Medidas de Correlação de Spin e Desigualdade de Bell

Atenção especial às Correlações nos estados de spin singleto. Para ver isso, considere duas partículas de spin 1/2. Como seriam os estados possíveis do sistema? $|1/2-1/2| \leq j \leq 1/2+1/2$

$$\begin{cases} |{+}{+}\rangle = \underbrace{|1,+1\rangle}_{j,m} \rightarrow \text{tripleto} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\{|{+}{-}\rangle + |{-}{+}\rangle\} = \underbrace{|1,0\rangle}_{j,m} \rightarrow \text{tripleto} \\ |{-}{-}\rangle = \underbrace{|1,-1\rangle}_{j,m} \rightarrow \text{tripleto} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\{|{+}{-}\rangle - |{-}{+}\rangle\} = \underbrace{|0,0\rangle}_{j,m} \rightarrow \text{singleto} \end{cases}$$

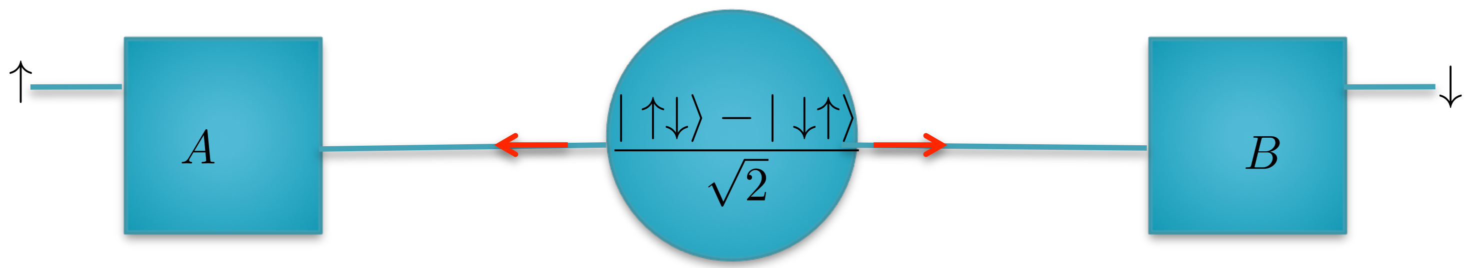
Suponha que o estado do sistema seja $|\text{singleto}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|\underbrace{\hat{\mathbf{z}}+}_{\substack{\text{elétron}\\ \text{1 up}}};\underbrace{\hat{\mathbf{z}}-}_{\substack{\text{elétron}\\ \text{2 down}}}\rangle - |\underbrace{\hat{\mathbf{z}}-}_{\substack{\text{elétron}\\ \text{1 down}}};\underbrace{\hat{\mathbf{z}}+}_{\substack{\text{elétron}\\ \text{2 up}}}\rangle\}$

$|\hat{\mathbf{z}}+\rangle\langle\hat{\mathbf{z}}+| \otimes \mathbb{1}_2$

Se medirmos S_z da partícula 1 e encontrarmos $\hbar/2$, o novo estado do sistema será $C\Big(|\hat{\mathbf{z}}+;\hat{\mathbf{z}}+\rangle\langle\hat{\mathbf{z}}+;\hat{\mathbf{z}}+| + |\hat{\mathbf{z}}+;\hat{\mathbf{z}}-\rangle\langle\hat{\mathbf{z}}+;\hat{\mathbf{z}}-|\Big)|\text{singleto}\rangle = |\hat{\mathbf{z}}+;\hat{\mathbf{z}}-\rangle$ e $\therefore$ se medirmos de novo o spin da partícula 1, encontraremos $\hbar/2$, como esperado. Em seguida, se medirmos o spin da partícula 2, encontraremos $-\hbar/2$ com 100% de certeza. Antes da medida sobre a partícula 1, teríamos 50% de chance para up e 50% para down da partícula 2.

Medidas de Correlação de Spin e Desigualdade de Bell

Coloque o sistema no estado singleto e separe as partículas



Se A mede $\hbar/2$, o que esperamos da medida de B?

Se A mede $\hbar/2$ B mediria $-\hbar/2$, com certeza

Se A não mede o spin da partícula 1, B teria 50% de chance de encontrar S_z+ e 50% de chance de encontrar S_z-

Qual é a velocidade do colapso do estado da situação em que não sabemos qual seria o resultado da medida de B para a situação em que saberíamos (decorrente da medida feita por A)? Isso perturbou muito Albert Einstein.

Medidas de Correlação de Spin e Desigualdade de Bell

Será que estamos fazendo alguma intepretação errada? Vamos re-construir o experimento em uma analogia clássica com bolas coloridas. Considere uma urna com duas bolas: uma branca e uma preta. Se aleatoriamente retirarmos uma, temos 50% de chance de obter uma das cores. Se, entretanto, retirarmos uma e der preta, sabemos que a segunda a ser retirada será branca com 100% de certeza.

O problema quântico é, de fato, mais complicado, pois o sistema pode ser caracterizado por S_z (branco e preto) ou S_x (verde e azul) ou ainda S_y (vermelho e amarelo), e outras direções à sua escolha. Lembrando que:

$$|\hat{\mathbf{x}}\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|\hat{\mathbf{z}}+\rangle \pm |\hat{\mathbf{z}}-\rangle\big) \text{ e } \therefore |\hat{\mathbf{z}}\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|\hat{\mathbf{x}}+\rangle \pm |\hat{\mathbf{x}}-\rangle\big)$$

Podemos escrever: $|\text{singleto}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|\hat{\mathbf{z}}+\rangle \otimes |\hat{\mathbf{z}}-\rangle - |\hat{\mathbf{z}}-\rangle \otimes |\hat{\mathbf{z}}+\rangle\big)$. Este estado pode ser re-escrito usando $|\hat{\mathbf{x}}\pm\rangle$, da seguinte forma: $|\text{singleto}\rangle =$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big(\big(|\hat{\mathbf{x}}+\rangle + |\hat{\mathbf{x}}-\rangle\big) \otimes \big(|\hat{\mathbf{x}}+\rangle - |\hat{\mathbf{x}}-\rangle\big) - \big(|\hat{\mathbf{x}}+\rangle - |\hat{\mathbf{x}}-\rangle\big) \otimes \big(|\hat{\mathbf{x}}+\rangle + |\hat{\mathbf{x}}-\rangle\big)\Big)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\big(2|\hat{\mathbf{x}}-;\hat{\mathbf{x}}+\rangle - 2|\hat{\mathbf{x}}+;\hat{\mathbf{x}}-\rangle\big) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\big(|\hat{\mathbf{x}}+;\hat{\mathbf{x}}-\rangle - |\hat{\mathbf{x}}-;\hat{\mathbf{x}}+\rangle\big) \text{também singleto.}$$

O que tínhamos com $\hat{\mathbf{z}}\pm$, agora temos com $\hat{\mathbf{x}}\pm$ (isso vale para $\hat{\mathbf{n}}\pm$).

Voluntário?

Medidas de Correlação de Spin e Desigualdade de Bell

Suponha que um observador A possa escolher S_z ou S_x da partícula 1, apenas trocando a orientação do analisador de spin, enquanto que o observador B sempre mede S_x da partícula 2.

Assim:

- Se A determina S_z+ então B tem 50%-50% de obter S_x+ ou S_x-. (Mesmo que S_z- da partícula 2 tenha 100% de chance de ser medida por B, S_x é indeterminada).
- Se A determina S_x+ para a partícula 1, então B determina S_x-, sem chances de errar. Dizemos que as duas medidas estão 100% correlacionadas.
- Se A não faz nenhuma medida, B tem 50%/50% para S_x+/S_x-.

A medida de B parece depender da medida de A, independente da distância d entre os dois experimentos. Considerando que informação viaja com a velocidade máxima c (velocidade da luz), isto é perturbador. Será que conseguiríamos montar um experimento onde B soubesse o que A mediu em um intervalo de tempo inferior a d/c após a medida de A? Resp.: NÃO. Isso não seria apenas perturbador. Isso estragaria a relatividade especial.

Medidas de Correlação de Spin e Desigualdade de Bell

Suponha que A e B possam escolher S_x ou S_z. Teríamos a seguinte situação:

Componente medida por A	Resultado	Componente medida por B	Resultado
z	+	z	-
z	+	x	+
z	+	x	-
z	-	z	+
z	-	x	+
z	-	x	-
x	+	z	+
x	+	z	-
x	+	x	-
x	-	z	+
x	-	z	-
x	-	x	+

O Resultado de B depende do que A fez!

Compare

Compare

Medidas de Correlação de Spin e Desigualdade de Bell

A interpretação ortodoxa da mecânica quântica diz que se o sistema se encontra em $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|S_z+;S_z-\rangle - |S_z-;S_z+\rangle\right)$ e fazemos uma medida sobre a partícula 1 e encontramos S_z+, o sistema colapsa para $|S_z+;S_z-\rangle$, ou seja, a medida sobre a partícula 1, que aparentemente parece uma medida isolada, de fato, é uma medida no sistema todo.

Princípio de Localidade de Einstein e Desigualdade de Bell

Einstein não abria mão do seguinte:

"A situação real do sistema 2 é independente do que é feito no sistema 1, quando eles estão espacialmente separados".

Isto ficou conhecido como o paradoxo de Einstein-Podolsky-Rosen. Para tentar resolver esse assunto alguns cientistas tentaram atribuir as dificuldades encontradas nas interpretações probabilísticas da Mecânica Quântica à parâmetros desconhecidos (as chamadas variáveis escondidas). Até 1964, tais teorias alternativas previam as mesmas coisas que a Mecânica Quântica e nada mais. Até uma proposta de experimento feita por J. S. Bell, como veremos a seguir.

Medidas de Correlação de Spin e Desigualdade de Bell

Foi J. S. Bell que descobriu que esta teorias alternativas, baseadas no princípio de localidade de Einstein, de fato, predizem uma relação de desigualdade, testável, e em desacordo com a Mecânica Quântica. Para derivar a desigualdade de Bell, utilizaremos um modelo bolado por E. P. Wigner que descreveremos a seguir. Mesmo sabendo que S_x e S_z não podem ser determinados simultaneamente, eles pensaram em classificar as partículas por aquilo que esperam delas, isto é:

Suponha que no feixe existam partículas que: $\begin{cases} \text{Medindo } S_z, \text{ obtemos } + \\ \text{Medindo } S_x, \text{ obtemos } - \end{cases}$

Estas partículas pertencem ao tipo $(\hat{\mathbf{z}}+, \hat{\mathbf{x}}-)$. Isto não significa que podemos medir S_z e S_x. Apenas uma delas, mas se medirmos S_z, obteremos + e se medirmos S_x, obteremos -. É importante que o spin total seja zero (singleto).

	Partícula 1	Partícula 2
(a)	$(\hat{\mathbf{z}}+, \hat{\mathbf{x}}-)$	$(\hat{\mathbf{z}}-, \hat{\mathbf{x}}+)$
(b)	$(\hat{\mathbf{z}}+, \hat{\mathbf{x}}+)$	$(\hat{\mathbf{z}}-, \hat{\mathbf{x}}-)$
(c)	$(\hat{\mathbf{z}}-, \hat{\mathbf{x}}+)$	$(\hat{\mathbf{z}}+, \hat{\mathbf{x}}-)$
(d)	$(\hat{\mathbf{z}}-, \hat{\mathbf{x}}-)$	$(\hat{\mathbf{z}}+, \hat{\mathbf{x}}+)$

Note que todos os resultados previstos aqui, estão previstos pela MQ; com uma vantagem: Para um par de partículas pertencente ao tipo (a), se um observador medir S_z da partícula 1, ele vai obter + independente se B medir S_z ou S_x.

Medidas de Correlação de Spin e Desigualdade de Bell

Foi neste sentido que o princípio de localidade de Einstein foi incorporado: O resultado de A é predeterminado, independentemente da escolha de B sobre o que medir. As coisas pareciam ir no sentido imposto por Einstein em respeito ao princípio de localidade. Para explorar o assunto, considere um exemplo mais complicado: 3 vetores $\hat{\mathbf{a}}$, $\hat{\mathbf{b}}$, e $\hat{\mathbf{c}}$, não necessariamente ortogonais. Uma partícula de um certo tipo seria:

$$(\hat{\mathbf{a}}-,\ \hat{\mathbf{b}}+,\ \hat{\mathbf{c}}+) \text{ que significa: } \begin{cases} \text{Se } \mathbf{S}.\hat{\mathbf{a}} \text{ é medido } \Longrightarrow \text{ encontra-se } - \\ \\ \text{Se } \mathbf{S}.\hat{\mathbf{b}} \text{ é medido } \Longrightarrow \text{ encontra-se } + \\ \\ \text{Se } \mathbf{S}.\hat{\mathbf{c}} \text{ é medido } \Longrightarrow \text{ encontra-se } + \end{cases}$$

Note que a outra partícula precisa corresponder à $(\hat{\mathbf{a}}+,\ \hat{\mathbf{b}}-,\ \hat{\mathbf{c}}-)$ para assegurar o valor zero para a componente do momento angular medida do sistema. Para obter a desigualdade de Bell, vamos construir uma tabela de possíveis resultados de medidas deste novo cenário.

Medidas de Correlação de Spin e Desigualdade de Bell

População	Partícula 1	Particula 2
N_1	$(\hat{\mathbf{a}}+,\ \hat{\mathbf{b}}+,\ \hat{\mathbf{c}}+)$	$(\hat{\mathbf{a}}-,\ \hat{\mathbf{b}}-,\ \hat{\mathbf{c}}-)$
N_2	$(\hat{\mathbf{a}}+,\ \hat{\mathbf{b}}+,\ \hat{\mathbf{c}}-)$	$(\hat{\mathbf{a}}-,\ \hat{\mathbf{b}}-,\ \hat{\mathbf{c}}+)$
N_3	$(\hat{\mathbf{a}}+,\ \hat{\mathbf{b}}-,\ \hat{\mathbf{c}}+)$	$(\hat{\mathbf{a}}-,\ \hat{\mathbf{b}}+,\ \hat{\mathbf{c}}-)$
N_4	$(\hat{\mathbf{a}}+,\ \hat{\mathbf{b}}-,\ \hat{\mathbf{c}}-)$	$(\hat{\mathbf{a}}-,\ \hat{\mathbf{b}}+,\ \hat{\mathbf{c}}+)$
N_5	$(\hat{\mathbf{a}}-,\ \hat{\mathbf{b}}+,\ \hat{\mathbf{c}}+)$	$(\hat{\mathbf{a}}+,\ \hat{\mathbf{b}}-,\ \hat{\mathbf{c}}-)$
N_6	$(\hat{\mathbf{a}}-,\ \hat{\mathbf{b}}+,\ \hat{\mathbf{c}}-)$	$(\hat{\mathbf{a}}+,\ \hat{\mathbf{b}}-,\ \hat{\mathbf{c}}+)$
N_7	$(\hat{\mathbf{a}}-,\ \hat{\mathbf{b}}-,\ \hat{\mathbf{c}}+)$	$(\hat{\mathbf{a}}+,\ \hat{\mathbf{b}}+,\ \hat{\mathbf{c}}-)$
N_8	$(\hat{\mathbf{a}}-,\ \hat{\mathbf{b}}-,\ \hat{\mathbf{c}}-)$	$(\hat{\mathbf{a}}+,\ \hat{\mathbf{b}}+,\ \hat{\mathbf{c}}+)$

$$\text{Suponha que} \begin{cases} \mathbf{S_1}.\hat{\mathbf{a}} \text{ dê } + \\ \\ \mathbf{S_2}.\hat{\mathbf{b}} \text{ dê } + \end{cases} \Longrightarrow \text{tipos} \begin{cases} 3 \\ \text{ou} \\ 4 \end{cases}$$

Assim o número de pares de partículas para o qual esta situação pode acontecer é $N_3 + N_4$. Como $N_i \geq 0$, temos:

$$N_3 + N_4 \leq \underbrace{N_3 + \overbrace{N_4 + N_2}^{\mathbf{S_1}.\hat{\mathbf{a}}+ \text{ e } \mathbf{S_2}.\hat{\mathbf{c}}+} + N_7}_{\mathbf{S_1}.\hat{\mathbf{c}}+ \text{ e } \mathbf{S_2}.\hat{\mathbf{b}}+}$$

Medidas de Correlação de Spin e Desigualdade de Bell

Isto permite escrever as probabilidades $\begin{cases} \frac{N_3+N_4}{\sum_1^8 N_i} = \mathcal{P}(\hat{\mathbf{a}}+;\hat{\mathbf{b}}+) \\ \\ \frac{N_3+N_7}{\sum_1^8 N_i} = \mathcal{P}(\hat{\mathbf{c}}+;\hat{\mathbf{b}}+) \\ \\ \frac{N_2+N_4}{\sum_1^8 N_i} = \mathcal{P}(\hat{\mathbf{a}}+;\hat{\mathbf{c}}+) \end{cases}$

Da expressão do slide anterior: $N_3 + N_4 \leq N_3 + N_4 + N_2 + N_7,$ obtemos a chamada desigualdade de Bell:

$$\underbrace{\mathcal{P}(\hat{\mathbf{a}}+;\hat{\mathbf{b}}+)}_{\frac{N_3+N_4}{\sum_1^8 N_i}} \leq \underbrace{\mathcal{P}(\hat{\mathbf{c}}+;\hat{\mathbf{b}}+)}_{\frac{N_3+N_7}{\sum_1^8 N_i}} + \underbrace{\mathcal{P}(\hat{\mathbf{a}}+;\hat{\mathbf{c}}+)}_{\frac{N_2+N_4}{\sum_1^8 N_i}}$$

Em seguida, vamos calcular estas probabilidades segundo as regras da Mecânica Quântica e verificar se a desigualdade continua valendo.

Mas antes, é preciso responder: e se o estado inicial tivesse 4 direções, o que mudaria? e se fosse um contínuo de direções?

lousa

Medidas de Correlação de Spin e Desigualdade de Bell

População	Partícula 1	Particula 2
N_1	$(\hat{\mathbf{a}}+,\ \hat{\mathbf{b}}+,\ \hat{\mathbf{c}}+)$	$(\hat{\mathbf{a}}-,\ \hat{\mathbf{b}}-,\ \hat{\mathbf{c}}-)$
N_2	$(\hat{\mathbf{a}}+,\ \hat{\mathbf{b}}+,\ \hat{\mathbf{c}}-)$	$(\hat{\mathbf{a}}-,\ \hat{\mathbf{b}}-,\ \hat{\mathbf{c}}+)$
N_3	$(\hat{\mathbf{a}}+,\ \hat{\mathbf{b}}-,\ \hat{\mathbf{c}}+)$	$(\hat{\mathbf{a}}-,\ \hat{\mathbf{b}}+,\ \hat{\mathbf{c}}-)$
N_4	$(\hat{\mathbf{a}}+,\ \hat{\mathbf{b}}-,\ \hat{\mathbf{c}}-)$	$(\hat{\mathbf{a}}-,\ \hat{\mathbf{b}}+,\ \hat{\mathbf{c}}+)$
N_5	$(\hat{\mathbf{a}}-,\ \hat{\mathbf{b}}+,\ \hat{\mathbf{c}}+)$	$(\hat{\mathbf{a}}+,\ \hat{\mathbf{b}}-,\ \hat{\mathbf{c}}-)$
N_6	$(\hat{\mathbf{a}}-,\ \hat{\mathbf{b}}+,\ \hat{\mathbf{c}}-)$	$(\hat{\mathbf{a}}+,\ \hat{\mathbf{b}}-,\ \hat{\mathbf{c}}+)$
N_7	$(\hat{\mathbf{a}}-,\ \hat{\mathbf{b}}-,\ \hat{\mathbf{c}}+)$	$(\hat{\mathbf{a}}+,\ \hat{\mathbf{b}}+,\ \hat{\mathbf{c}}-)$
N_8	$(\hat{\mathbf{a}}-,\ \hat{\mathbf{b}}-,\ \hat{\mathbf{c}}-)$	$(\hat{\mathbf{a}}+,\ \hat{\mathbf{b}}+,\ \hat{\mathbf{c}}+)$

Na Mecânica Quântica, conhecendo o estado do sistema

$$|\text{singleto}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|\hat{\mathbf{z}}+;\hat{\mathbf{z}}-\rangle - |\hat{\mathbf{z}}-;\hat{\mathbf{z}}+\rangle\big)$$

é possível calcular cada uma das probabilidades que aparecem na desigualdade de Bell.

Coisas do tipo: $\mathcal{P}(\hat{\mathbf{a}}+;\hat{\mathbf{b}}+) = \big|\langle\hat{\mathbf{a}}+,\hat{\mathbf{b}}+|\text{singleto}\rangle\big|^2$

Medidas de Correlação de Spin e Desigualdade de Bell

Para facilitar, vamos escrever o estado:

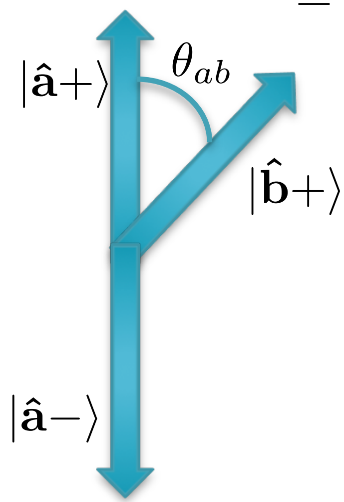
$$|\text{singleto}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|\hat{\mathbf{z}}+;\hat{\mathbf{z}}-\rangle - |\hat{\mathbf{z}}-;\hat{\mathbf{z}}+\rangle\big) = e^{i\text{fase}}\frac{1}{\sqrt{2}}\big(|\hat{\mathbf{a}}+;\hat{\mathbf{a}}-\rangle - |\hat{\mathbf{a}}-;\hat{\mathbf{a}}+\rangle\big)$$

pois, como já vimos, eles diferem da definição de singleto apenas por uma fase.

Assim, podemos escrever a primeira das probabilidades como:

$$\mathcal{P}(\hat{\mathbf{a}}+;\hat{\mathbf{b}}+) = \frac{1}{2}\Big|\langle\hat{\mathbf{a}}+,\hat{\mathbf{b}}+|\hat{\mathbf{a}}+;\hat{\mathbf{a}}-\rangle - \langle\hat{\mathbf{a}}+,\hat{\mathbf{b}}+|\hat{\mathbf{a}}-;\hat{\mathbf{a}}+\rangle\Big|^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\Big|\langle\hat{\mathbf{b}}+|\hat{\mathbf{a}}-\rangle\Big|^2$$



Já fizemos isso antes: rodamos o spinor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ para obter um autoket

de $\mathbf{S}.\hat{\mathbf{n}}$ com $\hat{\mathbf{n}} \equiv (\theta=\beta, \varphi=\alpha) \Longrightarrow \chi = \begin{pmatrix} \cos\beta/2 e^{-i\alpha/2} \\ \sin\beta/2 e^{+i\alpha/2} \end{pmatrix}.$

Medidas de Correlação de Spin e Desigualdade de Bell

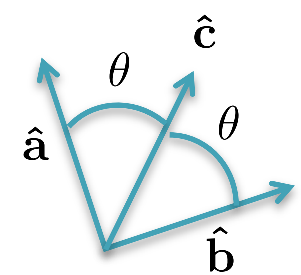
Tomemos $|\hat{\mathbf{a}}+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $|\hat{\mathbf{a}}-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; e $|\hat{\mathbf{b}}+\rangle = \chi$, com $\alpha = 0$ e $\beta = \theta_{ab}$.

Isto torna $|\hat{\mathbf{b}}+\rangle = \begin{pmatrix} \cos\theta_{ab}/2 \\ \sin\theta_{ab}/2 \end{pmatrix}$ e permite o cálculo de

$$\mathcal{P}(\hat{\mathbf{a}}+, \hat{\mathbf{b}}+) = \frac{1}{2}\left|\langle\hat{\mathbf{b}}+|\hat{\mathbf{a}}-\rangle\right|^2 = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} \cos\theta_{ab}/2 & \sin\theta_{ab}/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|^2 = \frac{1}{2}\sin^2\theta_{ab}/2$$

Analogamente, obtemos:

$$\mathcal{P}(\hat{\mathbf{a}}+, \hat{\mathbf{c}}+) = \frac{1}{2}\sin^2\theta_{ac}/2 \text{ e } \mathcal{P}(\hat{\mathbf{c}}+, \hat{\mathbf{b}}+) = \frac{1}{2}\sin^2\theta_{bc}/2$$



o que permite escrever a desigualdade de Bell como:

$$\frac{1}{2}\sin^2\theta_{ab}/2 \leq \frac{1}{2}\sin^2\theta_{ac}/2 + \frac{1}{2}\sin^2\theta_{bc}/2$$

Por simplicidade, tome $\theta_{ab} = 2\theta; \theta_{ac} = \theta$ e $\theta_{bc} = \theta$, conforme a figura.

Isto implicaria em $\sin^2\theta \leq 2\sin^2\theta/2$

Será que esta expressão está correta $\forall\theta$?

Medidas de Correlação de Spin e Desigualdade de Bell

Vamos verificar se $\sin^2\theta \leq 2\sin^2\theta/2$ está correta $\forall\theta$.

Como $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta \rightarrow \sin\theta = 2\sin\theta/2\cos\theta/2$ e isso faz com que

$$4\sin^2\theta/2\cos^2\theta/2 \leq 2\sin^2\theta/2 \rightarrow 4\sin^2\theta/2(1-\sin^2\theta/2) \leq 2\sin^2\theta/2$$

$$-4\sin^4\theta/2 + 2\sin^2\theta/2 \leq 0 \rightarrow \underbrace{-2\sin^2\theta/2}_{\text{sempre negativo}}\underbrace{\left(2\sin^2\theta/2 - 1\right)}_{\text{Para violar basta } 2\sin^2\theta/2-1<0} \leq 0$$

Ou seja, para violar a desigualdade de Bell, basta que no intervalo de definição de θ, ou seja, em $0 \leq \theta \leq \pi$, existam valores de θ que satisfaçam

$$\sin^2\theta/2 < \frac{1}{2} \Longrightarrow \begin{cases} 0 < \theta/2 < \pi/4 \Longrightarrow 0 < \theta < \pi/2 \\ 3\pi/4 < \theta/2 < \pi \Longrightarrow 3\pi/2 < \theta < 2\pi \ \text{(fora do intervalo)} \end{cases}$$

Mecânica Quântica viola a desigualdade de Bell e muitas $\overbrace{\text{experiências}}^{\text{Voluntários?}}$ também! Para ser historicamente correto, o artigo original de Einstein-Podolky-Rosen lidava com medidas de x e p. Compostos de spin $1/2 \rightarrow$ D. Bohm.

Voluntário?

De volta ao slide 4 (onde escrevemos):

A medida de B parece depender da medida de A, independente da distância d entre os dois experimentos. Considerando que informação viaja com a velocidade máxima c (velocidade da luz), isto é perturbador. Será que conseguiríamos montar um experimento onde B soubesse o que A mediu em um intervalo de tempo inferior a d/c após a medida de A?

Para tratar essa questão, suponha que A e B possam medir nas direções x e z.

- Segundo a Mecânica Quântica que estudamos, se A não medisse, o que B poderia encontrar? B pode encontrar $\begin{cases} \pm\hbar/2 \text{ na direção } x \\ \quad\text{ou} \\ \pm\hbar/2 \text{ na direção } z \end{cases}$

  Qualquer experimento que você imagine que A possa fazer, B encontrará um desses quatro resultados, ou seja, B não conseguiria dizer nem mesmo se A fez algum experimento. E mesmo que combinasse com A de fazer os experimentos simultaneamente, B não teria certeza que A honrou a palavra, ou ainda, se mudou a orientação de seu experimento.

  O experimento de B não viola a relatividade especial, pois, apesar do colapso ser instantâneo, ele não carrega nenhuma informação de A para B (muito menos acima da velocidade da luz).

Slide 10

População	Partícula 1	Particula 2
N_1	$(\hat{a}+,\ \hat{b}+,\ \hat{c}+,\ \hat{d}+)$	$(\hat{a}-,\ \hat{b}-,\ \hat{c}-,\ \hat{d}-)$
N_2	$(\hat{a}+,\ \hat{b}+,\ \hat{c}-,\ \hat{d}+)$	$(\hat{a}-,\ \hat{b}-,\ \hat{c}+,\ \hat{d}-)$
N_3	$(\hat{a}+,\ \hat{b}-,\ \hat{c}+,\ \hat{d}+)$	$(\hat{a}-,\ \hat{b}+,\ \hat{c}-,\ \hat{d}-)$
N_4	$(\hat{a}+,\ \hat{b}-,\ \hat{c}-,\ \hat{d}+)$	$(\hat{a}-,\ \hat{b}+,\ \hat{c}+,\ \hat{d}-)$
N_5	$(\hat{a}-,\ \hat{b}+,\ \hat{c}+,\ \hat{d}+)$	$(\hat{a}+,\ \hat{b}-,\ \hat{c}-,\ \hat{d}-)$
N_6	$(\hat{a}-,\ \hat{b}+,\ \hat{c}-,\ \hat{d}+)$	$(\hat{a}+,\ \hat{b}-,\ \hat{c}+,\ \hat{d}-)$
N_7	$(\hat{a}-,\ \hat{b}-,\ \hat{c}+,\ \hat{d}+)$	$(\hat{a}+,\ \hat{b}+,\ \hat{c}-,\ \hat{d}-)$
N_8	$(\hat{a}-,\ \hat{b}-,\ \hat{c}-,\ \hat{d}+)$	$(\hat{a}+,\ \hat{b}+,\ \hat{c}+,\ \hat{d}-)$
N_1	$(\hat{a}+,\ \hat{b}+,\ \hat{c}+,\ \hat{d}-)$	$(\hat{a}-,\ \hat{b}-,\ \hat{c}-,\ \hat{d}+)$
N_2	$(\hat{a}+,\ \hat{b}+,\ \hat{c}-,\ \hat{d}-)$	$(\hat{a}-,\ \hat{b}-,\ \hat{c}+,\ \hat{d}+)$
N_3	$(\hat{a}+,\ \hat{b}-,\ \hat{c}+,\ \hat{d}-)$	$(\hat{a}-,\ \hat{b}+,\ \hat{c}-,\ \hat{d}+)$
N_4	$(\hat{a}+,\ \hat{b}-,\ \hat{c}-,\ \hat{d}-)$	$(\hat{a}-,\ \hat{b}+,\ \hat{c}+,\ \hat{d}+)$
N_5	$(\hat{a}-,\ \hat{b}+,\ \hat{c}+,\ \hat{d}-)$	$(\hat{a}+,\ \hat{b}-,\ \hat{c}-,\ \hat{d}+)$
N_6	$(\hat{a}-,\ \hat{b}+,\ \hat{c}-,\ \hat{d}-)$	$(\hat{a}+,\ \hat{b}-,\ \hat{c}+,\ \hat{d}+)$
N_7	$(\hat{a}-,\ \hat{b}-,\ \hat{c}+,\ \hat{d}-)$	$(\hat{a}+,\ \hat{b}+,\ \hat{c}-,\ \hat{d}+)$
N_8	$(\hat{a}-,\ \hat{b}-,\ \hat{c}-,\ \hat{d}-)$	$(\hat{a}+,\ \hat{b}+,\ \hat{c}+,\ \hat{d}+)$

Lousa

De olho no mesmo experimento, envolvendo as direções $\hat{a}, \hat{b}$ e $\hat{c}$, note que os N_i dobraram: N_i com $\hat{d}+$, N_i com $\hat{d}-$. As probabilidades continuam as mesmas. Fator 2 no numerador e no denominador