

Simetria de Reversão Temporal na Mecânica Quântica

De $\begin{cases} \langle \beta | A | \alpha \rangle = \langle \tilde{\alpha} | \Theta A \Theta^{-1} | \tilde{\beta} \rangle \\ \text{e} \\ \exists A, \text{ tal que } \Theta A \Theta^{-1} = \pm A \end{cases}$ tiramos $\langle \beta | A | \alpha \rangle = \pm \langle \tilde{\alpha} | A | \tilde{\beta} \rangle = \pm \langle \tilde{\beta} | A | \tilde{\alpha} \rangle^*$

Se $|\beta\rangle = |\alpha\rangle$, temos: $\langle \alpha | A | \alpha \rangle = \langle \tilde{\alpha} | \Theta A \Theta^{-1} | \tilde{\alpha} \rangle = \pm \langle \tilde{\alpha} | A | \tilde{\alpha} \rangle^* = \pm \langle \tilde{\alpha} | A | \tilde{\alpha} \rangle$.

Caso 1: \mathbf{p}

De tudo que discutimos até agora, esperamos que $\langle \alpha | \mathbf{p} | \alpha \rangle = -\langle \tilde{\alpha} | \mathbf{p} | \tilde{\alpha} \rangle$, ou seja \mathbf{p} é um operador ímpar e $\therefore \Theta \mathbf{p} \Theta^{-1} = -\mathbf{p}$. Isto implica em

$$\underbrace{\mathbf{p}}_{-\Theta \mathbf{p} \Theta^{-1}} \Theta | \mathbf{p}' \rangle = -\Theta \mathbf{p} \underbrace{\Theta^{-1} \Theta}_{1} | \mathbf{p}' \rangle = -\Theta \mathbf{p} | \mathbf{p}' \rangle = -\mathbf{p}' \Theta | \mathbf{p}' \rangle$$

Ou seja $\Theta | \mathbf{p}' \rangle$ é um autoket do operador momento linear \mathbf{p} com autovalor $-\mathbf{p}'$. Assim, podemos escolher a fase e tomar $\Theta | \mathbf{p}' \rangle = | -\mathbf{p}' \rangle$.

Caso 2: \mathbf{x}

De forma semelhante, (apenas exija que $\langle \alpha | \mathbf{x} | \alpha \rangle = \langle \tilde{\alpha} | \mathbf{x} | \tilde{\alpha} \rangle$)

convença-se que $\begin{cases} \Theta \mathbf{x} \Theta^{-1} = \mathbf{x} \text{ operador par mediante reversão temporal} \\ \Theta | \mathbf{x}' \rangle = | \mathbf{x}' \rangle \text{ a menos de uma fase global} \end{cases}$

Simetria de Reversão Temporal na Mecânica Quântica

Caso 3: $[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$

Considere $[x_i, p_j]|\rangle = i\hbar\delta_{ij}|\rangle$, onde $|\rangle$ simboliza um ket arbitrário.

Aplice Θ pela esquerda em ambos os lados e insira a unidade no lado direito do $[x_i, p_j]$, isto é

$$\begin{aligned} \Theta[x_i, p_j]\Theta^{-1}\Theta|\rangle &= \Theta i\hbar\delta_{ij}|\rangle \implies [x_i, (-p_j)]\Theta|\rangle = -i\hbar\delta_{ij}\Theta|\rangle \\ &\implies [x_i, p_j]\Theta|\rangle = i\hbar\delta_{ij}\Theta|\rangle \\ &\implies [x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}, \text{ pois } \Theta|\rangle \text{ é arbitrário.} \end{aligned}$$

Note que esta relação de comutação é preservada sob reversão temporal porque Θ é antiunitário.

Caso 4: $[J_i, J_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}J_k$

Similarmente, para preservar esta relação, precisamos que \mathbf{J} seja ímpar sob reversão temporal. Isto é: $\Theta\mathbf{J}\Theta^{-1} = -\mathbf{J}$

Note que isto está consistente com o caso $\mathbf{J} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}$. Note também que obteríamos que \mathbf{J} é ímpar sob reversão temporal, se utilizássemos que Θ comuta com o operador de rotação.

Reversão temporal e funções de onda

Suponha que no instante $t = 0$ um sistema de uma partícula sem spin se encontra no estado $|\alpha\rangle$. Como vimos, sua função de onda $\langle \mathbf{x}' | \alpha \rangle$ aparece como coeficiente de expansão na representação das coordenadas:

$$|\alpha\rangle = \int d^3x' |\mathbf{x}'\rangle \langle \mathbf{x}' | \alpha \rangle$$

Aplicando o operador de reversão temporal Θ , temos:

$$\Theta|\alpha\rangle = \int d^3x' \Theta|\mathbf{x}'\rangle \langle \mathbf{x}' | \alpha \rangle = \int d^3x' |\mathbf{x}'\rangle \langle \mathbf{x}' | \alpha \rangle^*$$

Na expressão acima escolhemos a fase tal que $\Theta|\mathbf{x}'\rangle = |\mathbf{x}'\rangle$

E isso permite escrever $\psi(\mathbf{x}') \rightarrow \psi^*(\mathbf{x}')$, conforme previmos anteriormente.

Se a parte angular da função de onda for dada por uma harmônica esférica

$Y_\ell^m(\theta, \phi)$, teríamos: $Y_\ell^m(\theta, \phi) \rightarrow Y_\ell^{m*}(\theta, \phi) = (-1)^m Y_\ell^{-m}(\theta, \phi)$, e isso

permite escrever: $\Theta|\ell m\rangle = (-1)^m |\ell, -m\rangle$ → função real vezes $e^{im\phi}$

Note que se a função de onda for do tipo $R_{nl} Y_\ell^m(\theta, \phi)$, nós concluiríamos

que a densidade de corrente, $\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = \left(\frac{\hbar}{m}\right) \text{Im}(\psi^* \nabla \psi)$ flui no sentido contrário

do relógio (regra da mão direita) para $m > 0$. A reversão temporal, faz ela

fluir no sentido do relógio. Note também que $\text{Im}(\psi \nabla \psi^*) = -\text{Im}(\psi^* \nabla \psi)$,

ou seja $\mathbf{j}(\mathbf{x}, t)$ inverte o sinal sob reversão temporal.

$$\text{Im } c = -\text{Im } c^*$$



Reversão temporal e funções de onda

Teorema. Suponha uma Hamiltoniana invariante sob a reversão temporal e com espectro não-degenerado. As autofunções correspondentes são reais (ou de forma mais geral, uma função real vezes uma fator de fase independente de \mathbf{x}).

Demonstração. Para provar isso, primeiro note que

$$H\Theta|n\rangle = \Theta H|n\rangle = E_n \Theta|n\rangle,$$

ou seja $|n\rangle$ e $\Theta|n\rangle$ tem o mesmo autovalor de energia. A hipótese de espectro não degenerado, implica que $|n\rangle$ e $\Theta|n\rangle$ representam o mesmo estado e devem diferir por um fator de fase global (constante). Isso permite escrever:

$$\Theta|n\rangle = e^{i\delta}|n\rangle \implies \langle \mathbf{x}' | \Theta|n\rangle = e^{i\delta} \langle \mathbf{x}' | n\rangle \implies \langle \mathbf{x}' | n\rangle^* = e^{i\delta} \langle \mathbf{x}' | n\rangle \quad \text{c.q.d.}$$

Assim, uma função de onda de um estado ligado pode ser sempre feita real.

Você poderia reclamar que os estados ligados do átomo de hidrogênio são complexos, pois Y_ℓ^m são funções complexas. Isso não contradiz o teorema, pois E_n é degenerado ($|n, \ell, m\rangle$ e $|n, \ell, -m\rangle$ são ortogonais e correspondem à mesma energia E_n). Similarmente, as partículas livres são representadas por funções de onda complexas $e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}/\hbar}$. Isso também não contradiz o teorema, pois $e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}/\hbar}$ é ortogonal à $e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}/\hbar}$ e é autofunção de H_{livre} com o mesmo autovalor $p^2/2m$ (autovalor degenerado).

Reversão temporal e representação dos momentos

Vimos que na representação das coordenadas o efeito de $\Theta = UK$ aplicado à $|\alpha\rangle$ é o mesmo que o de K sozinho sobre $|\alpha\rangle$. Isto por que

$$\Theta|\alpha\rangle = \Theta \int d^3x' |\mathbf{x}'\rangle \langle \mathbf{x}'|\alpha\rangle = \int d^3x' |\mathbf{x}'\rangle \langle \mathbf{x}'|\alpha\rangle^* = K \int d^3x' |\mathbf{x}'\rangle \langle \mathbf{x}'|\alpha\rangle.$$

Isso não seria verdade se usássemos a representação dos momentos, pois:

$$\begin{aligned} \Theta|\alpha\rangle &= \Theta \int d^3p' |\mathbf{p}'\rangle \langle \mathbf{p}'|\alpha\rangle = \int d^3p' K |-\mathbf{p}'\rangle \langle \mathbf{p}'|\alpha\rangle = \int d^3p' |-\mathbf{p}'\rangle \langle \mathbf{p}'|\alpha\rangle^* \\ &= \int d^3p' |\mathbf{p}'\rangle \langle -\mathbf{p}'|\alpha\rangle^* \neq K \int d^3p' |\mathbf{p}'\rangle \langle \mathbf{p}'|\alpha\rangle = \int d^3p' |\mathbf{p}'\rangle \langle \mathbf{p}'|\alpha\rangle^* \end{aligned}$$

Ou seja, a forma de Θ depende da representação utilizada. Na representação dos momentos não basta tirar o complexo conjugado. É preciso trocar \mathbf{p}' por $-\mathbf{p}'$, isto é: $\langle \mathbf{p}'|\alpha\rangle = \phi_\alpha(\mathbf{p}') \rightarrow \langle -\mathbf{p}'|\alpha\rangle^* = \phi_\alpha^*(-\mathbf{p}')$.

Reversão temporal para um sistema de spin $1/2$

A situação fica ainda mais interessante para um sistema de spin $1/2$.

Para ver isso, lembre que $|\hat{\mathbf{n}}; +\rangle = e^{-iS_z\alpha/\hbar}e^{-iS_y\beta/\hbar}|+\rangle$, onde $\hat{\mathbf{n}}$, caracterizado pelos ângulos polar e azimutal β e α , é autoket de $\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}$ com autovalor $\hbar/2$. Sabemos aplicar Θ em $|\hat{\mathbf{n}}; +\rangle$, pois $\Theta\mathbf{J}\Theta^{-1} = -\mathbf{J}$.

[lousa](#)

Assim temos $\Theta|\hat{\mathbf{n}}; +\rangle = e^{-iS_z\alpha/\hbar}e^{-iS_y\beta/\hbar}\Theta|+\rangle = \eta|\hat{\mathbf{n}}; -\rangle$.

Mas, $|\hat{\mathbf{n}}; -\rangle = e^{-i\alpha S_z/\hbar}e^{-i(\pi+\beta)S_y/\hbar}|+\rangle = e^{-i\alpha S_z/\hbar}e^{-i(\pi+\beta)S_y/\hbar}K|+\rangle$.

[lousa](#)

O K aqui não tem efeito, mas foi inserido para lembrar que é preciso tomar o complexo conjugado de constantes que multiplicam os kets. Inserção dessa expressão e comparação direta nos leva à:

$$\Theta = \eta e^{-i\pi S_y/\hbar} K$$

Se lembrarmos que

$$\exp\left(\frac{-i\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}\phi}{\hbar}\right) = \exp\left(\frac{-i\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{n}}\phi}{2}\right) = \mathbb{1} \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - i\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{n}} \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)$$

Θ pode ser escrito na forma: $\Theta = -i\eta \frac{2S_y}{\hbar} K$ (tomei $\phi = \pi$, acima)

O exercício 4.7 da lista 6 pede para você demonstrar esta fórmula de uma outra maneira.

Reversão temporal para um sistema de spin $1/2$

Da expressão

$$\exp\left(\frac{-i\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}\phi}{\hbar}\right) = \exp\left(\frac{-i\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{n}}\phi}{2}\right) = \mathbb{1} \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - i\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{n}} \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)$$

com $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{y}}$, obtemos:

$$e^{-i\pi S_y/\hbar}|+\rangle = -i\frac{2S_y}{\hbar}|+\rangle = -i\frac{2(S_+ - S_-)}{2i\hbar}|+\rangle = \frac{S_-}{\hbar}|+\rangle = +|-\rangle$$

De forma similar, podemos obter $e^{-i\pi S_y/\hbar}|-\rangle = -|+\rangle$. Com isso podemos calcular o efeito de Θ em um ket genérico escrito na base $|\pm\rangle$:

$$\Theta(c_+|+\rangle + c_-|-\rangle) = +\eta c_+^*|-\rangle - \eta c_-^*|+\rangle$$

Se aplicarmos Θ de novo, obtemos:

$$\Theta^2(c_+|+\rangle + c_-|-\rangle) = \Theta(+\eta c_+^*|-\rangle - \eta c_-^*|+\rangle) = -(c_+|+\rangle + c_-|-\rangle) \text{ e } \therefore$$

para o caso de spin $1/2$, temos: $\Theta^2 = -1$ (que significa -1 vezes o operador identidade). Isso vale para qualquer que seja a orientação do spin e qualquer que seja a escolha de η .

Para partículas sem spin, vale $\Theta^2 = 1$,

$$\text{como pode ser visto por } \begin{cases} \Theta|\ell, m\rangle = (-1)^m|\ell, -m\rangle \\ \text{ou} \\ \Theta\psi(\mathbf{x}')|\mathbf{x}'\rangle = \psi^*(\mathbf{x}')|\mathbf{x}'\rangle \end{cases}$$

use $|\eta|^2 = 1$

Reversão temporal para um sistema de momento angular j

Queremos provar que
$$\begin{cases} \Theta^2 |j \text{ semi-inteiro}\rangle = -|j \text{ semi-inteiro}\rangle \\ \Theta^2 |j \text{ inteiro}\rangle = +|j \text{ inteiro}\rangle \end{cases}$$

Se verdade, o auto valor de Θ^2 poderia ser escrito como $(-1)^{2j}$. Para provar, comece com $\Theta = \eta e^{-i\pi J_y/\hbar} K$, aplique Θ^2 em um ket genérico $|\alpha\rangle$ e utilize o

operador unidade na base $\{|jm\rangle\}$. Isto é:
$$\begin{aligned} \Theta(\Theta \sum_{jm} |jm\rangle \langle jm|\alpha\rangle) &= \\ = \Theta(\eta e^{-i\pi J_y/\hbar} \sum_{jm} |jm\rangle \langle jm|\alpha\rangle^*) &= |\eta|^2 \underbrace{e^{-i2\pi J_y/\hbar}}_{\substack{\text{rotação de } 2\pi \\ \text{ao redor de } \hat{y}}} \sum_{jm} |jm\rangle \langle jm|\alpha\rangle \end{aligned}$$

mas $e^{-i2\pi J_y/\hbar} |jm\rangle = (-1)^{2j} |jm\rangle$, o que demonstra o que queríamos. [lousa](#)

Veja slide 13 da aula 19 e use caixa azul do slide 11 da aula 23

| | | | | |
|-----------------------------|---|--|---|--|
| $ j \text{ inteiro}\rangle$ | } | estado orbital $ \ell m\rangle$ | } | estado orbital de um elétron $ \ell 1/2; m m_s\rangle$ |
| | | sistema de N (par) elétrons. Ex: N=2 | | sistema de N (ímpar) elétrons. |
| | | $\frac{1}{\sqrt{2}} (+-\rangle \pm -+\rangle)$ | | |

Reversão temporal: convenção de fase e valores esperados

Foi natural escolher $\Theta|\ell, m\rangle = (-1)^m|\ell, -m\rangle$

Alguns autores acham atraente generalizar, e escolher $\Theta|j, m\rangle = (-1)^m|j, -m\rangle$, para j inteiro (orbital ou soma de semi-inteiros). Nosso livro texto escolhe $\eta = i$ e a convenção $\Theta|j, m\rangle = i^{2m}|j, -m\rangle, \forall j$ inteiro ou semi-inteiro.

Isso garante caixa azul do slide anterior

Tendo estudado a efeito do operador de reversão temporal sobre autoestados de momento angular, estamos prontos para calcular valores esperados de operadores Hermiteanos.

Havíamos obtido que
$$\begin{cases} \Theta A \Theta^{-1} = \pm A \\ \langle \alpha | A | \alpha \rangle = \pm \langle \tilde{\alpha} | A | \tilde{\alpha} \rangle \end{cases}$$

com a convenção acima, temos $\langle \alpha, j, m | A | \alpha, j, m \rangle = \pm \langle \alpha, j, -m | A | \alpha, j, -m \rangle$, onde as fases i^{2m} cancelaram.

Agora, suponha que A seja um tensor esférico $T_q^{(k)}$. Devido ao teorema de Wigner-Eckart, será suficiente examinar apenas o elemento de matriz com $q = 0$.

Assim, examinaremos o elemento de matriz (onde $\Theta T_{q=0}^{(k)} \Theta^{-1} = \pm T_{q=0}^{(k)}$):

$$\langle \alpha, j, m | T_0^{(k)} | \alpha, j, m \rangle = \pm \langle \alpha, j, -m | T_0^{(k)} | \alpha, j, -m \rangle$$

Reversão temporal: convenção de fase e valores esperados

Usaremos que $|\alpha, j, -m\rangle = D(0, \pi, 0)|\alpha, j, m\rangle$ (mostre!) e a relação obtida no

capítulo 3, $D^\dagger(R)T_q^{(k)}D(R) = \sum_{q'=-k}^k D_{qq'}^{(k)*} T_{q'}^{(k)}$ para escrever (para $q = 0$):

$$D^\dagger(0, \pi, 0)T_0^{(k)}D(0, \pi, 0) = (-1)^k T_0^{(k)} + \text{componentes com } q' \neq 0. \quad \text{Para isso,}$$

usamos que $D_{00}^{(k)}(0, \pi, 0) = P_k(\cos \pi) = (-1)^k$ (mostre!) e que não precisávamos calcular as componentes com $q' \neq 0$, pois, quando “sanduichadas” por $\langle \alpha, j, m |$ e $|\alpha, j, m\rangle$ dariam zero (regra m de seleção, $m = q' + m$). Assim, temos:

$$\langle \alpha, j, m | T_0^{(k)} | \alpha, j, m \rangle = (-1)^k \langle \alpha, j, m | T_0^{(k)} | \alpha, j, m \rangle$$

este resultado é muito interessante, pois mostra que para k ímpar

$\langle \alpha, j, m | T_0^{(k)} | \alpha, j, m \rangle = 0$ mesmo quando $|\alpha, j, m\rangle$ não tem paridade bem definida.

Exemplo:

$$\langle \mathbf{x} \rangle \begin{cases} \langle n, \ell, m | \mathbf{x} | n, \ell, m \rangle = 0 \text{ é óbvio, pois o estado tem paridade bem definida} \\ \langle \alpha | \mathbf{x} | \alpha \rangle = 0 \text{ com } |\alpha\rangle = c_s |s_{1/2}\rangle + c_p |p_{1/2}\rangle \text{ não tão óbvio, pois } |\alpha\rangle \text{ não é} \\ \text{autoestado do operador paridade.} \end{cases}$$

Interações com campos elétricos e magnéticos; degenerescência de Kramers

Suponha, primeiro, uma partícula sujeita à um potencial elétrico estático $V(\mathbf{x}) = e\phi(\mathbf{x})$. Uma vez que o potencial é real e função do operador \mathbf{x} , par sob reversão temporal, temos $[\Theta, H] = 0$. Contrariamente ao caso do operador paridade, o fato de H comutar com Θ não gera nenhum resultado interessante, pois $\Theta U(t, t_0) \neq U(t, t_0)\Theta$. Ou seja, não existe algo do tipo *número quântico fruto da conservação de reversão temporal*. Lembre, entretanto, que $[\Theta, H] = 0 \implies \langle \mathbf{x}' | n \rangle = \langle \mathbf{x}' | n \rangle^*$.

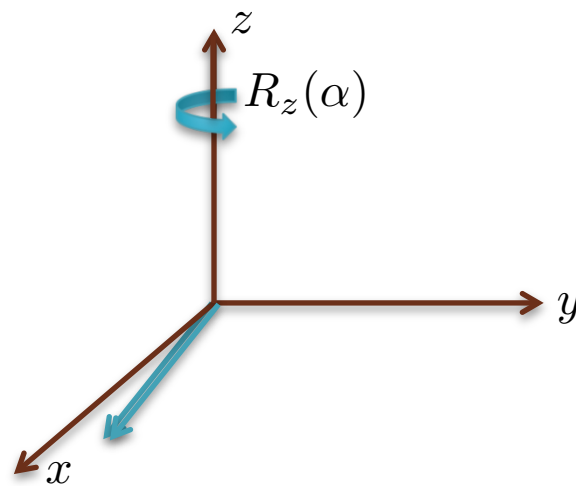
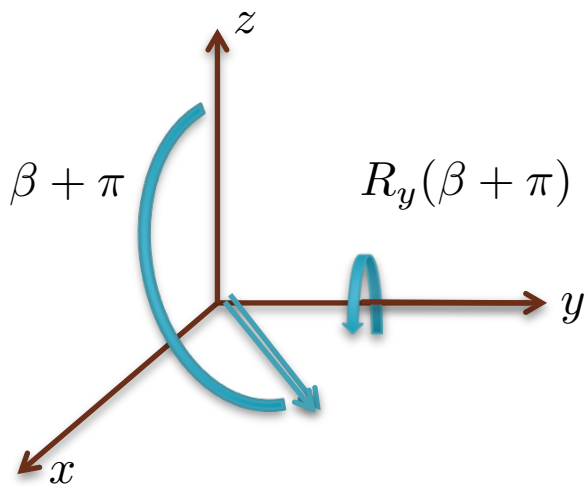
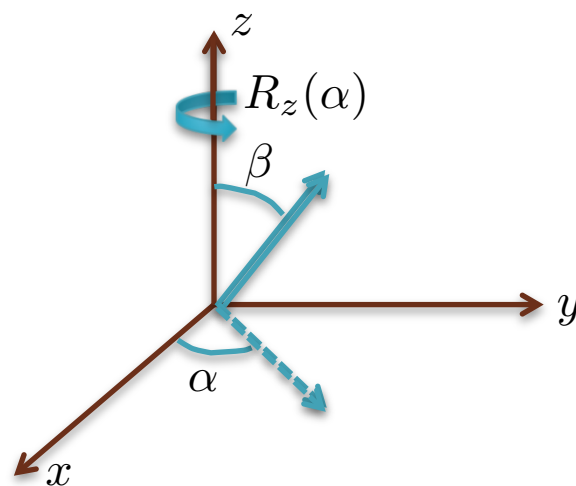
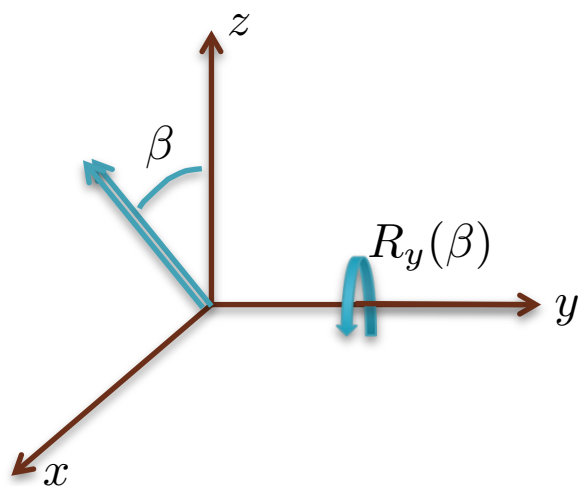
Outra consequência da invariância sob reversão temporal é a chamada degenerescência de Kramers. Se H e Θ comutam, temos que $|n\rangle$ e $\Theta|n\rangle$ tem o mesmo autovalor E_n . Assim, ou diferem por uma fase global (caso não degenerado) ou são ortogonais (caso degenerado). Suponha

$\Theta|n\rangle = e^{i\delta}|n\rangle$ e aplique Θ novamente, para obter

$$\Theta^2|n\rangle = \Theta e^{i\delta}|n\rangle = e^{-i\delta}\Theta|n\rangle = e^{-i\delta}e^{i\delta}|n\rangle = |n\rangle$$

Esta relação é impossível para sistemas com j semi-inteiro ($\Theta^2 = -1$).

Concluimos que para um sistema com um número ímpar de elétrons, independente de quanto complicado possa ser o potencial elétrico, existe pelo menos uma degenerescência dupla! Isso muda na presença de um campo magnético \mathbf{B} (externo), ex: $\mathbf{S}\cdot\mathbf{B}$, $\mathbf{p}\cdot\mathbf{A} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{p}$, pois $[\Theta, H] \neq 0$.




Não parece, mas está alinhado
(no plano xz) e aponta na direção
oposta ao de cima

Não parece, mas está alinhado
e aponta na direção oposta ao
de cima

Slide 13 da aula 19: Representações do Operador de Rotação

Note também que $\mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(R^{(-1)}) = \langle j, m' | \exp\left(\frac{+i\mathbf{J}\cdot\mathbf{n}\varphi}{\hbar}\right) | j, m \rangle =$

$$= \langle j, m | \left[\exp\left(\frac{+i\mathbf{J}\cdot\mathbf{n}\varphi}{\hbar}\right) \right]^\dagger | j, m' \rangle^* = \langle j, m | \exp\left(\frac{-i\mathbf{J}\cdot\mathbf{n}\varphi}{\hbar}\right) | j, m' \rangle^* = \mathcal{D}_{mm'}^{(j)*}(R)$$

 $\langle \alpha | A | \beta \rangle = \langle \beta | A^\dagger | \alpha \rangle^*$

Para apreciar o significado físico da matriz de rotação, rode o ket:

$$|j, m\rangle \rightarrow D(R)|j, m\rangle$$

$$D(R)|j, m\rangle = \mathbb{1}D(R)|j, m\rangle = \sum_{j'm'} |j'm'\rangle \langle j'm' | D(R) | j, m \rangle = \sum_{m'} |j, m'\rangle D_{m'm}^{(j)}(R)$$

Assim, $D_{m'm}^{(j)}(R)$ é amplitude para o estado rodado ser encontrado em $|j, m'\rangle$, quando o estado original for $|j, m\rangle$. Que tal a rotação definida por ângulos de Euler (α, β, γ) ?

$$D_{m'm}^{(j)}(\alpha, \beta, \gamma) = \langle j, m' | \exp\left(\frac{-iJ_z\alpha}{\hbar}\right) \exp\left(\frac{-iJ_y\beta}{\hbar}\right) \exp\left(\frac{-iJ_z\gamma}{\hbar}\right) | j, m \rangle =$$

$$= \exp\left(-i(m'\alpha + m\gamma)\right) \langle j, m' | \exp\left(\frac{-iJ_y\beta}{\hbar}\right) | j, m \rangle$$

Isso permite definir: $d_{m'm}^{(j)}(\beta) \equiv \langle j, m' | \exp\left(\frac{-iJ_y\beta}{\hbar}\right) | j, m \rangle$ uma matriz bastante

útil para rodar kets. Fizemos $d_{m'm}^{(1/2)}(\beta)$. Siga o texto e faça $d_{m'm}^{(1)}(\beta)$.

Slide 11 aula 23 Matrizes de Rotação e Osciladores de Schwinger

Simplificando a última fórmula do slide anterior, temos

$$D(\alpha = 0, \beta, \gamma = 0)|jm\rangle = \sum_{m'} \sum_k \frac{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}}{(j+m-k)!k!(k-m+m')!(j-k-m')!} \times \\ \times (\cos \beta/2)^{2j-2k+m-m'} (\sin \beta/2)^{2k-m+m'} (a_+^\dagger)^{j+m'} (a_-^\dagger)^{j-m'} (-1)^{k-m+m'} |0,0\rangle$$

Comparação direta com a fórmula do do topo do slide 10, nos leva à

$$d_{m'm}^{(j)}(\beta) = \sum_k (-1)^{k-m+m'} \frac{\sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!}}{(j+m-k)!k!(k-m+m')!(j-k-m')!} \times \\ \times (\cos \beta/2)^{2j-2k+m-m'} (\sin \beta/2)^{2k-m+m'}$$

Se rodamos $|jm\rangle$ de 2π , ele volta para ele mesmo, a menos de uma fase.

Assim, $m' = m \Rightarrow$ só precisa de $d_{mm}^{(j)}(\beta) \rightarrow$ isso e o $\sin(2\pi/2)$ exige $k = 0$.

$$\therefore D(0, \beta, 0)|j, m\rangle = \sum_{m'} |j, m'\rangle d_{m'm}^{(j)}(2\pi) = |j, m\rangle d_{mm}^{(j)}(2\pi) = (-1)^{2j}|jm\rangle$$