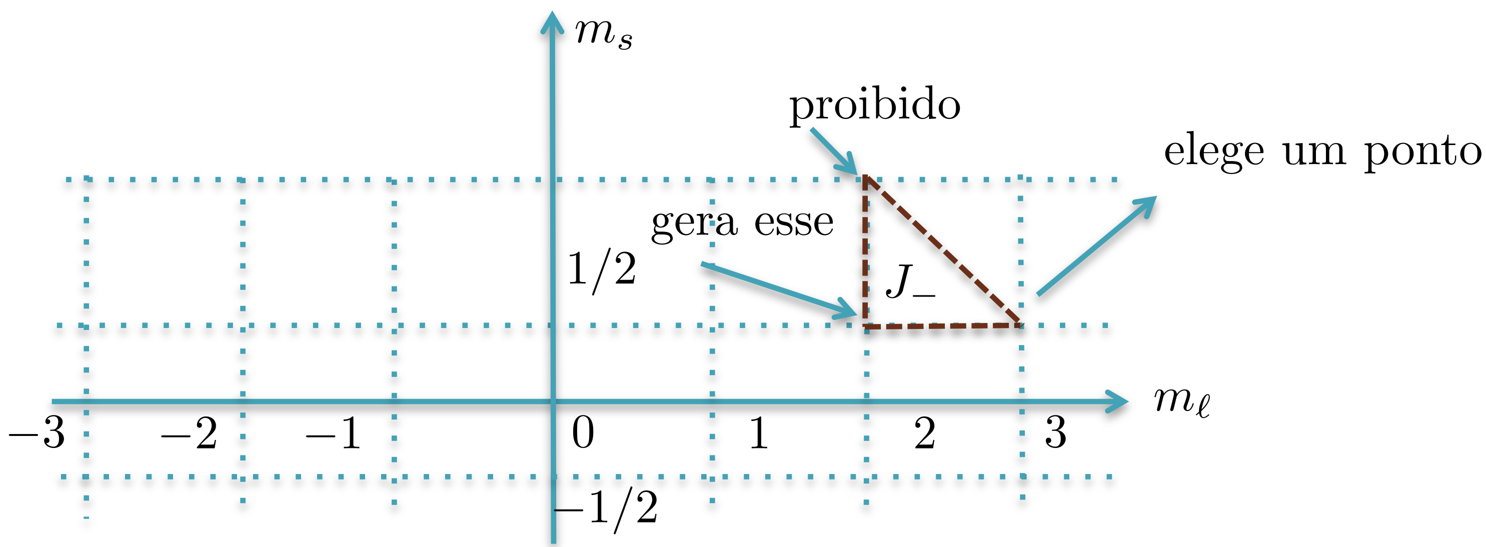
Usando as Fórmulas de Recorrência: um exemplo prático

Testemos o procedimento para o caso $\boxed{\underbrace{j_1 = \ell}_{m_\ell} \text{ e } \underbrace{j_2 = s = 1/2}_{m_s = \pm 1/2}}$

Quanto vale j? $|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2 \rightarrow \begin{cases} \text{Se } \ell = 0 \rightarrow j = 1/2 \\ \text{Se } \ell > 0 \rightarrow j = \ell \pm 1/2 \end{cases}$

Na linguagem de espectroscopia $\ell = 1 \rightarrow p$ e $\begin{cases} j = 1/2 \rightarrow p_{1/2} \\ j = 3/2 \rightarrow p_{3/2} \end{cases}$



Usando as Fórmulas de Recorrência: um exemplo prático

Assim, a fórmula de recorrência do slide 11 da aula passada

$$\sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}\langle j_1 j_2; m_1 m_2|j_1 j_2; jm\pm 1\rangle =$$
$$=\sqrt{(j_1\mp m_1+1)(j_1\pm m_1)}\langle j_1 j_2; m_1\mp 1, m_2|j_1 j_2; jm\rangle +$$
$$+\sqrt{(j_2\mp m_2+1))(j_2\pm m_2)}\langle j_1 j_2; m_1, m_2\mp 1|j_1 j_2; jm\rangle,$$

começaremos com esse

caso J_- (sinal inferior), para $j_1=\ell, j_2=s=1/2$ e $j=\ell+1/2$ fixos,

iniciando com $m_2=m_s=1/2$, fica:

simplificando a notação

$$\sqrt{(\ell+1/2+m)(\ell+1/2-m+1)}\langle m_\ell, 1/2|\ell+1/2, m-1\rangle =$$
$$=\sqrt{(\ell+m_\ell+1)(\ell-m_\ell)}\langle m_\ell+1, 1/2|l+1/2, m\rangle +$$
$$+\sqrt{(1/2+1/2+1)(1/2-1/2)}\langle m_\ell, \underbrace{1/2+1}_{\text{3/2: passou do máximo de } m_s=1/2}|\ell+1/2, m\rangle$$

Com a substituição $m\Rightarrow m+1$ temos:

$$\sqrt{(\ell+m+3/2)(\ell-m+1/2)}\langle m_\ell, 1/2|\ell+1/2, m\rangle =$$

estamos fazendo $m_s=1/2$

$$=\sqrt{(\ell+m_\ell+1)(\ell-m_\ell)}\langle m_\ell+1, 1/2|l+1/2, m+1\rangle \text{ com } \begin{cases} m=m_\ell+1/2 \\ \text{substitua} \\ m_\ell=m-1/2 \end{cases}$$

Usando as Fórmulas de Recorrência: um exemplo prático

Com a nova substituição temos

$$\sqrt{(\ell+m+3/2)(\ell-m+1/2)}\langle m-1/2,1/2|\ell+1/2,m\rangle =$$

$$=\sqrt{(\ell+m+1/2)(\ell-m+1/2)}\langle m+1/2,1/2|\ell+1/2,m+1\rangle$$

e finalmente

$$\langle m-1/2,1/2|\overbrace{\ell+1/2}^{j},\overbrace{m}^{m}\rangle=\sqrt{\frac{\ell+m+1/2}{\ell+m+3/2}}\langle m+1/2,1/2|\underbrace{\overbrace{\ell+1/2}^{j},\overbrace{m+1}^{m+1}}\rangle$$

numerador é 1 a menos que o denominador

j+m+1 note que é soma acima

Note que os dois coeficientes diferem de 1 em m. Assim podemos substituir o coeficiente da direita usando a mesma regra, isto é:

tem que parar em $\ell+1/2$

numerador é 1 a menos que o denominador

Troque m por m+1 na expressão acima

$$\underbrace{\langle m+1/2,1/2|\ell+1/2,m+1\rangle}_{\text{Esse é o lado direito da expressão acima}}=\sqrt{\frac{\ell+m+3/2}{\ell+m+5/2}}\langle m+3/2,1/2|\underbrace{\ell+1/2,\overbrace{m+2}}\rangle$$

j+m+2 note que é soma acima

Que tal escrevermos:

numerador é 1 a menos que o denominador

$$\langle m-1/2,1/2|\ell+1/2,m\rangle=\sqrt{\frac{\ell+m+1/2}{\ell+m+3/2}}\sqrt{\frac{\ell+m+3/2}{\ell+m+5/2}}\sqrt{\frac{\ell+m+5/2}{\ell+m+7/2}}\cdots$$

$$\cdots\sqrt{\frac{\ell+1/2+(\ell-1/2)}{\ell+1/2+(\ell+1/2)}}\langle\ell,1/2|\underbrace{\ell+1/2,\ell+1/2}\rangle$$

j+j note que é soma acima

$$\therefore\langle m-1/2,1/2|\ell+1/2,m\rangle=\sqrt{\frac{\ell+m+1/2}{2\ell+1}}\langle\ell,1/2|\ell+1/2,\ell+1/2\rangle$$

Usando as Fórmulas de Recorrência: um exemplo prático

Usamos:

1) O denominador do fator que precede o C.C.G. é igual a soma $j+m$.

2) O denominador à esquerda cancela com o numerador à direita.

3) Agora note o seguinte:
$|m_\ell = \ell, m_s = 1/2\rangle$ tem $m = \ell + 1/2,$ o maior possível e precisa estar associado à $j = \ell + 1/2$ (o $j = \ell - 1/2$ seria menor que m).
$\therefore\ |m_\ell = \ell, m_s = 1/2\rangle \propto |j = \ell + 1/2, m = \ell + 1/2\rangle$ por convenção, são feitos iguais. Isto é $|\ell, 1/2\rangle = |\ell + 1/2, \ell + 1/2\rangle$ e $\therefore\ \langle \ell, 1/2 | \ell + 1/2, \ell + 1/2\rangle = 1$

Nestas condições: $\boxed{\langle m - 1/2, 1/2 | \ell + 1/2, m\rangle = \sqrt{\dfrac{\ell + m + 1/2}{2\ell + 1}}}$ → m_s=½

Falta o $m_s = -1/2$ que obteremos em seguida.

Usando as Fórmulas de Recorrência: um exemplo prático

Até aqui, encontramos:

$$\langle \underbrace{m-1/2}_{m_\ell}, \underbrace{1/2}_{m_s} | \underbrace{\ell+1/2}_{j}, m\rangle = \sqrt{\frac{\ell+m+1/2}{2\ell+1}}$$

e falta o coeficiente de Clebsch-Gordan associado ao $m_s=-1/2$

Para melhor entender isso, considere:

$$|\ell+1/2,m\rangle = \sum_{m_\ell m_s} |\ell\ 1/2; m_\ell, m_s\rangle\langle \ell\ 1/2; m_\ell, m_s|\ell+1/2,m\rangle =$$

simplificando a notação

$$= \sum_{m_\ell m_s} |m_\ell, m_s\rangle\langle m_\ell, m_s|\ell+1/2,m\rangle = \sum_{m_\ell} |m_\ell,\ +1/2\rangle \underbrace{\langle m_\ell,\ +1/2|\ell+1/2,m\rangle}_{m_\ell+1/2=m} +$$

somando em m_s

$$+\sum_{m_\ell} |m_\ell,\ -1/2\rangle \underbrace{\langle m_\ell,\ -1/2|\ell+1/2,m\rangle}_{m_\ell-1/2=m}$$

$$= |m-1/2,+1/2\rangle \underbrace{\langle m-1/2,+1/2|\ell+1/2,m\rangle}_{\text{temos esse}} +$$

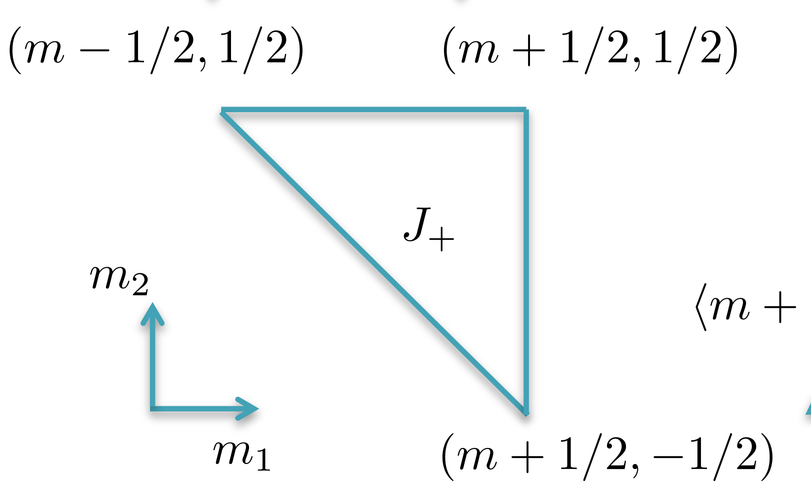
$$+\,|m+1/2,-1/2\rangle \underbrace{\langle m+1/2,-1/2|\ell+1/2,m\rangle}_{\text{falta esse}}$$

Usando as Fórmulas de Recorrência: um exemplo prático

Observe que a fórmula de recorrência do J_+ fornece um deles, em função de dois conhecidos:

$$\langle m-1/2, 1/2|\ell+1/2, m\rangle = \sqrt{\frac{\ell+m+1/2}{2\ell+1}}$$

$$\langle m+1/2, 1/2|\ell+1/2, m+1\rangle = \sqrt{\frac{\ell+(m+1)+1/2}{2\ell+1}}$$



$$\langle m+1/2, -1/2|\ell+1/2, m\rangle$$

Da fórmula do J_+ tome: $j_1=\ell, j_2=1/2, j=\ell+1/2$ e $\begin{cases} m_1 = m+1/2 \\ m_2 = 1/2 \end{cases}$

Usando as Fórmulas de Recorrência: um exemplo prático

Isso fornece:

$$\sqrt{[(\ell+1/2)-m][(\ell+1/2)+m+1]}\langle \ell s; m+1/2, 1/2|\ell s; \ell+1/2, m+1\rangle =$$
$$= \sqrt{[(\ell-(m+1/2)+1][\ell+(m+1/2)]}\langle \ell s; m+1/2-1, 1/2|\ell s; \ell+1/2, m\rangle +$$
$$+ \sqrt{[1/2-1/2+1][1/2+1/2]}\langle \ell s; m+1/2, 1/2-1|\ell s; \ell+1/2, m\rangle$$

Simplificando a fórmula, temos:

$$\sqrt{(\ell-m+1/2)(\ell+m+3/2)}\langle m+1/2, 1/2|\ell+1/2, m+1\rangle =$$
$$= \sqrt{(\ell-m+1/2)(\ell+m+1/2)}\langle m-1/2, 1/2|\ell+1/2, m\rangle +$$
$$+ \langle m+1/2, -1/2|\ell+1/2, m\rangle \quad \therefore$$

$$\langle m+1/2, -1/2|\ell+1/2, m\rangle = \sqrt{(\ell-m+1/2)(\ell+m+3/2)}\sqrt{\frac{(\ell+m+3/2)}{2\ell+1}} +$$
$$- \sqrt{(\ell-m+1/2)(\ell+m+1/2)}\sqrt{\frac{(\ell+m+1/2)}{2\ell+1}} =$$
$$= (\ell+m+3/2-(\ell+m+1/2))\sqrt{\frac{(\ell-m+1/2)}{2\ell+1}} = \sqrt{\frac{(\ell-m+1/2)}{2\ell+1}}$$

e finalmente, podemos, a seguir, escrever $|\ell s; \ell+1/2, m\rangle$ na base $\{m_1, m_2\}$

Usando as Fórmulas de Recorrência: um exemplo prático

Isto é: $|\ell s; \underbrace{\ell+1/2, m}_{\text{base } j,m}\rangle =$

$$= \sqrt{\frac{(\ell+m+1/2)}{2\ell+1}}|\ell s; \underbrace{m-1/2, 1/2}_{\text{base } m_1, m_2}\rangle + \sqrt{\frac{(\ell-m+1/2)}{2\ell+1}}|\ell s; \underbrace{m+1/2, -1/2}_{\text{base } m_1, m_2}\rangle$$

Na representação das coordenadas e linguagem de spinor, temos:

$$\mathcal{Y}_\ell^{j=\ell+1/2,m} = \sqrt{\frac{(\ell+m+1/2)}{2\ell+1}} Y_\ell^{m-1/2}(\theta,\varphi)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \sqrt{\frac{(\ell-m+1/2)}{2\ell+1}} Y_\ell^{m+1/2}(\theta,\varphi)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\ell+1}}\begin{pmatrix} \sqrt{\ell+m+1/2}\, Y_\ell^{m-1/2} \\ \\ \sqrt{\ell-m+1/2}\, Y_\ell^{m+1/2} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{Y}_\ell^{j=\ell+1/2,m} \text{ autofunções de } \begin{cases} L^2 \\ S^2 \\ J^2 \\ J_z, \end{cases} \text{ c/ autovalores } \begin{cases} \ell(\ell+1)\hbar^2 \\ 3/4\hbar^2 \\ j(j+1)\hbar^2 \text{ com } j = \ell+1/2 \\ m\hbar \end{cases}$$

Mostre que também é autoestado de $\mathbf{L}.\mathbf{S}$ (justifique) com autovalor $\dfrac{\ell\hbar^2}{2}$.

Usando as Fórmulas de Recorrência: um exemplo prático

Comentários adicionais: sobre a família de CG para $j = \ell - 1/2$

$$|\ell - 1/2, m\rangle = \sum_{m_\ell m_s} |\ell\ 1/2; m_\ell m_s\rangle\langle \ell\ 1/2; m_\ell m_s|\ell - 1/2, m\rangle =$$

$$= \sum_{m_\ell m_s} |m_\ell m_s\rangle\langle m_\ell m_s|\ell - 1/2, m\rangle.$$ Considere primeiro $m = \ell - 1/2$

$$|\underbrace{\ell - 1/2}_{j}, \underbrace{\ell - 1/2}_{m}\rangle = |\underbrace{\ell}_{m_\ell}, \underbrace{-1/2}_{m_s}\rangle\langle \ell, -1/2|\ell - 1/2, \ell - 1/2\rangle +$$

$$+ |\underbrace{\ell - 1}_{m_\ell}, \underbrace{1/2}_{m_s,}\rangle\langle \ell - 1, 1/2|\ell - 1/2, \ell - 1/2\rangle$$

Note que envolvem os mesmos kets $|m_\ell m_s\rangle$, pois são os únicos que garantem $m = \ell - 1/2 = m_\ell + m_s$.

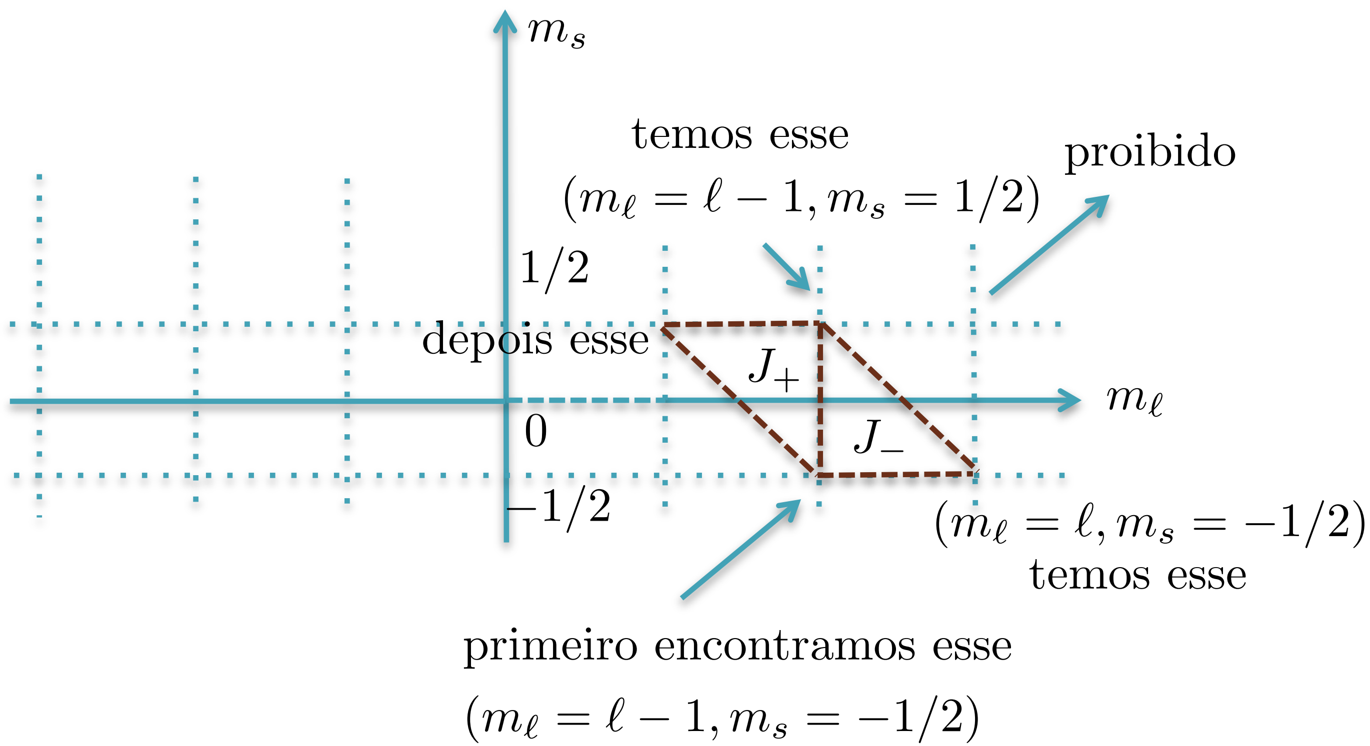
E para obtê-lo $\begin{cases} (1) \text{ faça-o ortogonal à: } |\ell + 1/2, \ell - 1/2\rangle \\ (2) \text{ normalize-o e} \\ (3) \text{ tome CG's reais.} \end{cases}$

Para o item (1), temos do slide 8 (basta fazer $m = \ell - 1/2$) :

$$\boxed{|\ell + 1/2, \ell - 1/2\rangle = \sqrt{\frac{2\ell}{2\ell + 1}}|\ell - 1, 1/2\rangle + \sqrt{\frac{1}{2\ell + 1}}|\ell, -1/2\rangle}$$

Usando as Fórmulas de Recorrência: um exemplo prático

Considere $j=\ell-1/2,\ m=\ell-1/2$ e os dois CG encontrados no slide anterior



Outra estratégia. Sabendo $|j=\ell+1/2,m\rangle$, como encontrar $|j=\ell-1/2,m\rangle$?

Vimos que

$$|\ell+1/2,m\rangle=\sqrt{\frac{(\ell+m+1/2)}{2\ell+1}}|m-1/2,1/2\rangle+\sqrt{\frac{(\ell-m+1/2)}{2\ell+1}}|m+1/2,-1/2\rangle$$

lousa

e sabemos que

$$|\ell-1/2,m\rangle=A|m-1/2,1/2\rangle+B|m+1/2,-1/2\rangle,\ \text{com}\ A^2+B^2=1$$

De volta as Matrizes de Rotação

Comentários sobre coeficientes de Clebsch-Gordan e matrizes de rotação:

$$\text{Considere}\begin{cases} D^{(j_1)}(R) \text{ no espaço } |j_1, m_1\rangle \\ \\ D^{(j_2)}(R) \text{ no espaço } |j_2, m_2\rangle \end{cases}$$

O produto $D^{(j_1)}(R) \otimes D^{(j_2)}(R)$ pode ser bloco diagonal, se escolhermos a base$\{|jm\rangle\}$. A representação matricial fica:

$$\begin{array}{r c}
 & \{|j=j_1+j_2, m\rangle\} \; \{|j=j_1+j_2-1, m\rangle\} \; \{|j=j_1-j_2, m\rangle\} \\
\begin{array}{r} \{\langle j=j_1+j_2, m|\} \\ \{\langle j=j_1+j_2-1, m|\} \\ \\ \{\langle j=j_1-j_2, m|\} \end{array} &
\begin{pmatrix} D^{(j_1+j_2)}(R) & & & \mathrm{O} \\ & D^{(j_1+j_2-1)}(R) & & \\ & & \ddots & \\ \mathrm{O} & & & D^{(j_1-j_2)}(R) \end{pmatrix}
\end{array}$$

Isso é o mesmo que dizer que:

$$D^{(j_1)}(R) \otimes D^{(j_2)}(R) = D^{(j_1+j_2)}(R) \otimes D^{(j_1+j_2-1)}(R) \otimes \ldots \otimes D^{(|j_1-j_2|)}(R).$$

De volta as Matrizes de Rotação

Em termos dos elementos das matrizes de rotação, temos uma relação importante, conhecida como série de Clebsch-Gordan:

$$\mathcal{D}^{(j_1)}_{m_1 m_1'}(R)\mathcal{D}^{(j_2)}_{m_2 m_2'}(R) = \sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \sum_{m} \sum_{m'} \langle j_1 j_2; m_1 m_2 | j_1 j_2; jm\rangle \times$$

$$\times \langle j_1 j_2; m_1' m_2' | j_1 j_2; jm'\rangle \mathcal{D}^{(j)}_{mm'}(R)$$

Para demostrar isso, note que o lado esquerdo é o elemento de matriz:

$$\langle j_1 j_2; m_1 m_2 | D(R) | j_1 j_2; m_1' m_2'\rangle = \underbrace{\langle j_1 m_1 | D(R) | j_1 m_1'\rangle}_{\mathcal{D}^{(j_1)}_{m_1 m_1'}(R)} \underbrace{\langle j_2 m_2 | D(R) | j_2 m_2'\rangle}_{\mathcal{D}^{(j_2)}_{m_2 m_2'}(R)}$$

e que o lado direito também pode ser obtido da mesma expressão, se inserirmos a unidade da base $\{jm\}$, isto é: $\langle j_1 j_2; m_1 m_2 | \mathbb{1} D(R) \mathbb{1} | j_1 j_2; m_1' m_2'\rangle =$

$$= \sum_{jm} \sum_{j'm'} \langle j_1 j_2; m_1 m_2 | j_1 j_2; jm\rangle \underbrace{\langle j_1 j_2; jm | D(R) | j_1 j_2; j'm'\rangle}_{\mathcal{D}^{(j)}_{mm'}(R)\delta_{jj'}} \underbrace{\langle j_1 j_2; j'm' | j_1 j_2; m_1' m_2'\rangle}_{\text{real}}$$

e isso completa a demonstração de validade da série de Clebsch-Gordan.

Uma aplicação da fórmula

Lembre que $\mathcal{D}^{(\ell)}_{m0}(\alpha,\beta,0)=\sqrt{\dfrac{4\pi}{(2\ell+1)}}Y_\ell^{m\,*}(\beta,\alpha)$

Faça na expressão do slide anterior, $j_1=\ell_1,\ j_2=\ell_2,\ m_1'=0,\ $ e $m_2'=0$

$$\sqrt{\frac{4\pi}{(2\ell_1+1)}}Y_{\ell_1}^{m_1\,*}(\beta,\alpha)\sqrt{\frac{4\pi}{(2\ell_2+1)}}Y_{\ell_2}^{m_2\,*}(\beta,\alpha)=\sum_{\ell m}\langle\ell_1\ell_2;m_1m_2|\ell_1\ell_2;\ell m\rangle\times$$

$$\langle\ell_1\ell_2;m_1'=0m_2'=0|\ell_1\ell_2;\ell m'=m_1'+m_2'=0\rangle\,\underbrace{\mathcal{D}^{(\ell)}_{m0}(\alpha,\beta,0)}_{\sqrt{\frac{4\pi}{(2\ell+1)}}Y_\ell^{m\,*}(\beta,\alpha)}$$

O que permite escrever

$$Y_{\ell_1}^{m_1\,*}(\beta,\alpha)Y_{\ell_2}^{m_2\,*}(\beta,\alpha)=\sum_{\ell'm'}\sqrt{\frac{(2\ell_1+1)(2\ell_2+1)}{4\pi(2\ell'+1)}}\langle\ell_1\ell_2;m_1m_2|\ell_1\ell_2;\ell'm'\rangle\times$$

$\langle\ell_1\ell_2;00|\ell_1\ell_2;\ell 0\rangle Y_{\ell'}^{m'\,*}(\beta,\alpha)$. "Complexando" e multiplicando por $Y_\ell^{m\,*}(\beta,\alpha)$,

temos $(\beta=\theta$ e $\alpha=\varphi)$: $\displaystyle\int d\Omega Y_\ell^{m\,*}(\theta,\varphi)Y_{\ell_1}^{m_1}(\theta,\varphi)Y_{\ell_2}^{m_2}(\theta,\varphi)=$

$$=\sqrt{\frac{(2\ell_1+1)(2\ell_2+1)}{4\pi(2\ell+1)}}\langle\ell_1\ell_2;00|\ell_1\ell_2;\ell 0\rangle\langle\ell_1\ell_2;m_1m_2|\ell_1\ell_2;\ell m\rangle$$

Slide 10

Lousa

Sabendo $|j=\ell+1/2,m\rangle$, como encontrar $|j=\ell-1/2,m\rangle$? Vimos que

$$|\ell+1/2,m\rangle=\sqrt{\frac{(\ell+m+1/2)}{2\ell+1}}|m-1/2,1/2\rangle+\sqrt{\frac{(\ell-m+1/2)}{2\ell+1}}|m+1/2,-1/2\rangle,$$

e sabemos que

$$|\ell-1/2,m\rangle=A|m-1/2,1/2\rangle+B|m+1/2,-1/2\rangle, \text{ com } A^2+B^2=1.$$

Primeiro, note que $\left(\sqrt{\frac{(\ell+m+1/2)}{2\ell+1}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{(\ell-m+1/2)}{2\ell+1}}\right)^2=1$ e como são reais, poderíamos definir $\sqrt{\frac{(\ell+m+1/2)}{2\ell+1}}=\cos\alpha$ e $\sqrt{\frac{(\ell-m+1/2)}{2\ell+1}}=\sin\alpha$.

Pela mesma razão $A=\cos\beta$ e $B=\sin\beta$. Como $\langle\ell-1/2,m|\ell+1/2,m\rangle=0$, temos $\cos\beta\cos\alpha+\sin\beta\sin\alpha=0\Rightarrow\frac{\cos\beta}{\sin\beta}=-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\rightarrow\beta=\alpha+\pi/2$. Isso implica em $A=\cos\beta=-\sin\alpha=-\sqrt{\frac{(\ell-m+1/2)}{2\ell+1}}$ e $B=\sin\beta=\cos\alpha=\sqrt{\frac{(\ell+m+1/2)}{2\ell+1}}$.

E assim

$$|\ell-1/2,m\rangle=-\sqrt{\frac{(\ell-m+1/2)}{2\ell+1}}|m-1/2,1/2\rangle+\sqrt{\frac{(\ell+m+1/2)}{2\ell+1}}|m+1/2,-1/2\rangle.$$

No texto, os autores usaram que $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}$ para calcular o coeficiente de $|m+1/2,-1/2\rangle$ para $|\ell+1/2,m\rangle$.