11} + \rho_{22} = 1$$

$$\text{Tr}\{\rho S_x\} = [S_x] = \frac{\hbar}{2}(\rho_{12} + \rho_{21}) = \frac{\hbar}{2}(\rho_{12} + \rho_{12}^*) = \hbar \text{Re}(\rho_{12})$$

$$\text{Tr}\{\rho S_y\} = [S_y] = \frac{\hbar}{2}(i\rho_{12} - i\rho_{21}) = \frac{\hbar}{2}i(\rho_{12} - \rho_{12}^*) = -\hbar \text{Im}(\rho_{12})$$

$$\text{Tr}\{\rho S_z\} = [S_z] = \frac{\hbar}{2}(\rho_{11} - \rho_{22}).$$

ρ é Hermiteana
 $\rho_{21} = \rho_{12}^*$