

Base de kets e representações matriciais

Começaremos estudando os autokets de uma observável (representada por um operador Hermiteano A).

Teorema : Os autovalores de um operador Hermiteano A são reais; os autokets de A com autovalores distintos são ortogonais.

Demonstração: Lembre que $A|a'\rangle = a'|a'\rangle$ e que A é Hermiteano, e portanto $\langle a''|A = \langle a''|a''^*$, onde a' , a'' , ... são autovalores de A . Multiplicando a primeira equação pela esquerda por $\langle a''|$ e a segunda equação por $|a'\rangle$ pela direita e subtraindo uma da outra, temos

$$(a' - a''^*)\langle a''|a'\rangle = 0$$

Um produto resulta em zero, se um dos fatores é zero (ou ambos). Tomemos

$$\text{dois casos} \begin{cases} (1) \ a' = a'' \rightarrow \langle a'|a'\rangle \neq 0 \rightarrow a' = a'^* \text{ e, } \therefore \text{ real.} \\ (2) \ a' \neq a'' \rightarrow a' \neq a''^* \rightarrow \langle a''|a'\rangle = 0 \text{ e, } \therefore \text{ ortogonais.} \end{cases}$$

É possível construir um conjunto ortonormal de kets $\langle a''|a'\rangle = \delta_{a',a''}$

Este conjunto, por hipótese, é completo

Autokets como Base de kets

Escreva

$$|\alpha\rangle = \sum_{a'} c_{a'} |a'\rangle$$

Multiplique pela esquerda por $\langle a''|$ e obtenha $c_{a''} = \langle a''|\alpha\rangle$.

Assim, $|\alpha\rangle = \sum_{a'} |a'\rangle \langle a'|\alpha\rangle$, o que nos leva à $\sum_{a'} |a'\rangle \langle a'| = \mathbb{1}$

Análogo à expansão de um vetor $\vec{V} = \sum_i \hat{e}_i (\hat{e}_i \cdot \vec{V})$

$$\langle \alpha|\alpha\rangle = \langle \alpha| \underbrace{\left(\sum_{a'} |a'\rangle \langle a'| \right)}_{\mathbb{1}} |\alpha\rangle = \sum_{a'} |\langle a'|\alpha\rangle|^2$$

Relação de
completeza

Operador
de projeção

$$\text{Se } \langle \alpha|\alpha\rangle = 1 \rightarrow \sum_{a'} |\langle a'|\alpha\rangle|^2 = \sum_{a'} |c_{a'}|^2 = 1$$


$$(|a'\rangle \langle a'|) \cdot |\alpha\rangle = |a'\rangle \langle a'|\alpha\rangle = c_{a'} |a'\rangle. \text{ Se } \Lambda_{a'} \equiv |a'\rangle \langle a'| \text{ temos } \sum_{a'} \Lambda_{a'} = \mathbb{1}$$

$\Lambda_{a'}$ seleciona a porção de $|\alpha\rangle$ na direção de $|a'\rangle$

Representações matriciais

Um operador X pode ser escrito na forma $X = \mathbb{1} X \mathbb{1} = \sum_{a''} \sum_{a'} |a''\rangle \langle a''| X |a'\rangle \langle a'|$

Pense em $\langle a''| X |a'\rangle$ como elemento de uma matriz representada por:


linha e coluna

$$X \doteq \begin{pmatrix} \langle a^{(1)}| X |a^{(1)}\rangle & \langle a^{(1)}| X |a^{(2)}\rangle & \dots \\ \langle a^{(2)}| X |a^{(1)}\rangle & \langle a^{(2)}| X |a^{(2)}\rangle & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

É fácil mostrar que $X^\dagger \doteq \begin{pmatrix} \langle a^{(1)}| X |a^{(1)}\rangle^* & \langle a^{(2)}| X |a^{(1)}\rangle^* & \dots \\ \langle a^{(1)}| X |a^{(2)}\rangle^* & \langle a^{(2)}| X |a^{(2)}\rangle^* & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$, pois vimos

que $\langle a''| X |a'\rangle = \langle a'| X^\dagger |a''\rangle^*$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Ou seja, para obter a matriz do conjugado} \\ \text{Hermiteano tome a matriz transposta e o} \\ \text{complexo conjugado de todos seus elementos.} \end{array} \right.$

Se X é Hermiteano temos que $\langle a''| X |a'\rangle = \langle a'| X^\dagger |a''\rangle^* = \langle a'| X |a''\rangle^*$

Representações matriciais

- $Z = XY$

O elemento de matriz $\langle a'' | Z | a' \rangle = \langle a'' | X \mathbb{1} Y | a' \rangle = \sum_{a'''} \langle a'' | X | a''' \rangle \langle a''' | Y | a' \rangle$

- $|\gamma\rangle = X|\alpha\rangle$

operador unidade

$$\langle a' | \gamma \rangle = \langle a' | X | \alpha \rangle = \langle a' | X \cdot \mathbb{1} | \alpha \rangle = \sum_{a''} \langle a' | X | a'' \rangle \langle a'' | \alpha \rangle$$

Isto sugere

$$|\alpha\rangle \doteq \begin{pmatrix} \langle a^{(1)} | \alpha \rangle \\ \langle a^{(2)} | \alpha \rangle \\ \langle a^{(3)} | \alpha \rangle \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad |\gamma\rangle \doteq \begin{pmatrix} \langle a^{(1)} | \gamma \rangle \\ \langle a^{(2)} | \gamma \rangle \\ \langle a^{(3)} | \gamma \rangle \\ \vdots \end{pmatrix}$$

- $\langle \gamma | = \langle \alpha | X$

operador unidade

$$\langle \gamma | a' \rangle = \langle \alpha | X | a' \rangle = \langle \alpha | \mathbb{1} \cdot X | a' \rangle = \sum_{a''} \langle \alpha | a'' \rangle \langle a'' | X | a' \rangle \text{ o que sugere}$$

$$\langle \alpha | \doteq (\langle \alpha | a^{(1)} \rangle \quad \langle \alpha | a^{(2)} \rangle \quad \langle \alpha | a^{(3)} \rangle \quad \dots) = (\langle a^{(1)} | \alpha \rangle^* \quad \langle a^{(2)} | \alpha \rangle^* \quad \langle a^{(3)} | \alpha \rangle^* \quad \dots)$$

$$\langle \gamma | \doteq (\langle \gamma | a^{(1)} \rangle \quad \langle \gamma | a^{(2)} \rangle \quad \langle \gamma | a^{(3)} \rangle \quad \dots) = (\langle a^{(1)} | \gamma \rangle^* \quad \langle a^{(2)} | \gamma \rangle^* \quad \langle a^{(3)} | \gamma \rangle^* \quad \dots)$$

Representações matriciais

Assim, nesta representação matricial

$$\begin{aligned}\langle \beta | \alpha \rangle &= \langle \beta | \mathbb{1} | \alpha \rangle = \langle \beta | \left(\sum_{a'} |a'\rangle \langle a'| \right) | \alpha \rangle = \sum_{a'} \langle \beta | a' \rangle \langle a' | \alpha \rangle = \\ &= \left(\langle \beta | a^{(1)} \rangle \quad \langle \beta | a^{(2)} \rangle \quad \langle \beta | a^{(3)} \rangle \quad \dots \right) \begin{pmatrix} \langle a^{(1)} | \alpha \rangle \\ \langle a^{(2)} | \alpha \rangle \\ \langle a^{(3)} | \alpha \rangle \\ \vdots \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Use o operador unidade

e $\langle \beta | X | \alpha \rangle = \langle \beta | \mathbb{1} . X . \mathbb{1} | \alpha \rangle = \sum_{a'} \sum_{a''} \langle \beta | a' \rangle \langle a' | X | a'' \rangle \langle a'' | \alpha \rangle$ fica representado por

$$\left(\langle \beta | a^{(1)} \rangle \quad \langle \beta | a^{(2)} \rangle \quad \langle \beta | a^{(3)} \rangle \dots \right) \begin{pmatrix} \langle a^{(1)} | X | a^{(1)} \rangle & \langle a^{(1)} | X | a^{(2)} \rangle & \dots \\ \langle a^{(2)} | X | a^{(1)} \rangle & \langle a^{(2)} | X | a^{(2)} \rangle & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle a^{(1)} | \alpha \rangle \\ \langle a^{(2)} | \alpha \rangle \\ \langle a^{(3)} | \alpha \rangle \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Representações matriciais

A representação matricial do produto externo fica

$$\begin{aligned}
 |\beta\rangle\langle\alpha| &\doteq \begin{pmatrix} \langle a^{(1)}|\beta\rangle \\ \langle a^{(2)}|\beta\rangle \\ \langle a^{(3)}|\beta\rangle \\ \vdots \end{pmatrix} (\langle\alpha|a^{(1)}\rangle \quad \langle\alpha|a^{(2)}\rangle \quad \langle\alpha|a^{(3)}\rangle \quad \dots) \\
 &= \begin{pmatrix} \langle a^{(1)}|\beta\rangle\langle\alpha|a^{(1)}\rangle & \langle a^{(1)}|\beta\rangle\langle\alpha|a^{(2)}\rangle & \dots \\ \langle a^{(2)}|\beta\rangle\langle\alpha|a^{(1)}\rangle & \langle a^{(2)}|\beta\rangle\langle\alpha|a^{(2)}\rangle & \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

A representação matricial de um operador na sua base de autokets fica

$$\begin{aligned}
 A &= \mathbb{1}.A.\mathbb{1} = \sum_{a',a''} |a'\rangle\langle a'|A|a''\rangle\langle a''| = \sum_{a',a''} |a'\rangle a''\delta_{a'a''}\langle a''| = \\
 &= \sum_{a'} a'|a'\rangle\langle a'| = \sum_{a'} a'\Lambda_{a'}
 \end{aligned}$$

operator unidade

Operador de projeção

$$\langle a'|A|a''\rangle = a''\langle a'|a''\rangle = a''\delta_{a',a''}$$

Representações matriciais: Sistemas de Spin $\frac{1}{2}$

$|S_z; \pm\rangle \rightarrow |\pm\rangle$ para economizar

Como fica o operador unidade (também chamado de operador identidade)?

$$\mathbb{1} = (|+\rangle\langle+|) + (|-\rangle\langle-|)$$

E o S_z ? $S_z = \frac{\hbar}{2}|+\rangle\langle+| - \frac{\hbar}{2}|-\rangle\langle-|$

Note que $S_z|\pm\rangle = \pm\frac{\hbar}{2}|\pm\rangle$

Uma definição útil $S_+ \equiv \hbar|+\rangle\langle-|$ e $S_- \equiv \hbar|-\rangle\langle+|$ mais tarde $S_{\pm} = S_x \pm iS_y$

Note que $\underbrace{S_+|+\rangle = \hbar|+\rangle\langle-|+\rangle = 0}$ e que $\overbrace{S_+|-\rangle = \hbar|+\rangle\langle-|-\rangle = \hbar|+\rangle}^{\text{levantador}}$

Quando não dá para levantar, a operação dá zero

Note que $\underbrace{S_-|-\rangle = \hbar|-\rangle\langle+|-\rangle = 0}$ e que $\overbrace{S_-|+\rangle = \hbar|-\rangle\langle+|+\rangle = \hbar|-\rangle}^{\text{abaixador}}$

Quando não dá abaixar, a operação dá zero

Representações matriciais $|+\rangle \doteq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; |-\rangle \doteq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix};$

$$S_z \doteq \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; S_+ \doteq \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; S_- \doteq \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Medidas, observáveis e relações de incerteza

Antes da medida da observável A , podemos pensar que o sistema pode ser representado por

$$|\alpha\rangle = \sum_{a'} c_{a'} |a'\rangle = \sum_{a'} |a'\rangle \langle a'|\alpha\rangle$$

quando a medida é feita, tudo se passa como se o sistema fosse atirado (colapsasse) em um dos autokets de A (aquele correspondente ao autovalor a')

$$|\alpha\rangle \xrightarrow{\text{medida}} |a'\rangle$$

Uma medida normalmente muda o estado do sistema, exceto

$$|a'\rangle \xrightarrow{\text{medida}} |a'\rangle$$

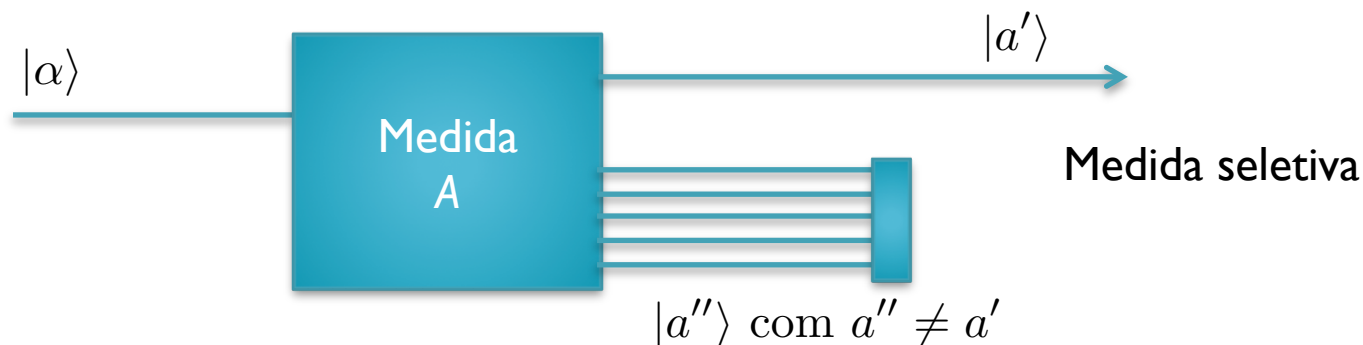
Note, entretanto, que antes da medida não sabemos qual dos a' será obtido.

Postulamos que a probabilidade de encontrar a' é $|c_{a'}|^2 = |\langle a'|\alpha\rangle|^2$

normalizado

Medidas, observáveis e relações de incerteza

Na vida real para verificarmos que a probabilidade de encontrar a' está correta, preparamos muito sistemas em $|\alpha\rangle$ e medimos até verificar que a distribuição estatística das medidas está correta. Uma coleção de sistemas, todos preparados no mesmo estado $|\alpha\rangle$, é chamado de ensemble puro. Um feixe de átomos de prata que passaram por um experimento de Stern-Gerlach $SG_{\hat{z}}$ é um ensemble puro caracterizado pelo estado $|S_z; +\rangle$.



Em uma nova medida, qual a probabilidade de medirmos A e obtermos a' ? e de obtermos $a'' \neq a'$?

$$|\langle a'|a'\rangle|^2 = 1$$

$$|\langle a''|a'\rangle|^2 = 0$$

Valor esperado de A com respeito ao estado $|\alpha\rangle$

Valor esperado é definido por $\langle A \rangle = \langle \alpha | A | \alpha \rangle = \langle A \rangle_\alpha$ (notação comum)

$$\langle A \rangle = \langle \alpha | \mathbb{1} \cdot A \cdot \mathbb{1} | \alpha \rangle = \sum_{a, a''} \langle \alpha | a' \rangle \langle a' | A | a'' \rangle \langle a'' | \alpha \rangle = \sum_{a'} a' |\langle a' | \alpha \rangle|^2$$

$$\langle a' | A | a'' \rangle = a'' \langle a' | a'' \rangle = a'' \delta_{a', a''}$$

Uma média ponderada.
Nossa noção intuitiva de
um valor médio medido

Cuidado

Valor médio pode dar qualquer coisa entre o menor e o maior valor das medidas efetuadas

O valor de uma medida é um dos autovalores

Um pouco mais de Sistemas de Spin $\frac{1}{2}$

Será que temos o suficiente para definir $|S_x; \pm\rangle$ e $|S_y; \pm\rangle$? Veremos que sim e até para definir os operadores.

Na Experiência de Stern-Gerlach quando tomamos um feixe $|S_x; +\rangle$ e o passamos por SG_z , o feixe dividiu-se igualmente em $|S_z; +\rangle$ e $|S_z; -\rangle$, de tal forma

$|\pm\rangle$ notação simplificada

$$|\langle + | S_x; + \rangle| = |\langle - | S_x; + \rangle| = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ pois } |\langle + | S_x; + \rangle|^2 = |\langle - | S_x; + \rangle|^2 = \frac{1}{2}$$

$$\text{Assim, } |S_x; +\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\delta_1}|-\rangle$$

Nada mudaria se multiplicássemos por uma fase global (escolhemos uma para ter o coeficiente do $|+\rangle$ real).

$$\text{De forma semelhante, obtemos } |S_x; -\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\delta'_1}|-\rangle$$

$$\text{Como } \langle S_x; - | S_x; + \rangle = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{i(\delta_1 - \delta'_1)} = 0 \longrightarrow e^{i(\delta_1 - \delta'_1)} = -1$$

$$\text{Assim, } |S_x; -\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\delta_1}|-\rangle$$

Um pouco mais de Sistemas de Spin $\frac{1}{2}$

De $|S_x; \pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle \pm \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\delta_1}|-\rangle$, obtemos

$$S_x = \frac{\hbar}{2}(|S_x; +\rangle\langle S_x; +| - |S_x; -\rangle\langle S_x; -|) = \frac{\hbar}{2}(e^{-\delta_1}|+\rangle\langle -| + e^{\delta_1}|-\rangle\langle +|)$$

$$A = \sum_{a'} a' |a'\rangle\langle a'| = \sum_{a'} a' \Lambda_{a'}$$

note que $S_x^\dagger = S_x$, como deveria ser

De forma similar, podemos construir $|S_y; \pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle \pm \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\delta_2}|-\rangle$, e

$$S_y = \frac{\hbar}{2}(|S_y; +\rangle\langle S_y; +| - |S_y; -\rangle\langle S_y; -|) = \frac{\hbar}{2}(e^{-\delta_2}|+\rangle\langle -| + e^{\delta_2}|-\rangle\langle +|)$$

Será que dá para definir δ_1 e δ_2 ? Que tal $SG_{\hat{x}}$ seguido de $SG_{\hat{y}}$?

$$|\langle S_y; \pm | S_x; + \rangle| = |\langle S_y; \pm | S_x; - \rangle| = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{1}{2} |1 \pm e^{i(\delta_1 - \delta_2)}| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{mas } |1 \pm e^{i\phi}| = \left| \pm 2e^{i\frac{\phi}{2}} \frac{(e^{i\frac{\phi}{2}} \pm e^{-i\frac{\phi}{2}})}{2} \right| \begin{matrix} \nearrow \cos \frac{\phi}{2} \\ \searrow \sin \frac{\phi}{2} \end{matrix} \rightarrow \phi = \delta_1 - \delta_2 = \mp \frac{\pi}{2}$$

$\delta_1 = 0$ faz elementos de matriz S_x reais e $\delta_2 = \frac{\pi}{2}$ faz eixos x,y,z convencionais

Um pouco mais de Sistemas de Spin $\frac{1}{2}$

Resumindo:

$$|S_x; \pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle \pm \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle$$

$$|S_y; \pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle \pm \frac{i}{\sqrt{2}}|-\rangle$$

$$S_x = \frac{\hbar}{2}(|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|)$$

$$S_y = \frac{\hbar}{2}(-i|+\rangle\langle-| + i|-\rangle\langle+|)$$

Mostre que: $S_{\pm} = S_x \pm iS_y$; $[S_i, S_j] = i\epsilon_{ijk}\hbar S_k$ $\{S_i, S_j\} = \frac{1}{2}\hbar^2\delta_{ij}$

onde $[A, B] = AB - BA$ e $\{A, B\} = AB + BA$

$\epsilon_{ijk} = 1$ para permutação cíclica e -1 para permutação não cíclica

Mostre também que: $S^2 = \vec{S} \cdot \vec{S} \equiv S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 = (\frac{3}{4})\hbar^2$ e que $[S^2, S_i] = 0$

$$X \doteq \begin{pmatrix} \langle a^{(1)} | X | a^{(1)} \rangle & \langle a^{(1)} | X | a^{(2)} \rangle & \dots \\ \langle a^{(2)} | X | a^{(1)} \rangle & \langle a^{(2)} | X | a^{(2)} \rangle & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$X^\dagger \doteq \begin{pmatrix} \langle a^{(1)} | X | a^{(1)} \rangle^* & \langle a^{(2)} | X | a^{(1)} \rangle^* & \dots \\ \langle a^{(1)} | X | a^{(2)} \rangle^* & \langle a^{(2)} | X | a^{(2)} \rangle^* & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Se X é Hermiteano temos que $\langle a'' | X | a' \rangle = \langle a' | X^\dagger | a'' \rangle^* = \langle a' | X | a'' \rangle^*$

Isso permite escrever

$$\begin{cases} \langle a' | X | a'' \rangle^* = \langle a'' | X | a' \rangle \\ \vdots \\ \langle a^{(2)} | X | a^{(1)} \rangle^* = \langle a^{(1)} | X | a^{(2)} \rangle \end{cases}$$

$$X^\dagger = X = \begin{pmatrix} \langle a^{(1)} | X | a^{(1)} \rangle & \langle a^{(1)} | X | a^{(2)} \rangle & \langle a^{(1)} | X | a^{(3)} \rangle & \dots \\ \langle a^{(1)} | X | a^{(2)} \rangle^* & \langle a^{(2)} | X | a^{(2)} \rangle & \langle a^{(2)} | X | a^{(3)} \rangle & \dots \\ \langle a^{(1)} | X | a^{(3)} \rangle^* & \langle a^{(2)} | X | a^{(3)} \rangle^* & \langle a^{(3)} | X | a^{(3)} \rangle & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$