



Os mistérios da Mecânica Quântica

A história da Mecânica Quântica está repleta de controvérsias, mistérios e interpretações duvidosas. Por um lado, é uma das mais bem sucedidas teorias da física, apresentando um formalismo matemático sofisticado e que corresponde aos experimentos. Além disso, as aplicações da teoria foram responsáveis por grandes revoluções tecnológicas nos últimos cem anos. Por outro, ainda é um desafio explicar como seus conceitos matemáticos correspondem à realidade. Desde o início, essa dificuldade inspirou importantes discussões entre os maiores físicos das últimas gerações, e diversas interpretações e alternativas foram propostas a fim de "completar" a teoria. Neste seminário apresentaremos um novo olhar para esse problema. Assumimos que não há nada importante faltando na mecânica quântica, há apenas limitações impostas pela realidade física (e bem descritas pela teoria). Os mistérios que a perseguem desde seu nascimento são esclarecidos por uma interpretação apropriada dessas limitações. Apresentaremos duas regras de interpretação para serem incorporadas na bem aceita interpretação de Copenhague. Discutiremos os efeitos dessas regras sobre alguns dos mistérios mais polêmicos (colapso da função de onda, papel do observador, partículas entrelaçadas e gato de Schrödinger).



**Prof. Dr. Marco Aurélio
Pinheiro Lima**

11 de junho de 2021 às 19h

O seminário será realizado online.

Assista via Zoom ou via live no
Facebook do IFGW

<https://sites.ifi.unicamp.br/fisica-para-curiosos/>



Momento Angular: O Modelo de Oscilador de Schwinger

Considere 2 osciladores harmônicos simples desacoplados: tipo + e tipo -

$$\text{tipo } + \begin{cases} a_+ \\ a_+^\dagger \\ N_+ = a_+^\dagger a_+ \\ [a_+, a_+^\dagger] = 1 \\ [N_+, a_+] = -a_+ \\ [N_+, a_+^\dagger] = a_+^\dagger \end{cases} \quad \text{e tipo } - \begin{cases} a_- \\ a_-^\dagger \\ N_- = a_-^\dagger a_- \\ [a_-, a_-^\dagger] = 1 \\ [N_-, a_-] = -a_- \\ [N_-, a_-^\dagger] = a_-^\dagger \end{cases}$$

Como são desacoplados $[a_+, a_-] = [a_+, a_-^\dagger] = [a_+^\dagger, a_-] = [a_+^\dagger, a_-^\dagger] = 0$

Construa autokets simultâneos de N_+ e N_- . Lembre que $([N_+, N_-] = 0)$

$$\text{Que tal } \begin{cases} N_+ |n_+\rangle = n_+ |n_+\rangle \\ N_- |n_-\rangle = n_- |n_-\rangle \end{cases} \quad \text{dando origem à: } \begin{cases} N_+ |n_+, n_-\rangle = n_+ |n_+, n_-\rangle \\ N_- |n_+, n_-\rangle = n_- |n_+, n_-\rangle \end{cases}$$

$$\text{Também vale } \begin{cases} a_+^\dagger |n_+, n_-\rangle = \sqrt{n_+ + 1} |n_+ + 1, n_-\rangle \\ a_-^\dagger |n_+, n_-\rangle = \sqrt{n_- + 1} |n_+, n_- + 1\rangle \\ a_+ |n_+, n_-\rangle = \sqrt{n_+} |n_+ - 1, n_-\rangle \\ a_- |n_+, n_-\rangle = \sqrt{n_-} |n_+, n_- - 1\rangle \\ a_+ |0, n_-\rangle = 0 \text{ e } a_- |n_+, 0\rangle = 0 \\ |n_+, n_-\rangle = \frac{(a_+^\dagger)^{n_+}}{\sqrt{n_+!}} \frac{(a_-^\dagger)^{n_-}}{\sqrt{n_-!}} |0, 0\rangle \end{cases}$$

Momento Angular: O Modelo de Oscilador de Schwinger

Defina
$$\begin{cases} J_+ \equiv \hbar a_+^\dagger a_- \\ J_- \equiv \hbar a_-^\dagger a_+ \\ J_z \equiv \frac{\hbar}{2}(a_+^\dagger a_+ - a_-^\dagger a_-) = \frac{\hbar}{2}(N_+ - N_-) \end{cases}$$

e mostre
$$\begin{cases} [J_z, J_\pm] = \pm \hbar J_\pm \\ [J_+, J_-] = 2\hbar J_z \end{cases}$$

lousa

Se definirmos $N \equiv N_+ + N_-$, é possível obter:

$$\begin{aligned} J^2 &= J_z^2 + \frac{1}{2}(J_+ J_- + J_- J_+) = \frac{\hbar^2}{4}(N_+ - N_-)^2 + \frac{\hbar^2}{2}(a_+^\dagger a_- a_-^\dagger a_+ + a_-^\dagger a_+ a_+^\dagger a_-) = \\ &= \frac{\hbar^2}{4}(N_+ - N_-)^2 + \frac{\hbar^2}{2} \underbrace{(a_+^\dagger a_+)}_{N_+} \underbrace{(a_- a_-^\dagger)}_{1 + a_-^\dagger a_-} + \frac{\hbar^2}{2} \underbrace{(a_-^\dagger a_-)}_{N_-} \underbrace{(a_+ a_+^\dagger)}_{1 + a_+^\dagger a_+} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore J^2 &= \frac{\hbar^2}{4}(N_+ - N_-)^2 + \frac{\hbar^2}{2}(N_+ + N_+ N_- + N_- + N_- N_+) = \\ &= \frac{\hbar^2}{4}(N_+^2 - 2N_+ N_- + N_-^2) + \frac{\hbar^2}{2}(N_+ + N_- + 2N_+ N_-) = \\ &= \frac{\hbar^2}{4}(N_+^2 + 2N_+ N_- + N_-^2) + \frac{\hbar^2}{2}N = \frac{\hbar^2}{4}N^2 + \frac{\hbar^2}{2}N = \frac{\hbar^2}{2}N\left(\frac{N}{2} + 1\right) \end{aligned}$$

Momento Angular: O Modelo de Oscilador de Schwinger

Interpretação $|n_+, n_-\rangle$ $\left\{ \begin{array}{l} n_+ \rightarrow \text{número de spins } 1/2 \text{ p/ cima} \\ n_- \rightarrow \text{número de spins } 1/2 \text{ p/ baixo} \end{array} \right.$

$$J_+ = \hbar a_+^\dagger a_-$$

destrói um spin para baixo (direção \hat{z})
constrói um spin para cima (direção \hat{z})

$$J_- = \hbar a_-^\dagger a_+$$

destrói um spin para cima (direção \hat{z})
constrói um spin para baixo (direção \hat{z})

$J_z = \frac{\hbar}{2}(N_+ - N_-)$ diferença entre o número de spins “up” e “down”. Esta é a componente z do momento angular.

Momento Angular: O Modelo de Oscilador de Schwinger

$$\text{Assim } \left\{ \begin{array}{l} J_+ |n_+, n_-\rangle = \hbar a_+^\dagger a_- |n_+, n_-\rangle = \sqrt{(n_+ + 1)n_-} \hbar |n_+ + 1, n_- - 1\rangle \\ J_- |n_+, n_-\rangle = \hbar a_-^\dagger a_+ |n_+, n_-\rangle = \sqrt{(n_- + 1)n_+} \hbar |n_+ - 1, n_- + 1\rangle \\ J_z |n_+, n_-\rangle = \frac{\hbar}{2} (N_+ - N_-) |n_+, n_-\rangle = \frac{\hbar}{2} (n_+ - n_-) |n_+, n_-\rangle \\ (J^2 = \frac{\hbar^2}{2} N(\frac{N}{2} + 1)) |n_+, n_-\rangle = \frac{\hbar^2}{2} (n_+ + n_-) (\frac{n_+ + n_-}{2} + 1) |n_+, n_-\rangle \end{array} \right.$$

A similaridade aumenta ainda mais, se tomarmos $\begin{cases} n_+ \rightarrow j + m \\ n_- \rightarrow j - m \end{cases}$

pois assim, os fatores acima ficam: $\begin{cases} \sqrt{(n_+ + 1)n_-} = \sqrt{(j + m + 1)(j - m)} \\ \sqrt{(n_- + 1)n_+} = \sqrt{(j - m + 1)(j + m)} \end{cases}$

de acordo com a expectativa. Além disso, os

$$\text{autovalores de } \left\{ \begin{array}{l} J_z \implies \frac{1}{2} (j + m - (j - m)) \hbar = m \hbar \\ J^2 \implies \frac{\hbar^2}{2} (2j)(j + 1) = \hbar^2 j(j + 1) \end{array} \right.$$

Momento Angular: O Modelo de Oscilador de Schwinger

Dada a similaridade de tratamento, definimos de $\begin{cases} n_+ \rightarrow j + m \\ n_- \rightarrow j - m \end{cases}$

no modelo de oscilador de Schwinger $\begin{cases} j \equiv \frac{n_+ + n_-}{2} \\ m \equiv \frac{n_+ - n_-}{2} \end{cases}$



Algumas observações

1) Quando aplicamos J_{\pm} , o j não muda.

2) e o $m \implies m \pm 1$, como esperado.

Use isso para definir j e m de um dado ket $|n_+, n_-\rangle$, e as duas primeiras fórmulas da caixa azul do slide anterior.

$$3) |jm\rangle = |n_+, n_-\rangle = \frac{(a_+^\dagger)^{n_+}}{\sqrt{n_+!}} \frac{(a_-^\dagger)^{n_-}}{\sqrt{n_-!}} |0, 0\rangle = \frac{(a_+^\dagger)^{j+m}}{\sqrt{(j+m)!}} \frac{(a_-^\dagger)^{j-m}}{\sqrt{(j-m)!}} |0, 0\rangle,$$

com um caso especial interessante:

$$|jj\rangle = \frac{(a_+^\dagger)^{2j}}{\sqrt{(2j)!}} |0, 0\rangle \implies \underbrace{2j}_{\text{partículas}} \text{ de spin } 1/2 \text{ com seus spins "up".}$$

Caso $m=j$ ou se preferir caso $n_-=0, n_+=2j$, pois $n_+ + n_- = 2j$

Interpretamos $|jm\rangle$ como sendo: $\begin{cases} j + m \text{ com spin } + 1/2 \\ j - m \text{ com spin } - 1/2 \end{cases}$

Matrizes de Rotação e Osciladores de Schwinger

Lembrem:
$$D(R)|jm\rangle = \sum_{m'} |jm'\rangle \underbrace{\langle jm'|D(R)|jm\rangle}_{\mathcal{D}_{m'm}^j(R)} \stackrel{\alpha=\gamma=0}{=} \sum_{m'} |jm'\rangle d_{m'm}^j(\beta)$$

pois,
$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{m'm}^j(R) &= \langle jm'| \exp\left(-\frac{iJ_z\alpha}{\hbar}\right) \exp\left(-\frac{iJ_y\beta}{\hbar}\right) \exp\left(-\frac{iJ_z\gamma}{\hbar}\right) |jm\rangle = \\ &= e^{-i(m'\alpha+m\gamma)} \underbrace{\langle jm'| \exp\left(-\frac{iJ_y\beta}{\hbar}\right) |jm\rangle}_{d_{m'm}^j(\beta)} \end{aligned}$$

Usaremos $D(R) = \exp\left(-\frac{iJ_y\beta}{\hbar}\right)$ para obter $D(R)|jm\rangle$ na linguagem de

Schwinger. Começamos por:
$$D(R)|jm\rangle = D(R) \frac{(a_+^\dagger)^{j+m}}{\sqrt{(j+m)!}} \frac{(a_-^\dagger)^{j-m}}{\sqrt{(j-m)!}} |0,0\rangle$$

Note
$$\begin{cases} a_-^\dagger |0,0\rangle = a_-^\dagger D^{-1}(R)D(R)|0,0\rangle \\ a_-^{\dagger 2} |0,0\rangle = a_-^\dagger D^{-1}(R)D(R)a_-^\dagger D^{-1}(R)D(R)|0,0\rangle \end{cases}$$

$$\begin{cases} D(R)a_-^\dagger |0,0\rangle = [D(R)a_-^\dagger D^{-1}(R)]D(R)|0,0\rangle \\ \therefore \begin{cases} D(R)a_-^{\dagger 2} |0,0\rangle = D(R)a_-^\dagger D^{-1}(R)D(R)a_-^\dagger D^{-1}(R)D(R)|0,0\rangle \\ D(R)a_-^{\dagger 2} D^{-1}(R)D(R)|0,0\rangle = [D(R)a_-^\dagger D^{-1}(R)]^2 D(R)|0,0\rangle \end{cases} \end{cases}$$

E isso nos leva à:
$$D(R)a_-^{\dagger n} D^{-1}(R) = (D(R)a_-^\dagger D^{-1}(R))^n$$

Matrizes de Rotação e Osciladores de Schwinger

Este raciocínio permite escrever $D(R)|jm\rangle = D(R) \frac{(a_+^\dagger)^{j+m}}{\sqrt{(j+m)!}} \frac{(a_-^\dagger)^{j-m}}{\sqrt{(j-m)!}} |0,0\rangle$

da seguinte forma:

$$D(R)|jm\rangle = D(R) \frac{(a_+^\dagger)^{j+m}}{\sqrt{(j+m)!}} D^{-1}(R) D(R) \frac{(a_-^\dagger)^{j-m}}{\sqrt{(j-m)!}} D^{-1}(R) D(R) |0,0\rangle$$

que com auxílio da expressão $D(R)a_\pm^\dagger D^{-1}(R) = (D(R)a_\pm^\dagger D^{-1}(R))^n$ fica:

$$D(R)|jm\rangle = \frac{[D(R)a_+^\dagger D^{-1}(R)]^{j+m} [D(R)a_-^\dagger D^{-1}(R)]^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}} D(R) |0,0\rangle$$

Para desenvolver esta expressão, precisamos olhar para:

$$D(R)a_\pm^\dagger D^{-1}(R) = \exp\left(-\frac{iJ_y\beta}{\hbar}\right) a_\pm^\dagger \exp\left(+\frac{iJ_y\beta}{\hbar}\right) \text{ e para isso, precisamos usar}$$

$$\exp(iG\lambda) A \exp(-iG\lambda) =$$

$$= A + i\lambda[G, A] + \frac{i^2\lambda^2}{2!} [G, [G, A]] + \dots + \frac{i^n\lambda^n}{n!} [G, [G, [G \dots [G, A] \dots]]] + \dots$$

com $G = -\frac{J_y}{\hbar}$, $A = a_\pm^\dagger$, $\lambda = \beta$ e calcular $[-\frac{J_y}{\hbar}, a_\pm^\dagger]$; $[-\frac{J_y}{\hbar}[-\frac{J_y}{\hbar}, a_\pm^\dagger]]$, etc.

Matrizes de Rotação e Osciladores de Schwinger

Sabendo que
$$\begin{cases} J_{\pm} = J_x \pm iJ_y \\ J_y = \frac{J_+ - J_-}{2i} \\ J_+ = \hbar a_+^\dagger a_- \\ J_- = \hbar a_-^\dagger a_+ \end{cases}$$
 começaremos por $[-\frac{J_y}{\hbar}, a_+^\dagger]$

$$[-\frac{J_y}{\hbar}, a_+^\dagger] = -\frac{1}{2i\hbar} [J_+ - J_-, a_+^\dagger] = -\frac{1}{2i\hbar} \{ [J_+, a_+^\dagger] - [J_-, a_+^\dagger] \}$$

mas
$$\begin{cases} [J_+, a_+^\dagger] = \hbar [a_+^\dagger a_-, a_+^\dagger] = 0 \\ [J_-, a_+^\dagger] = \hbar [a_-^\dagger a_+, a_+^\dagger] = \hbar a_-^\dagger \underbrace{[a_+, a_+^\dagger]}_1 = \hbar a_-^\dagger \end{cases}$$

$$\therefore [-\frac{J_y}{\hbar}, a_+^\dagger] = -\frac{1}{2i\hbar} \cdot (-\hbar) a_-^\dagger = \frac{1}{2i} a_-^\dagger$$

$$\begin{aligned} [-\frac{J_y}{\hbar}, [-\frac{J_y}{\hbar}, a_+^\dagger]] &= [-\frac{J_y}{\hbar}, \frac{1}{2i} a_-^\dagger] = -\frac{1}{2i\hbar} [\frac{J_+ - J_-}{2i}, a_-^\dagger] = \\ &= -\frac{1}{2i\hbar} \left\{ \underbrace{[\frac{\hbar a_+^\dagger a_-}{2i}, a_-^\dagger]}_{\hbar \frac{a_+^\dagger}{2i}} - \underbrace{[\frac{\hbar a_-^\dagger a_+}{2i}, a_-^\dagger]}_0 \right\} = \frac{a_+^\dagger}{4} \end{aligned}$$

Mostre que $[-\frac{J_y}{\hbar}, [-\frac{J_y}{\hbar}, [-\frac{J_y}{\hbar}, a_+^\dagger]]] = \frac{1}{8i} a_-^\dagger$

Matrizes de Rotação e Osciladores de Schwinger

Usando os resultados do slide anterior, podemos calcular:

$$\begin{aligned}
 D(R)a_+^\dagger D^{-1}(R) &= \exp\left(-\frac{iJ_y\beta}{\hbar}\right)a_+^\dagger \exp\left(+\frac{iJ_y\beta}{\hbar}\right) = \\
 &= a_+^\dagger + i\beta \frac{1}{2i}a_-^\dagger + \frac{i^2\beta^2}{2!} \frac{1}{4}a_+^\dagger + \frac{i^3\beta^3}{3!} \frac{1}{8i}a_-^\dagger + \dots = \\
 &= a_+^\dagger \underbrace{\left(1 - \frac{(\beta/2)^2}{2!} \dots\right)}_{\cos \beta/2} + a_-^\dagger \underbrace{\left(\beta/2 - \frac{(\beta/2)^3}{3!} + \dots\right)}_{\sin \beta/2} =
 \end{aligned}$$

$$= a_+^\dagger \cos \beta/2 + a_-^\dagger \sin \beta/2 \text{ (não é uma surpresa: spin up rodando)}$$

Da mesma forma, é possível obter $D(R)a_-^\dagger D^{-1}(R) = a_-^\dagger \cos \beta/2 - a_+^\dagger \sin \beta/2$

Usando o teorema binomial $(x + y)^N = \sum_k N! \frac{x^{N-k}y^k}{(N-k)!k!}$, podemos escrever

$$\begin{aligned}
 D(\alpha = 0, \beta, \gamma = 0)|jm\rangle &= \sum_{k\ell} \frac{(j+m)!(j-m)!}{(j+m-k)!k!(j-m-\ell)!} \times \\
 &\times \frac{(a_+^\dagger \cos \beta/2)^{j+m-k} (a_-^\dagger \sin \beta/2)^k (-a_+^\dagger \sin \beta/2)^{j-m-\ell} (a_-^\dagger \cos \beta/2)^\ell}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}} |0,0\rangle
 \end{aligned}$$

Matrizes de Rotação e Osciladores de Schwinger

Esta última fórmula precisa ser comparada com:

$$D(\alpha = 0, \beta, \gamma = 0) |jm\rangle = \sum_{m'} |jm'\rangle d_{m'm}^{(j)}(\beta) =$$

$$= \sum_{m'} d_{m'm}^{(j)}(\beta) \underbrace{\frac{(a_+^\dagger)^{j+m'} (a_-^\dagger)^{j-m'}}{\sqrt{(j+m')!(j-m')!}}}_{|jm'\rangle} |0,0\rangle$$

Para isso, note e

iguale $\left\{ \begin{array}{l} \text{Expoente de } a_+^\dagger \implies j + m - k + j - m - \ell = j + m' \rightarrow \ell = j - k - m' \\ \text{Expoente de } a_-^\dagger \implies k + \ell = j - m' \rightarrow \ell = j - k - m' \end{array} \right.$

← iguais →

Assim faça $\ell = j - k - m'$ na soma dupla do slide anterior (a soma em ℓ vira soma em m').

$$D(\alpha = 0, \beta, \gamma = 0) |jm\rangle = \sum_{km'} \frac{(j+m)!(j-m)!}{(j+m-k)!k!(j-m-j+k+m')!(j-k-m')!} \times$$

$$\times (\cos \beta/2)^{j+m-k+j-k-m'} \frac{1}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}} (\sin \beta/2)^{k+j-m-j+k+m'} \times$$

$$\times (a_+^\dagger)^{j+m-k+j-m-j+k+m'} (a_-^\dagger)^{k+j-k-m'} (-1)^{j-m-j+k+m'} |0,0\rangle$$

Matrizes de Rotação e Osciladores de Schwinger

Simplificando a última fórmula do slide anterior, temos

$$D(\alpha = 0, \beta, \gamma = 0)|jm\rangle = \sum_{m'} \sum_k \frac{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}}{(j+m-k)!k!(k-m+m')!(j-k-m')!} \times \\ \times (\cos \beta/2)^{2j-2k+m-m'} (\sin \beta/2)^{2k-m+m'} (a_+^\dagger)^{j+m'} (a_-^\dagger)^{j-m'} (-1)^{k-m+m'} |0,0\rangle$$

Comparação direta com a fórmula do do topo do slide 10, nos leva à

$$d_{m'm}^{(j)}(\beta) = \sum_k (-1)^{k-m+m'} \frac{\sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!}}{(j+m-k)!k!(k-m+m')!(j-k-m')!} \times \\ \times (\cos \beta/2)^{2j-2k+m-m'} (\sin \beta/2)^{2k-m+m'}$$

Note que multiplicamos e dividimos a expressão anterior por

$\sqrt{(j+m')!(j-m')!}$ para obter a expressão para $|jm'\rangle$ da fórmula do topo do slide 10.

• Vamos calcular $\begin{cases} [J_z, J_{\pm}] = \pm \hbar J_{\pm} \\ [J_+, J_-] = 2\hbar J_z \end{cases}$ com $\begin{cases} J_+ \equiv \hbar a_+^\dagger a_- \\ J_- \equiv \hbar a_-^\dagger a_+ \\ J_z \equiv \frac{\hbar}{2}(a_+^\dagger a_+ - a_-^\dagger a_-) = \frac{\hbar}{2}(N_+ - N_-) \\ [a_-, a_-^\dagger] = 1 \\ [a_+, a_+^\dagger] = 1 \end{cases}$

$$\begin{aligned} [J_z, J_+] &= \frac{\hbar}{2} \hbar [a_+^\dagger a_+ - a_-^\dagger a_-, a_+^\dagger a_-] = \frac{\hbar^2}{2} \{ [a_+^\dagger a_+, a_+^\dagger a_-] - [a_-^\dagger a_-, a_+^\dagger a_-] \} = \\ &= \frac{\hbar^2}{2} \{ [a_+^\dagger a_+, a_+^\dagger] a_- - a_+^\dagger [a_-^\dagger a_-, a_-] \} = \frac{\hbar^2}{2} \{ a_+^\dagger \underbrace{[a_+, a_+^\dagger]}_1 a_- - a_+^\dagger \underbrace{[a_-^\dagger, a_-]}_{-1} a_- \} = \end{aligned}$$

$$= \frac{\hbar}{2} \hbar (2a_+^\dagger a_-) = \hbar J_+ \Rightarrow \text{as outras deduções são similares.}$$

• Considerando $\begin{cases} n_+ \rightarrow j + m \text{ com spin } + 1/2 \\ n_- \rightarrow j - m \text{ com spin } - 1/2 \end{cases}$ e $\begin{cases} j \equiv \frac{n_+ + n_-}{2} \\ m \equiv \frac{n_+ - n_-}{2} \end{cases}$

$$\text{use } |jm\rangle = |n_+, n_-\rangle = \frac{(a_+^\dagger)^{n_+}}{\sqrt{n_+!}} \frac{(a_-^\dagger)^{n_-}}{\sqrt{n_-!}} |0, 0\rangle = \frac{(a_+^\dagger)^{j+m}}{\sqrt{(j+m)!}} \frac{(a_-^\dagger)^{j-m}}{\sqrt{(j-m)!}} |0, 0\rangle,$$

e construa $|jm\rangle$ para

$$j = 1/2 \Rightarrow |1/2 \ +1/2\rangle = |1, 0\rangle; |1/2 \ -1/2\rangle = |0, 1\rangle$$

$$j = 1 \Rightarrow |1 \ +1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |2, 0\rangle; |1 \ 0\rangle = |1, 1\rangle; |1 \ -1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |0, 2\rangle$$