

# Operadores Tensoriais

Aprendemos a rodar kets e componentes de vetores (operadores vetoriais)

$$|\alpha\rangle \longrightarrow D(R)|\alpha\rangle \implies \langle\alpha|D^\dagger(R)V_iD(R)|\alpha\rangle = \underbrace{\sum_j R_{ij}\langle\alpha|V_j|\alpha\rangle}_{\text{roda como vetores clássicos}}$$

roda como vetores clássicos

Como vale para qualquer  $|\alpha\rangle$ , temos:

$$D^\dagger(R)V_iD(R) = \sum_j R_{ij}V_j \quad \text{e com}$$

auxílio de  $D(R) = 1 - i\epsilon \frac{\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}}}{\hbar}$ , é possível obter:  $[V_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}\hbar V_k \rightarrow$  *para isso, seguiremos passos semelhantes ao que foi feito para  $[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}\hbar J_k$ .*

Podemos escrever a equação da caixa azul com auxílio da equação da caixa vermelha, por (até primeira ordem em  $\epsilon$ ):

$$V_i + \frac{\epsilon}{i\hbar}[V_i, \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}}] = \sum_j R_{ij}(\hat{\mathbf{n}}; \epsilon)V_j$$

[lousa](#)

Tomemos o caso particular  $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{z}} \implies R(\hat{\mathbf{z}}, \epsilon) = \begin{pmatrix} 1 & -\epsilon & 0 \\ \epsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

## Operadores Tensoriais

Neste caso, temos 
$$\begin{cases} i = 1 : V_x + \frac{\epsilon}{i\hbar} [V_x, J_z] = V_x - \epsilon V_y \\ i = 2 : V_y + \frac{\epsilon}{i\hbar} [V_y, J_z] = \epsilon V_x + V_y \\ i = 3 : V_z + \frac{\epsilon}{i\hbar} [V_z, J_z] = V_z \end{cases} \Rightarrow [V_i, J_3] = i\epsilon_{i3k} \hbar V_k$$

Brinque com a fórmula.  
Tome  $\mathbf{V}=\mathbf{p}$  e  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{J}=\mathbf{L}$

Com  $R(\hat{\mathbf{x}}, \epsilon)$  e  $R(\hat{\mathbf{y}}, \epsilon)$ , obtemos a fórmula geral da caixa amarela do slide 1. O comportamento de  $\mathbf{V}$  sob rotação finita é completamente definido pelas regras de comutação acima, usando:

$$\exp\left(\frac{iJ_j\phi}{\hbar}\right) V_i \exp\left(-\frac{iJ_j\phi}{\hbar}\right) \text{ se soubermos } [J_j, [J_j, [\dots [J_j, V_i] \dots]]].$$

Verifique que sabemos calcular isso

É possível generalizar  $V_i \rightarrow \sum_j R_{ij} V_j$  e definir um tensor por:

$$T \dots ijk \dots \rightarrow \sum \dots R_{ii'} R_{jj'} R_{kk'} \dots T \dots i'j'k' \dots$$

com ajuda da matriz ortogonal de rotação  $R(3 \times 3)$ . O número de índices é chamado de “rank” do tensor. E o tensor definido desta forma é conhecido como tensor cartesiano.

Exemplo simples:  $T_{ij} = U_i V_j$  onde  $U_i$  e  $V_j$  são componentes de operadores vetoriais que podem ou não comutar entre si. Note 9 pares possíveis.

# Operadores Tensoriais

Explorando o exemplo simples:

$$U_i V_j = \underbrace{\frac{\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}}{3} \delta_{ij}}_{\substack{\text{um} \\ \text{escalar} \\ \downarrow}} + \underbrace{\frac{U_i V_j - U_j V_i}{2}}_{\substack{\text{vetor} \\ (U \times V)_k \epsilon_{ijk} \\ \downarrow}} + \underbrace{\left( \frac{U_i V_j + U_j V_i}{2} - \frac{\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}}{3} \delta_{ij} \right)}_{\substack{\text{matriz simétrica} \\ \text{traço zero} \\ \downarrow}}$$

Transforma como:  $Y_0^0$                        $Y_1^m$                        $Y_2^m$

lousa

Tensores esféricos irreduzíveis,

onde:  $\begin{cases} Y_0^0 \rightarrow \text{tem 1 componente independente} \\ Y_1^m \rightarrow \text{tem 3 componentes independentes} \\ Y_2^m \rightarrow \text{tem 5 componentes independentes.} \end{cases}$

**Definição de um tensor esférico:**

Comece com  $Y_\ell^m(\theta, \varphi) = Y_\ell^m(\hat{\mathbf{n}})$  e troque  $\begin{cases} \hat{\mathbf{n}} \text{ por } \mathbf{V} = (V_x, V_y, V_z) \\ \ell \text{ por } k \text{ (ordem)} \\ m \text{ por } q \text{ (momento quântico)} \\ \text{magnético} \end{cases}$

e obtenha  $T_q^{(k)} = Y_{\ell=k}^{m=q}(\mathbf{V})$

# Operadores Tensoriais

Assim, considere:  $\hat{\mathbf{n}} = (n_x, n_y, n_z) = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right) \implies (V_x, V_y, V_z)$

Comece com  $Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{z}{r} \implies T_0^{(1)} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} V_z$

Já  $Y_1^{\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm i\varphi} = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta (\cos \varphi \pm i \sin \varphi) =$   
 $= \mp \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{\sin \theta \cos \varphi \pm i \sin \theta \sin \varphi}{\sqrt{2}} = \mp \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \left(\frac{x \pm iy}{\sqrt{2}r}\right)$

$\therefore T_{\pm 1}^{(1)} = \mp \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{V_x \pm iV_y}{\sqrt{2}}$

De forma semelhante, obtemos:

$Y_2^{\pm 2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \frac{(x \pm iy)^2}{r^2} \implies T_{\pm 2}^{(2)} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} (V_x \pm iV_y)^2$

faça  $\left\{ \begin{array}{l} Y_2^{\pm 2} \implies T_{\pm 2}^{(2)} \\ Y_2^{\pm 1} \implies T_{\pm 1}^{(2)} \\ Y_2^0 \implies T_0^{(2)} \end{array} \right.$  **Voluntário?**

# Operadores Tensoriais

Revisando  $Y_\ell^m(\theta, \varphi)$  sob rotações

$$|\hat{\mathbf{n}}\rangle \implies D(R)|\hat{\mathbf{n}}\rangle \equiv |\hat{\mathbf{n}}'\rangle$$

Lembre que  $Y_\ell^m(\hat{\mathbf{n}}') = \langle \hat{\mathbf{n}}' | \ell m \rangle$  e escreva  $Y_\ell^m(\hat{\mathbf{n}}')$  em função dos  $Y_\ell^m(\hat{\mathbf{n}})$ . Como?

$$D(R^{-1})|\ell m\rangle = \sum_{m'} |\ell m'\rangle \langle \ell m' | D(R^{-1}) | \ell m \rangle = \sum_{m'} |\ell m'\rangle \mathcal{D}_{m'm}^\ell(R^{-1})$$

multiplique pela esquerda por:  $\langle \hat{\mathbf{n}} |$  e obtenha  $\langle \hat{\mathbf{n}} | D(R^{-1}) | \ell m \rangle = \langle \hat{\mathbf{n}}' | \ell m \rangle =$   
 $= \sum_{m'} \langle \hat{\mathbf{n}} | \ell m' \rangle \mathcal{D}_{m'm}^\ell(R^{-1})$  onde usamos que  $\langle \hat{\mathbf{n}}' | = \langle \hat{\mathbf{n}} | D^\dagger(R) = \langle \hat{\mathbf{n}} | D(R^{-1})$

ou seja  $Y_\ell^m(\hat{\mathbf{n}}') = \sum_{m'} Y_\ell^{m'}(\hat{\mathbf{n}}) \mathcal{D}_{mm'}^{\ell*}(R)$

lousa

Um operador que age como um  $Y_\ell^m(\mathbf{V})$  deve respeitar:

$$D^\dagger(R) Y_\ell^m(\mathbf{V}) D(R) = \text{“} Y_\ell^m(\mathbf{V}') \text{”} = \sum_{m'} Y_\ell^{m'}(\mathbf{V}) \mathcal{D}_{mm'}^{\ell*}(R).$$

Isso permite definir o tensor esférico: → Caixa azul do slide 1: voluntário?

$$D^\dagger(R) T_q^{(k)} D(R) = \sum_{q'=-k}^k \mathcal{D}_{qq'}^{(k)*}(R) T_{q'}^{(k)} \text{ ou de forma}$$

equivalente (troque  $R$  por  $R^{-1}$ )  $D(R) T_q^{(k)} D^\dagger(R) = \sum_{q'=-k}^k \mathcal{D}_{q'q}^{(k)}(R) T_{q'}^{(k)}$

# Operadores Tensoriais

Para rotações infinitesimais a expressão  $D^\dagger(R)T_q^{(k)}D(R) = \sum_{q'=-k}^k \mathcal{D}_{qq'}^{(k)*}(R)T_{q'}^{(k)}$

fica:

$$\left(1 + i\epsilon \frac{\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}}}{\hbar}\right) T_q^{(k)} \left(1 - i\epsilon \frac{\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}}}{\hbar}\right) = \sum_{q'=-k}^k \mathcal{D}_{qq'}^{(k)*}(R) T_{q'}^{(k)} = \sum_{q'=-k}^k T_{q'}^{(k)} \langle kq' | 1 + i\epsilon \frac{\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}}}{\hbar} | kq \rangle$$

O termo de primeira ordem, fornece:

$$[\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}}, T_q^{(k)}] = \sum_{q'=-k}^k T_{q'}^{(k)} \langle kq' | \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} | kq \rangle$$

Se  $\begin{cases} \hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{z}} \implies [J_z, T_q^{(k)}] = \hbar q T_q^{(k)} \\ \hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{x}} \pm i\hat{\mathbf{y}} \text{ (faça em casa)} \implies [J_\pm, T_q^{(k)}] = \hbar \sqrt{(k \mp q)(k \pm q + 1)} T_{q\pm 1}^{(k)} \end{cases}$

# Produtos de Tensores

Comece por:  $T_0^{(0)} = -\frac{\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}}{3} = -\left(\frac{U_x V_x + U_y V_y + U_z V_z}{3}\right)$  com auxílio

da definição  $U_{\pm 1} \equiv \mp \left(\frac{U_x \pm iU_y}{\sqrt{2}}\right)$ , temos:  $U_{\pm 1} = \frac{\mp U_x - iU_y}{\sqrt{2}}$ , que pode ser

invertido:  $\begin{cases} U_x = \frac{U_{-1} - U_{+1}}{\sqrt{2}} \\ U_y = \frac{U_{-1} + U_{+1}}{-i\sqrt{2}} \end{cases}$  e ao definir  $U_0 \equiv U_z$ , podemos escrever:

$$T_0^{(0)} = -\frac{1}{3} \left( \frac{(U_{-1} - U_{+1})(V_{-1} - V_{+1})}{2} - \frac{(U_{-1} + U_{+1})(V_{-1} + V_{+1})}{2} + U_0 V_0 \right) =$$

$$= -\frac{1}{3} \left( \frac{U_{+1} V_{+1}}{2} - \frac{U_{+1} V_{+1}}{2} - \frac{U_{+1} V_{-1}}{2} - \frac{U_{+1} V_{-1}}{2} - \frac{U_{-1} V_{+1}}{2} - \frac{U_{+1} V_{-1}}{2} + \right.$$

$$\left. + \frac{U_{-1} V_{-1}}{2} - \frac{U_{-1} V_{-1}}{2} + U_0 V_0 \right) = \frac{1}{3} (U_{+1} V_{-1} + U_{-1} V_{+1} - U_0 V_0).$$

Verifique:

$$\begin{cases} T_q^{(1)} = \frac{(\mathbf{U} \times \mathbf{V})_q}{i\sqrt{2}} \\ T_{\pm 2}^{(2)} = U_{\pm 1} V_{\pm 1} \\ T_{\pm 1}^{(2)} = \frac{U_{\pm 1} V_0 + U_0 V_{\pm 1}}{\sqrt{2}} \\ T_0^{(2)} = \frac{U_{+1} V_{-1} + 2U_0 V_0 + U_{-1} V_{+1}}{\sqrt{6}} \end{cases}$$

Voluntários?

note:  $\begin{cases} Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} \frac{3z^2 - r^2}{r^2}, \text{ onde} \\ 3z^2 - r^2 = 2z^2 - (x^2 + y^2) = \\ = 2z^2 - 2\left(\frac{(x+iy)}{\sqrt{2}} \frac{(x-iy)}{\sqrt{2}}\right) \\ \text{caso especial de } T_0^{(2)} \text{ com} \\ \mathbf{U} = \mathbf{V} = \mathbf{r} \end{cases}$

## Teorema importante sobre tensores esféricos

### Teorema:

Sejam  $X_{q_1}^{(k_1)}$  e  $Z_{q_2}^{(k_2)}$  tensores esféricos irredutíveis de ordem  $k_1$  e  $k_2$ . Então

$$T_q^{(k)} = \sum_{q_1 q_2} \langle k_1 k_2; q_1 q_2 | k_1 k_2; k q \rangle X_{q_1}^{(k_1)} Z_{q_2}^{(k_2)}$$

é um tensor esférico de ordem  $k$ .

### Demonstração:

Para demonstrá-lo, basta verificar que  $T_q^{(k)}$  transforma de acordo com

$$D^\dagger(R) T_q^{(k)} D(R) = \sum_{q'=-k}^k \mathcal{D}_{qq'}^{(k)*} T_{q'}^{(k)}$$

$$D^\dagger(R) T_q^{(k)} D(R) = \sum_{q_1 q_2} \langle k_1 k_2; q_1 q_2 | k_1 k_2; k q \rangle D^\dagger(R) X_{q_1}^{(k_1)} \underbrace{D(R) D^\dagger(R)}_1 Z_{q_2}^{(k_2)} D(R) =$$

$$= \sum_{q_1 q_2 q'_1 q'_2} \langle k_1 k_2; q_1 q_2 | k_1 k_2; k q \rangle \mathcal{D}_{q_1 q'_1}^{(k_1)*} X_{q'_1}^{(k_1)} \mathcal{D}_{q_2 q'_2}^{(k_2)*} Z_{q'_2}^{(k_2)}, \text{ mas vimos que}$$

$$\mathcal{D}_{q_1 q'_1}^{(k_1)*} \mathcal{D}_{q_2 q'_2}^{(k_2)*} = \sum_{k'' q' q''} \langle k_1 k_2; q_1 q_2 | k_1 k_2; k'' q' \rangle \langle k_1 k_2; q'_1 q'_2 | k_1 k_2; k'' q' \rangle \mathcal{D}_{q'' q'}^{(k'')}$$

Tome o complexo conjugado e insira na expressão acima, para obter:



# Teorema importante sobre tensores esféricos

A nova expressão:

$$D^\dagger(R)T_q^{(k)}D(R) = \sum_{\substack{k''q'q'' \\ q_1q_2q'_1q'_2}} \overbrace{\langle k_1k_2; q_1q_2 | k_1k_2; kq \rangle}^{q_1 + q_2 = q} \overbrace{\langle k_1k_2; q_1q_2 | k_1k_2; k''q'' \rangle}^{q_1 + q_2 = q''} \cdot \delta_{qq''} \times \\ \times \langle k_1k_2; q'_1q'_2 | k_1k_2; k''q' \rangle \mathcal{D}_{q''q'}^{(k'')*} X_{q'}^{(k_1)} Z_{q'_2}^{(k_2)},$$

mas  $\sum_{q_1q_2} \langle k_1k_2; q_1q_2 | k_1k_2; kq \rangle \langle k_1k_2; q_1q_2 | k_1k_2; k''q'' \rangle$  pode ser re-escrito por

$$\sum_{q_1q_2} \langle k_1k_2; kq | k_1k_2; q_1q_2 \rangle \langle k_1k_2; q_1q_2 | k_1k_2; k''q'' \rangle = \langle k_1k_2; kq | k_1k_2; k''q'' \rangle = \delta_{kk''} \delta_{qq''}$$

De forma que:

$$D^\dagger(R)T_q^{(k)}D(R) = \sum_{q'} \left( \underbrace{\sum_{q'_1q'_2} \langle k_1k_2; q'_1q'_2 | k_1k_2; kq' \rangle X_{q'_1}^{(k_1)} Z_{q'_2}^{(k_2)}}_{T_{q'}^{(k)}} \right) \mathcal{D}_{qq'}^{(k)*} = \\ = \sum_{q'} T_{q'}^{(k)} \mathcal{D}_{qq'}^{(k)*} \quad \text{c.q.d.}$$

# Elementos de Matriz de Operadores Tensoriais e Teorema de Wigner-Eckart

O elemento de matriz  $\langle \alpha', j' m' | T_q^{(k)} | \alpha, j m \rangle$  é importante, pois entre outras coisas, pode expressar interações de campos eletromagnéticos com átomos e núcleos.

1) **Regra m de Seleção:**  $\langle \alpha', j' m' | T_q^{(k)} | \alpha, j m \rangle = 0$  salvo se  $m' = q + m$

**Demonstração:**

Para provar, basta lembrar que:  $[J_z, T_q^{(k)}] = \hbar q T_q^{(k)}$  e calcular o elemento de matriz:  $\langle \alpha', j' m' | ([J_z, T_q^{(k)}] - \hbar q T_q^{(k)}) | \alpha, j m \rangle = 0$  que implica em:

$$(m' - m - q) \hbar \langle \alpha', j' m' | T_q^{(k)} | \alpha, j m \rangle = 0,$$

ou seja se  $m' \neq m + q \rightarrow \langle \alpha', j' m' | T_q^{(k)} | \alpha, j m \rangle = 0$

2) **Teorema de Wigner-Eckart:**

não depende de  $m, m'$  e  $q$

$$\langle \alpha', j' m' | T_q^{(k)} | \alpha, j m \rangle = \underbrace{\langle j k; m q | j k; j' m' \rangle}_{\text{não depende de } T^{(k)}} \frac{\overbrace{\langle \alpha' j' || T^{(k)} || \alpha j \rangle}}{\sqrt{2j + 1}}$$

não depende de  $T^{(k)}$

onde  $|j - k| \leq j' \leq j + k$ .

## Teorema de Wigner-Eckart

## Demonstração:

Para provar isso, usaremos a relação:  $[J_{\pm}, T_q^{(k)}] = \hbar\sqrt{(k \mp q)(k \pm q + 1)}T_{q\pm 1}^{(k)}$  que pode ser usada em:

$$\langle \alpha', j' m' | [J_{\pm}, T_q^{(k)}] | \alpha, j m \rangle = \hbar\sqrt{(k \mp q)(k \pm q + 1)} \langle \alpha', j' m' | T_{q\pm 1}^{(k)} | \alpha, j m \rangle$$

para fornecer algo parecido com as relações de recorrência dos coeficientes de Clebsch-Gordan, isto é:

$$\begin{aligned} & \sqrt{(j' \pm m')(j' \mp m' + 1)} \langle \alpha', j' m' \mp 1 | T_q^{(k)} | \alpha, j m \rangle = \\ & = \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} \langle \alpha', j' m' | T_q^{(k)} | \alpha, j m \pm 1 \rangle + \\ & + \sqrt{(k \mp q)(k \pm q + 1)} \langle \alpha', j' m' | T_{q\pm 1}^{(k)} | \alpha, j m \rangle \end{aligned}$$

Compare com a fórmula de recorrência já demonstrada:

$$\begin{aligned} & \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} \langle j_1 j_2, m_1 m_2 | j_1 j_2, j m \pm 1 \rangle = \\ & = \sqrt{(j_1 \pm m_1)(j_1 \mp m_1 + 1)} \langle j_1 j_2, m_1 \mp 1 m_2 | j_1 j_2, j m \rangle + \\ & + \sqrt{(j_2 \pm m_2)(j_2 \mp m_2 + 1)} \langle j_1 j_2, m_1 m_2 \mp 1 | j_1 j_2, j m \rangle \end{aligned}$$

inverta o sinal de cima com o debaixo e

$$\text{troque: } \begin{cases} j \rightarrow j' & j_1 \rightarrow j & j_2 \rightarrow k \\ m \rightarrow m' & m_1 \rightarrow m & m_2 \rightarrow q \end{cases}$$

## Teorema de Wigner-Eckart

Para obter

$$\begin{aligned} \sqrt{(j' \pm m')(j' \mp m' + 1)} \langle jk, mq | jk, j'm' \mp 1 \rangle = \\ = \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} \langle jk, m \pm 1q | jk, j'm' \rangle + \\ + \sqrt{(k \mp q)(k \pm q + 1)} \langle jk, mq \pm 1 | jk, j'm' \rangle \end{aligned}$$

Assim, encontramos dois conjuntos de equações, tais que:

$$\begin{aligned} \sum a_{ij} \underbrace{x_j}_{\langle |T_q^{(k)}| \rangle} = 0 \qquad \sum a_{ij} \underbrace{y_j}_{\langle CG \rangle} = 0 \end{aligned}$$

e mesmos coeficientes  $a_{ij} \therefore x_j = cy_j \forall j$

$x_j$  e  $y_j$  dependem de  $m, m'$  e  $q$ , mas  $c$  não pode depender deles.

Pegue o 3o. termo

$$\langle \alpha', j'm' | T_{q \pm 1}^{(k)} | \alpha, jm \rangle = c \langle jk, mq \pm 1 | jk, j'm' \rangle \text{ troque } q \pm 1 \text{ por } q$$

e terminamos nossa demonstração, escrevendo:

$$\langle \alpha', j'm' | T_q^{(k)} | \alpha, jm \rangle = \frac{\langle \alpha' j' || T^{(k)} || \alpha j \rangle}{\sqrt{2j+1}} \langle jk, mq | jk, j'm' \rangle$$

onde a barra dupla significa que este termo não depende de  $m, m'$  e  $q$ .

## Exemplos de uso do Teorema de Wigner-Eckart

**Exemplo 1:**  $T_0^{(0)} = S$

$$\langle \alpha', j' m' | T_q^{(k)} | \alpha, j m \rangle = \frac{\langle \alpha' j' || T^{(k)} || \alpha j \rangle}{\sqrt{2j+1}} \langle j k, m q | j k, j' m' \rangle$$

$$\langle \alpha', j' m' | S | \alpha, j m \rangle = \frac{\langle \alpha' j' || S || \alpha j \rangle}{\sqrt{2j+1}} \langle j 0, m 0 | j 0, j' m' \rangle \quad \therefore m' = m \text{ e } j' = j$$

$$\therefore \langle \alpha', j' m' | S | \alpha, j m \rangle = \frac{\langle \alpha' j' || S || \alpha j \rangle}{\sqrt{2j+1}} \delta_{j' j} \delta_{m' m}$$

o que permite concluir que  $S$  não transfere momento angular.

**Exemplo 2: Operador Vetorial**  $V_q^{(1)} \rightarrow (V_{-1}, V_0, V_{+1})$

$$\langle \alpha', j' m' | T_q^{(k)} | \alpha, j m \rangle = \frac{\langle \alpha' j' || T^{(k)} || \alpha j \rangle}{\sqrt{2j+1}} \langle j k, m q | j k, j' m' \rangle$$

$$\langle \alpha', j' m' | V_q^{(1)} | \alpha, j m \rangle = \frac{\langle \alpha' j' || V^{(1)} || \alpha j \rangle}{\sqrt{2j+1}} \underbrace{\langle j 1, m q | j 1, j' m' \rangle}$$

Note que  $\begin{matrix} m+q=m' \\ q=\pm 1 \text{ ou } 0 \end{matrix} \begin{cases} m' = m \pm 1 \\ \text{ou } m' = m \end{cases}$  e  $|j-1| \leq j' \leq j+1$  e  $\therefore j' = \begin{cases} j \pm 1 \\ j \end{cases}$

mas  $\begin{cases} \text{se } j=0 \rightarrow j'=1 \\ \text{e } j=0 \rightarrow j'=0 \\ \text{é proibido.} \end{cases}$  resumo  $\begin{cases} \Delta m = m' - m = \pm 1 \text{ ou } 0 \\ \Delta j = j' - j = \pm 1 \text{ ou } 0 \\ \text{mas } j=0 \rightarrow j'=0 \text{ (proibido)} \end{cases}$

## Teorema da Projeção

$$\langle \alpha', j' m' | V_q | \alpha, j m \rangle = \frac{\langle \alpha' j m | \mathbf{J} \cdot \mathbf{V} | \alpha j m \rangle}{\hbar^2 j(j+1)} \langle j m' | J_q | j m \rangle$$

Primeiro, é importante escrever  $\mathbf{J}$  como um tensor esférico cujas componentes serão definidas por  $(J_{-1}, J_0, J_{+1})$ , conforme havíamos definido.

$$\text{De } U_{+1} = -\frac{(U_x + iU_y)}{\sqrt{2}}; \quad U_{-1} = \frac{(U_x - iU_y)}{\sqrt{2}}; \quad U_0 = U_z, \text{ e } J_{\pm} = J_x \pm iJ_y,$$

$$\text{temos: } J_{\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} J_{\pm} \text{ e } J_0 = J_z \implies \mathbf{J} \cdot \mathbf{V} = J_z V_0 + \frac{1}{\sqrt{2}} J_+ V_{-1} - \frac{1}{\sqrt{2}} J_- V_{+1},$$

uma vez que:  $\mathbf{U} \cdot \mathbf{V} = U_0 V_0 - U_{+1} V_{-1} - U_{-1} V_{+1}$ . Feito isso, agora podemos

$$\text{escrever: } \langle \alpha', j m | \mathbf{J} \cdot \mathbf{V} | \alpha, j m \rangle = \langle \alpha', j m | J_z V_0 + \frac{1}{\sqrt{2}} J_+ V_{-1} - \frac{1}{\sqrt{2}} J_- V_{+1} | \alpha, j m \rangle =$$

$$= m\hbar \langle \alpha', j m | V_0 | \alpha, j m \rangle + \frac{\hbar}{2} \sqrt{(j+m)(j-m+1)} \langle \alpha', j m - 1 | V_{-1} | \alpha, j m \rangle +$$

$$- \frac{\hbar}{2} \sqrt{(j-m)(j+m+1)} \langle \alpha', j m + 1 | V_{+1} | \alpha, j m \rangle = c_{jm} \langle \alpha', j | |\mathbf{V}| | \alpha, j \rangle,$$

onde usamos o teorema de Wigner-Eckart. Note que  $c_{jm}$  não depende de  $\alpha', \alpha$  e  $V$ . Como  $\mathbf{J} \cdot \mathbf{V}$  é um escalar  $\langle |\mathbf{J} \cdot \mathbf{V}| \rangle$  não depende de  $m$ . Assim,  $\therefore c_{jm} = c_j$

## Teorema da Projeção

No slide anterior obtivemos:  $\langle \alpha', jm | \mathbf{J} \cdot \mathbf{V} | \alpha, jm \rangle = c_j \langle \alpha', j | \mathbf{V} | \alpha, j \rangle$ .

$\|\mathbf{V}\|$  não é um operador vetor, é o elemento de matriz reduzido, independe de  $m, m'$  e  $q$

Note que  $c_j$  não depende da escolha de  $\mathbf{V}$ . Tome, portanto,  $\mathbf{V} = \mathbf{J}$  e escreva para  $\alpha' = \alpha$ :  $\langle \alpha, jm | J^2 | \alpha, jm \rangle = c_j \langle \alpha, j | \mathbf{J} | \alpha, j \rangle$ . Dividindo uma expressão

pela outra, para se livrar de  $c_j$  temos:  $\frac{\langle \alpha', jm | \mathbf{J} \cdot \mathbf{V} | \alpha, jm \rangle}{\langle \alpha, jm | J^2 | \alpha, jm \rangle} = \frac{\langle \alpha', j | \mathbf{V} | \alpha, j \rangle}{\langle \alpha, j | \mathbf{J} | \alpha, j \rangle}$

Usando duas vezes o Teorema de Wigner-Eckart, uma para  $\langle \alpha', j | \mathbf{V} | \alpha, j \rangle$  e outra para  $\langle \alpha, j | \mathbf{J} | \alpha, j \rangle$ , tome a razão entre as expressões e note que os coeficientes são iguais e se cancelam. Assim, obtemos a fração:

$$\frac{\langle \alpha', j | \mathbf{V} | \alpha, j \rangle}{\langle \alpha, j | \mathbf{J} | \alpha, j \rangle} = \frac{\langle \alpha', jm' | V_q | \alpha, jm \rangle}{\langle \alpha, jm' | J_q | \alpha, jm \rangle}$$

que quando substituída na expressão

acima, demonstra o teorema da projeção:

$$\langle \alpha', jm' | V_q | \alpha, jm \rangle = \frac{\langle \alpha', jm | \mathbf{J} \cdot \mathbf{V} | \alpha, jm \rangle}{\hbar^2 j(j+1)} \langle jm' | J_q | jm \rangle,$$

onde usamos  $\begin{cases} \langle \alpha, jm | J^2 | \alpha, jm \rangle = \hbar^2 j(j+1) \\ \langle \alpha, jm' | J_q | \alpha, jm \rangle = \langle jm' | J_q | jm \rangle \end{cases}$



Slide 1

- Tome  $D(R) = 1 - i\epsilon \frac{\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}}}{\hbar}$  em  $D^\dagger(R)V_i D(R) = \sum_j R_{ij} V_j$

$$\left(1 - i\epsilon \frac{\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}}}{\hbar}\right)^\dagger V_i \left(1 - i\epsilon \frac{\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}}}{\hbar}\right) = \sum_j R_{ij}(\hat{\mathbf{n}}; \epsilon) V_j$$

$$\left(1 + i\epsilon \frac{\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}}}{\hbar}\right) V_i \left(1 - i\epsilon \frac{\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}}}{\hbar}\right) = \sum_j R_{ij}(\hat{\mathbf{n}}; \epsilon) V_j$$

$$V_i - \frac{\epsilon}{i\hbar} \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} V_i + V_i \frac{\epsilon}{i\hbar} \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} + O(\epsilon^2) = \sum_j R_{ij}(\hat{\mathbf{n}}; \epsilon) V_j$$

$$V_i + \frac{\epsilon}{i\hbar} [V_i, \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}}] = \sum_j R_{ij}(\hat{\mathbf{n}}; \epsilon) V_j$$

Slide 3

- Matriz simétrica:  $\left( \frac{U_i V_j + U_j V_i}{2} - \frac{\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}}{3} \delta_{ij} \right) =$

$$= \begin{pmatrix} \frac{U_1 V_1 + U_1 V_1}{2} - \frac{\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}}{3} \delta_{11} & \frac{U_1 V_2 + U_2 V_1}{2} & \frac{U_1 V_3 + U_3 V_1}{2} \\ \frac{U_2 V_1 + U_1 V_2}{2} & \frac{U_2 V_2 + U_2 V_2}{2} - \frac{\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}}{3} \delta_{22} & \frac{U_2 V_3 + U_3 V_2}{2} \\ \frac{U_3 V_1 + U_1 V_3}{2} & \frac{U_3 V_2 + U_2 V_3}{2} & \frac{U_3 V_3 + U_3 V_3}{2} - \frac{\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}}{3} \delta_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} U_1 V_1 - \frac{\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}}{3} & \frac{U_1 V_2 + U_2 V_1}{2} & \frac{U_1 V_3 + U_3 V_1}{2} \\ \frac{U_2 V_1 + U_1 V_2}{2} & U_2 V_2 - \frac{\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}}{3} & \frac{U_2 V_3 + U_3 V_2}{2} \\ \frac{U_3 V_1 + U_1 V_3}{2} & \frac{U_3 V_2 + U_2 V_3}{2} & U_3 V_3 - \frac{\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}}{3} \end{pmatrix} \rightarrow \text{Traço zero}$$



## Slide 5

Lembre que  $D(R^{-1}) = D^\dagger(R)$

$$\text{e } \therefore \langle \ell m' | D(R^{-1}) | \ell m \rangle = \langle \ell m' | D^\dagger(R) | \ell m \rangle = \langle \ell m | D(R) | \ell m' \rangle^* = \mathcal{D}_{mm'}^{\ell*}(R)$$

## Slide 15

Aplicaremos duas vezes o Teorema de Wigner-Eckart

$$\langle \alpha', j' m' | T_q^{(k)} | \alpha, j m \rangle = \frac{\langle \alpha' j' || T^{(k)} || \alpha j \rangle}{\sqrt{2j+1}} \langle j k, m q | j k, j' m' \rangle$$

onde a barra dupla significa que este termo não depende de  $m, m'$  e  $q$ .

Uma para  $V_q$

$$\langle \alpha', j' m' | V_q | \alpha, j m \rangle = \frac{\langle \alpha' j' || \mathbf{V} || \alpha j \rangle}{\sqrt{2j+1}} \langle j k, m q | j k, j' m' \rangle$$

Outra para  $J_q$

$$\langle \alpha', j' m' | J_q | \alpha, j m \rangle = \frac{\langle \alpha' j' || \mathbf{J} || \alpha j \rangle}{\sqrt{2j+1}} \langle j k, m q | j k, j' m' \rangle$$

Divide uma pela outra, para obter

$$\frac{\langle \alpha', j' m' | V_q | \alpha, j m \rangle}{\langle \alpha', j' m' | J_q | \alpha, j m \rangle} = \frac{\langle \alpha' j' || \mathbf{V} || \alpha j \rangle}{\langle \alpha' j' || \mathbf{J} || \alpha j \rangle}$$