Observáveis compatíveis

- A e B são compatíveis se $[A, B] = 0$ e incompatíveis se $[A, B] \neq 0$.
- $[S^2, S_i] = 0, \therefore S^2$ e $S_i (i = x$ ou y ou $z)$ são compatíveis.
- $[S_i, S_j] \neq 0$ para $i \neq j$ e $\therefore$ os pares S_i e S_j com i e $j = x, y, z$ são incompatíveis.
- Veremos que observáveis compatíveis têm um papel importante na interpretação e descrição de resultados de medidas experimentais em mecânica quântica.
- Observáveis compatíveis serão úteis na construção de bases para descrever o estado (ket) de um sistema. A idéia é escrever um ket arbitrário na base de autokets de A e depois escrevê-lo na base de autokets de B. Em seguida, aprender como os autokets de A se relacionam com os autokets de B, e o que se ganha com o fato de A e B serem compatíveis.

Para isso, precisamos estudar o conceito de degenerescência.

Observáveis compatíveis

- Um autovalor de A é dito degenerado, se existirem 2 ou mais autokets de A, linearmente independentes (LI), associados a esse mesmo autovalor. Existem inúmeros casos na natureza.

  Um exemplo no experimento de Stern-Gerlach é:

$$\mathbf{S}^2|\pm\rangle = (\frac{3}{4})\hbar^2|\pm\rangle \Rightarrow \begin{cases} \langle+|-\rangle = 0 \rightarrow \text{ kets ortogonais (pois são autokets} \\ \text{de } S_z \text{ com autovalores distintos) e com o mesmo} \\ \text{autovalor, } \frac{3}{4}\hbar^2, \text{ com respeito à } \mathbf{S}^2. \end{cases}$$

- Dois kets ortogonais são LI. Dois kets LI podem não ser ortogonais, mas é possível, a partir deles, criar dois que sejam ortogonais.
- Perceba que a existência de autovalores degenerados também gera um problema de notação, pois com a presente notação não dá para descrever kets ortogonais (e portanto LI), usando apenas o autovalor degenerado.
- Suponha

$$A|a'\rangle = a'|a'\rangle \text{ e } A|a''\rangle = a''|a''\rangle \text{ com } \langle a'|a''\rangle = 0 \text{ e } a' = a''$$

Na presente notação, se $a' = a'' \longrightarrow |a'\rangle = |a''\rangle$ *e* $\therefore \langle a'|a''\rangle = \langle a'|a'\rangle = 1 \neq 0$

Observáveis compatíveis

Teorema: Suponha que A e B são observáveis compatíveis, e os autovalores de A são não-degenerados. Então a matriz que representa B na base de autokets de A é diagonal $\langle a^{(i)}|B|a^{(j)}\rangle = \#\delta_{ij}$. (Lembre que a matriz que representa A em sua base de autokets já é diagonal $\langle a^{(i)}|A|a^{(j)}\rangle = a^{(i)}\delta_{ij}$.)

Observáveis compatíveis implica em $[A, B] = 0$, assim

$$\langle a'|[A,B]|a''\rangle = \langle a'|AB - BA|a''\rangle = \underbrace{(a' - a'')\langle a'|B|a''\rangle}_{\langle a'|B|a''\rangle = 0, \text{ se } a' \neq a''} = 0$$

Um produto é zero quando um dos fatores (ou ambos) é zero. Assim, para autovalores distintos de A (são todos pela hipótese de não-degenerados), o elemento de matriz de B, fora da diagonal, é zero. Podemos escrever

$$\langle a'|B|a''\rangle = \delta_{a'a''}\langle a'|B|a'\rangle \text{ e } B = \sum_{a'a''} |a'\rangle\langle a'|B|a''\rangle\langle a''| = \sum_{a''} |a''\rangle\langle a''|B|a''\rangle\langle a''|$$

Note que $B|a'\rangle = \sum_{a''} |a''\rangle\langle a''|B|a''\rangle\langle a''|a'\rangle = \langle a'|B|a'\rangle|a'\rangle$, ou seja $|a'\rangle$ é autoket de B com autovalor $b' = \langle a'|B|a'\rangle$.

$$\boxed{\textit{O ket } |a'\rangle \textit{ é simultaneamente autoket de } A \textit{ e de } B}$$

Observáveis compatíveis

Se permitíssemos A com autovalores degenerados, nossas conclusões não mudariam para os kets associados aos autovalores não degenerados. No subespaço de autokets de A associados ao autovalor degenerado, B pode ser diagonalizado. Para entender melhor isso, considere um subespaço de n kets associados à um autovalor de A, tal que

$$A|a'^{(i)}\rangle = a'|a'^{(i)}\rangle, \text{ para } i = 1, 2, \ldots, n$$

Note que $|\alpha\rangle = \sum_{i=1}^{n} c^{(i)}|a'^{(i)}\rangle$ também é solução de A com autovalor a', pois

$$A|\alpha\rangle = A\sum_{i=1}^{n} c^{(i)}|a'^{(i)}\rangle \underset{A \text{ é linear}}{=} \sum_{i=1}^{n} c^{(i)}A|a'^{(i)}\rangle = \sum_{i=1}^{n} c^{(i)}a'|a'^{(i)}\rangle \underset{a' \left\{ \substack{\text{sai da soma, pois} \\ \text{não depende de } i} \right.}{=} a'\sum_{i=1}^{n} c^{(i)}|a'^{(i)}\rangle = a'|\alpha\rangle$$

Escolha a combinação que diagonaliza B neste subespaço. O ket $|a', b'\rangle$ é simultaneamente autoket d e A e de B. Essa é a nova notação

$$|a', b'\rangle = |b'\rangle = \sum_{i=1}^{n} c^{(i)}|a'^{(i)}\rangle \Rightarrow A|a', b'\rangle = a'|a', b'\rangle \text{ e } B|a', b'\rangle = b'|a', b'\rangle$$

lousa

Observáveis compatíveis

Exemplo: momento angular orbital $\begin{cases} L^2|\ell,m\rangle = \ell(\ell+1)\hbar^2|\ell,m\rangle \\ L_z|\ell,m\rangle = m\hbar|\ell,m\rangle \\ \ell = 0,1,2\ldots \text{ e } -\ell \le m \le +\ell \end{cases}$

Isso é generalizável para $A, B, C,$ etc., se $[A,B]=0; [A,C]=0; [B,C]=0; \ldots$

$$\begin{aligned} A|a',b',c',\ldots\rangle &= a'|a',b',c'\ldots\rangle; \\ B|a',b',c',\ldots\rangle &= b'|a',b',c'\ldots\rangle; \\ C|a',b',c',\ldots\rangle &= c'|a',b',c'\ldots\rangle; \\ \vdots \qquad\qquad &\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \end{aligned}$$

Para facilitar a notação, usaremos $|K'\rangle = |a',b',c',\ldots\rangle$ com :

- $\langle K''|K'\rangle = \langle a'',b'',c'',\ldots|a',b',c',\ldots\rangle = \delta_{a'',a'}\delta_{b'',b'}\delta_{c'',c'}\ldots$

  e

- $\sum_{K'}|K'\rangle\langle K'| = \sum_{a'b'c'\ldots}|a',b',c',\ldots\rangle\langle a',b',c',\ldots| = \mathbb{1}$

Medindo A e B, duas observáveis compatíveis

Suponha que medimos A e encontramos a'. Em seguida, medimos B e encontramos b'. O que acontece se medirmos A de novo?

Suponha A com espectro não-degenerado

$$|\alpha\rangle \xrightarrow{\text{mede } A} |a',b'\rangle \xrightarrow{\text{mede } B} |a',b'\rangle \xrightarrow{\text{mede } A} |a',b'\rangle$$

encontra a' encontra b' encontra a'

Suponha A com espectro degenerado (a' é um deles)

$$|\alpha\rangle \xrightarrow{medeA} \sum_i^n c_{a'}^{(i)}|a',b^{(i)}\rangle \xrightarrow{medeB} |a',b^{(j)}\rangle \xrightarrow{medeA} |a',b^{(j)}\rangle$$

encontra a' encontra $b^{(j)}$ encontra a'

$b^{(j)}$ $\Big\{$ é um dos autovalores de B do subespaço de dimensão n de estados com autovalor degenerado a' de A.

Observáveis incompatíveis

Neste caso, temos $[A, B] \neq 0$

Observáveis incompatíveis **não** têm um conjunto completo comum de autokets.

Se tal conjunto $\{|a', b'\rangle\}$ existisse, teríamos:

$$(a) \quad AB|a', b'\rangle = Ab'|a', b'\rangle = b'A|a', b'\rangle = b'a'|a', b'\rangle$$

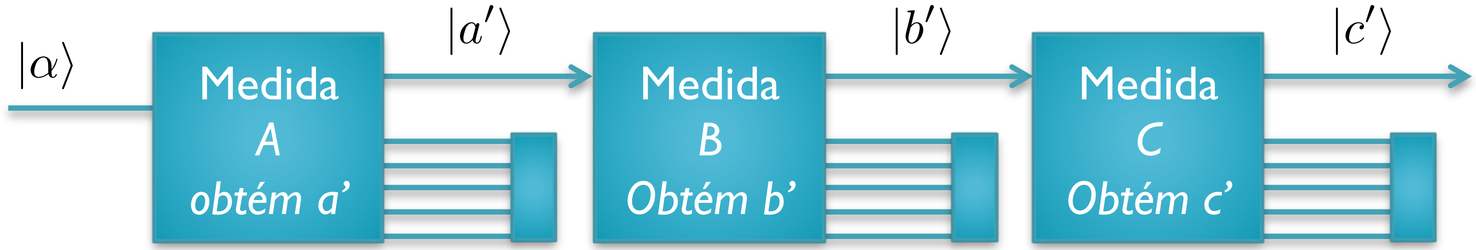
$$(b) \quad BA|a', b'\rangle = Ba'|a', b'\rangle = a'B|a', b'\rangle = a'b'|a', b'\rangle$$

Tome $(a) - (b)$ e obtenha $(AB - BA)|a', b'\rangle = [A, B]|a', b'\rangle = 0$.
Como o conjunto é completo, teríamos necessariamente, $[A, B] = 0$ o que contraria a hipótese de que A e B são incompatíveis.
Nada impede, entretanto, que duas observáveis incompatíveis comutem dentro de um subespaço. Por exemplo, embora as componentes de momento angular não comutem, no subespaço $\ell = 0$, temos

$$L_z|0,0\rangle = 0|0,0\rangle; \;\; L_x|0,0\rangle = 0|0,0\rangle; \;\; L_y|0,0\rangle = 0|0,0\rangle$$

$$\therefore [L_z, L_x]|0,0\rangle = [L_x, L_y]|0,0\rangle = [L_y, L_z]|0,0\rangle = 0|0,0\rangle$$

Um sequência de medidas seletivas



Tendo medido a' no primeiro experimento, qual a probabilidade de medir c'?

Que tal $|\langle b'|a'\rangle|^2|\langle c'|b'\rangle|^2$?

Tendo medido a' no primeiro experimento, qual a probabilidade de medir c'?

Que tal $|\langle c'|a'\rangle|^2$?

Será que o resultado da segunda experiência é o mesmo que o da primeira se permitíssemos a “passagem” por todos os valores de b'?

Base de kets e representações matriciais

A pergunta é: será que? $\sum_{b'} |\langle b'|a'\rangle|^2 |\langle c'|b'\rangle|^2 \stackrel{?}{=} |\langle c'|a'\rangle|^2$

O lado esquerdo é igual a $\sum_{b'} |\langle b'|a'\rangle|^2 |\langle c'|b'\rangle|^2 = \sum_{b'} \langle c'|b'\rangle\langle b'|a'\rangle\langle a'|b'\rangle\langle b'|c'\rangle$

e o direito é $|\langle c'|a'\rangle|^2 = |\sum_{b'} \langle c'|b'\rangle\langle b'|a'\rangle|^2 = \sum_{b'b''} \langle c'|b'\rangle\langle b'|a'\rangle\langle a'|b''\rangle\langle b''|c'\rangle| =$

$$= \underbrace{\sum_{b'} \langle c'|b'\rangle\langle b'|a'\rangle\langle a'|b'\rangle\langle b'|c'\rangle|}_{\text{Esse é igual ao lado esquerdo}} + \underbrace{\sum_{b',b''\neq b'} \langle c'|b'\rangle\langle b'|a'\rangle\langle a'|b''\rangle\langle b''|c'\rangle|}_{\text{Para que fossem iguais, esse precisaria ser zero}}$$

Em seguida mostramos que as duas expressões só são iguais, se $\begin{cases} [A,B]=0 \\ \text{ou} \\ [C,B]=0. \end{cases}$

Se $[A,B]=0$ os autokets de A são também autokets de B. Ou melhor $|a'\rangle = |b'\rangle = |a',b'\rangle$. Por outro lado, se $b' \neq b''$, os autokets correspondentes são ortogonais $\langle b'|b''\rangle = 0$. Ou seja se $\langle b'|a'\rangle \neq 0 \to \langle b''|a'\rangle = 0$ e se $\langle b''|a'\rangle \neq 0 \to \langle b'|a'\rangle = 0$. Raciocínio semelhante para $[C,B]=0$.

Note que as expressões são diferentes quando a medida intermediária é de uma observável incompatível com as outras

Relação de Incerteza

Começamos definindo o operador $\Delta A = A - \langle A \rangle$, que depende apenas numericamente da escolha do estado que define $\langle A \rangle$.

O valor esperado $\langle (\Delta A)^2 \rangle$ é definido como dispersão de A.

$$\text{Note que } \langle (\Delta A)^2 \rangle = \langle A^2 - 2A\langle A \rangle + \langle A \rangle^2 \rangle = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2$$

A dispersão também é conhecida como variança ou desvio quadrático da média

Note que $\langle (\Delta A)^2 \rangle_{a'} = \langle A^2 \rangle_{a'} - \langle A \rangle_{a'}^2 = a'^2 - a'^2 = 0$ para um autoestado de A

Quanto vale a dispersão de S_x para o estado $|S_z;+\rangle$?

$$\langle S_x^2 \rangle - \langle S_x \rangle^2 = \underbrace{\langle S_z;+|S_x^2|S_z;+\rangle}_{\frac{\hbar^2}{4}} - \underbrace{\langle S_z;+|S_x|S_z;+\rangle}_{0}{}^2 = \frac{\hbar^2}{4}$$

Quanto vale a dispersão de S_z para o estado $|S_z;+\rangle$?

$$\langle S_z^2 \rangle - \langle S_z \rangle^2 = \underbrace{\langle S_z;+|S_z^2|S_z;+\rangle}_{\frac{\hbar^2}{4}} - \underbrace{\langle S_z;+|S_z|S_z;+\rangle^2}_{\frac{\hbar^2}{4}} = 0$$

Relação de Incerteza: forma geral

Mostraremos que $\langle(\Delta A)^2\rangle\langle(\Delta B)^2\rangle \geq \frac{1}{4}|\langle[A,B]\rangle|^2,$ onde A e B são observáveis

e $\begin{cases} \langle(\Delta A)^2\rangle = \langle(A-\langle A\rangle)^2\rangle = \langle A^2 - 2A\langle A\rangle + \langle A\rangle^2\rangle = \langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2 \\ \langle(\Delta B)^2\rangle = \langle(B-\langle B\rangle)^2\rangle = \langle B^2 - 2B\langle B\rangle + \langle B\rangle^2\rangle = \langle B^2\rangle - \langle B\rangle^2 \end{cases}$

Para entender o significado de $\langle(\Delta A)^2\rangle,$ considere que o sistema esteja no estado $|\alpha\rangle,$ e calcule

$$\langle(\Delta A)^2\rangle = \langle\alpha|(\Delta A)^2|\alpha\rangle = \langle\alpha|(A-\langle A\rangle)^2|\alpha\rangle = \sum_{a'}\langle\alpha|a'\rangle\langle a'|(A-\langle A\rangle)^2|\alpha\rangle =$$

$$= \sum_{a'}\langle\alpha|a'\rangle\langle a'|(a'-\langle A\rangle)^2|\alpha\rangle = \sum_{a'}\underbrace{(a'-\langle A\rangle)^2}_{\text{estritamente positivo}}\langle\alpha|a'\rangle\langle a'|\alpha\rangle$$

Isso é uma média ponderada da distância absoluta (ao quadrado) do autovalor ao valor médio de A. Quanto maiores forem esta distância e $|\langle a'|\alpha\rangle|^2,$ maior será a contribuição de a' para $\langle(\Delta A)^2\rangle$.

Observe que:

(1) quanto mais dispersas forem as possíveis medidas de A (para um dado $|\alpha\rangle$), maior será $\langle(\Delta A)^2\rangle$. Daí a origem do nome desta quantidade: dispersão.

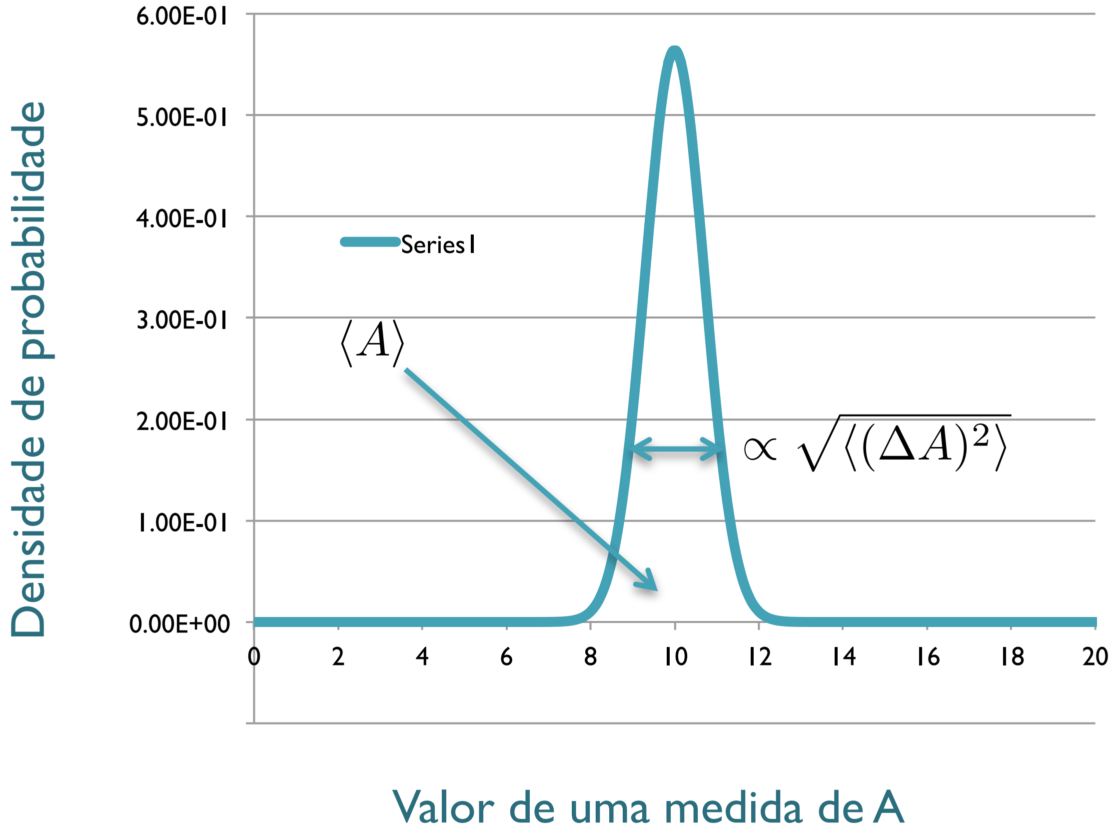
(2) se não quadrássemos o $(A-\langle A\rangle),$ daria zero.

Relação de Incerteza: forma geral

$$\boxed{\langle(\Delta A)^2\rangle\langle(\Delta B)^2\rangle \geq \frac{1}{4}|\langle[A,B]\rangle|^2, \text{ onde } A \text{ e } B \text{ são observáveis}}$$

Se $[A,B] \neq 0$ *e o lado direito for estritamente positivo, temos que se* $\langle(\Delta A)^2\rangle$ *diminuir,* $\langle(\Delta B)^2\rangle$ *precisa aumentar e se* $\langle(\Delta B)^2\rangle$ *diminuir,* $\langle(\Delta A)^2\rangle$ *precisa aumentar para garantir um valor mínimo do produto que supere o lado direito.*

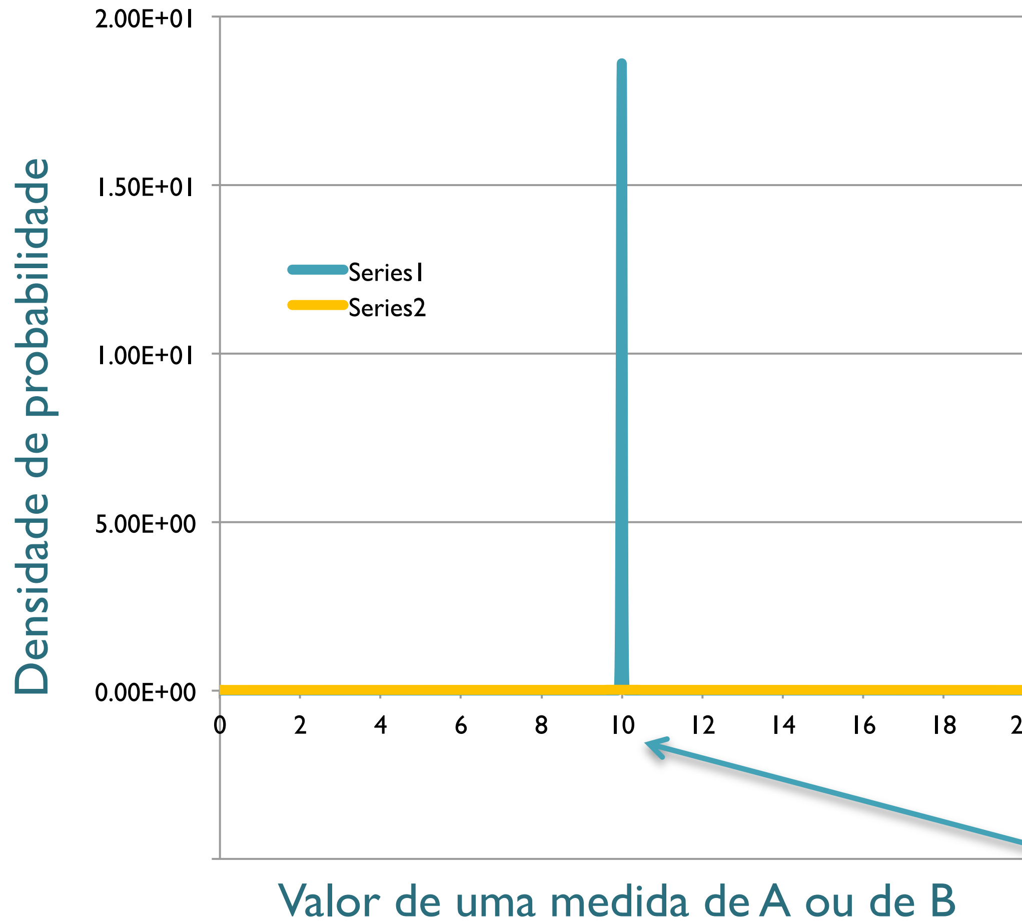
Se $[A,B] = 0$ *não há restrições relevantes.*



Relação de Incerteza: forma geral

$$\langle(\Delta A)^2\rangle\langle(\Delta B)^2\rangle \geq \frac{1}{4}|\langle[A,B]\rangle|^2, \ \text{suponha } [A,B]\neq 0$$

A chamada relação de incerteza é só um caso particular da expressão acima



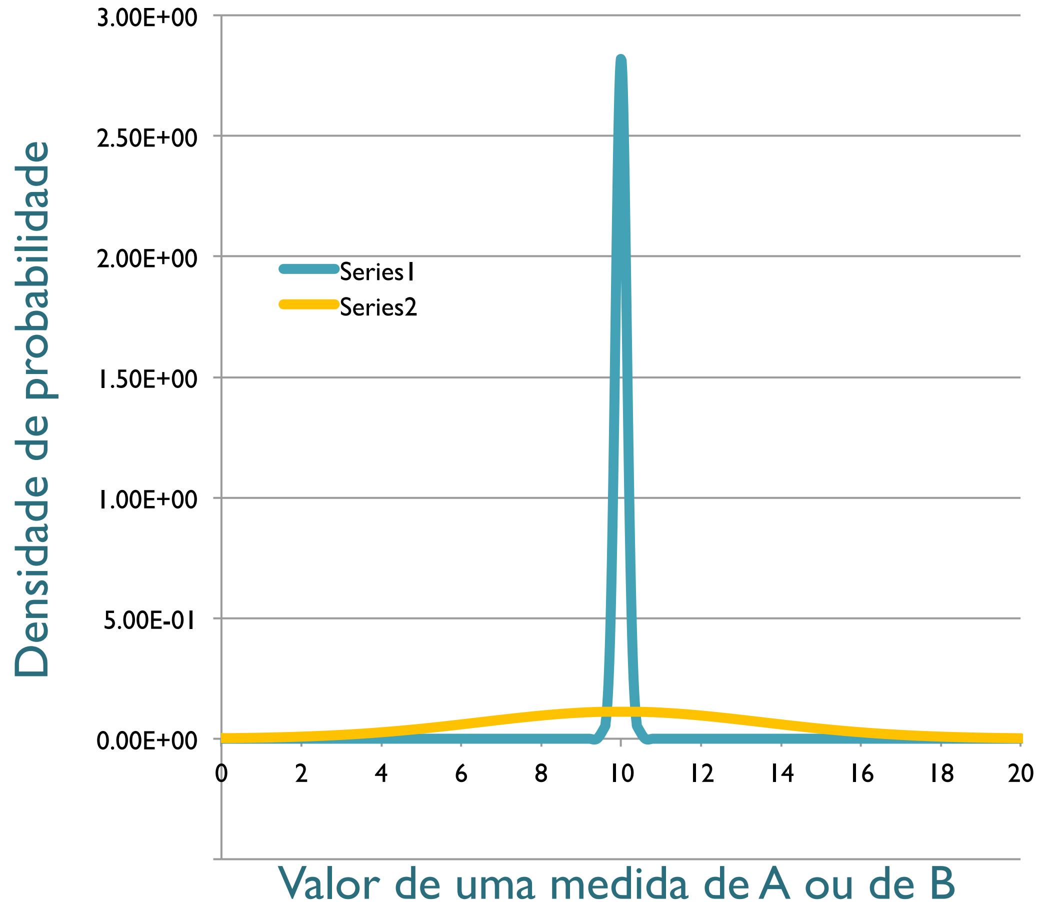
(só para facilitar)

$$\langle A\rangle = \langle B\rangle$$

Relação de Incerteza: forma geral

$$\langle(\Delta A)^2\rangle\langle(\Delta B)^2\rangle \geq \frac{1}{4}|\langle[A,B]\rangle|^2, \text{ suponha } [A,B]\neq 0$$

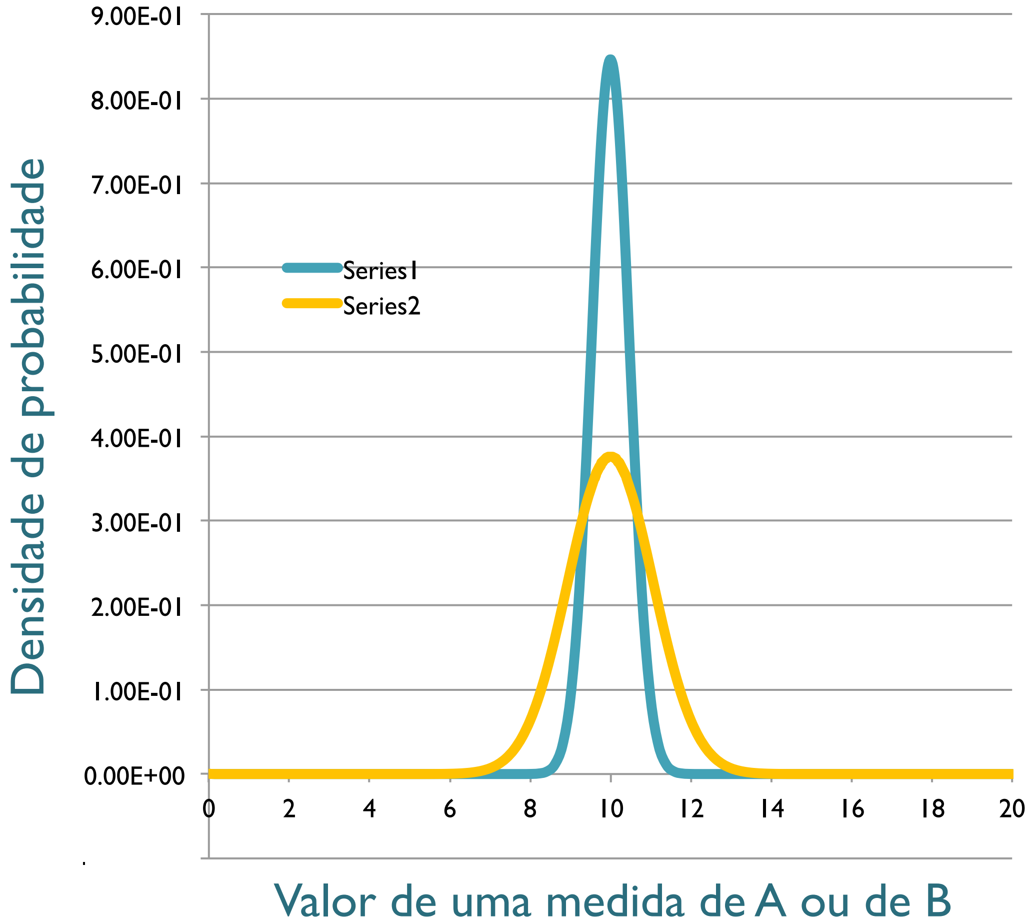
A chamada relação de incerteza é só um caso particular da expressão acima



Relação de Incerteza: forma geral

$$\langle(\Delta A)^2\rangle\langle(\Delta B)^2\rangle \geq \frac{1}{4}|\langle[A,B]\rangle|^2,\ \text{suponha}\ [A,B]\neq 0$$

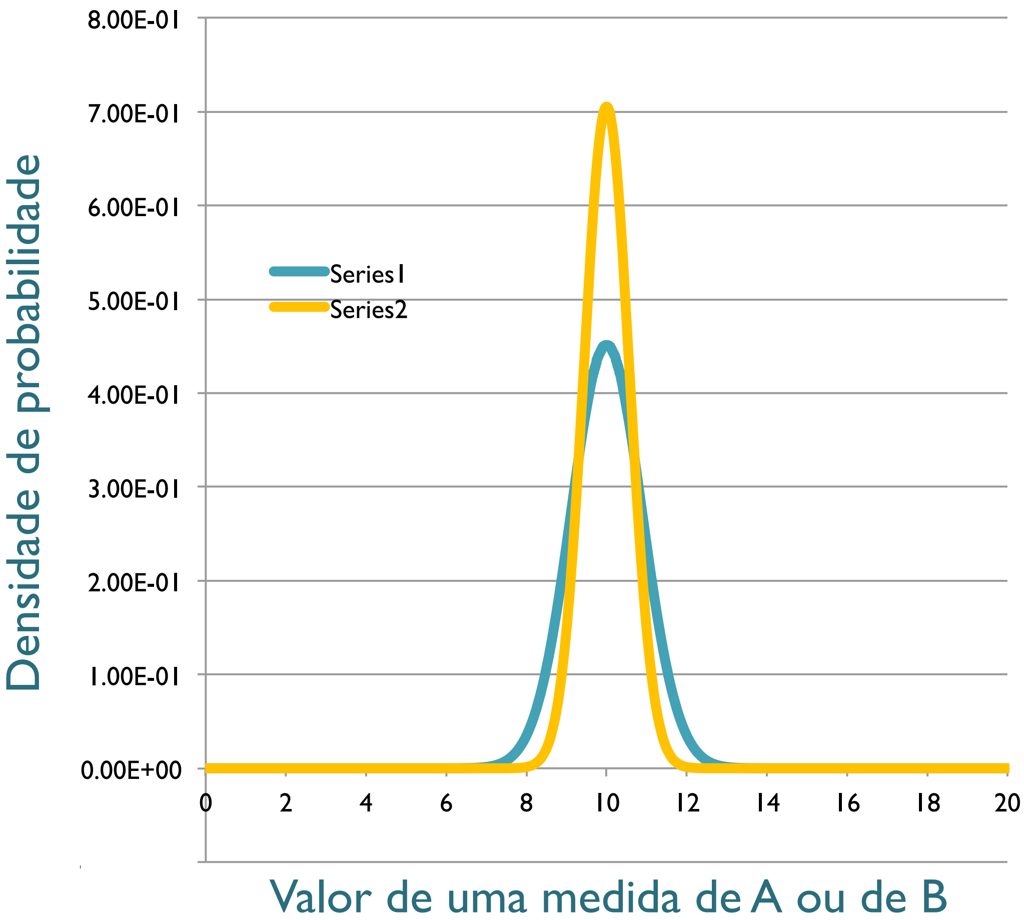
A chamada relação de incerteza é só um caso particular da expressão acima



Relação de Incerteza: forma geral

$$\langle(\Delta A)^2\rangle\langle(\Delta B)^2\rangle \geq \frac{1}{4}|\langle[A,B]\rangle|^2, \text{ suponha } [A,B] \neq 0$$

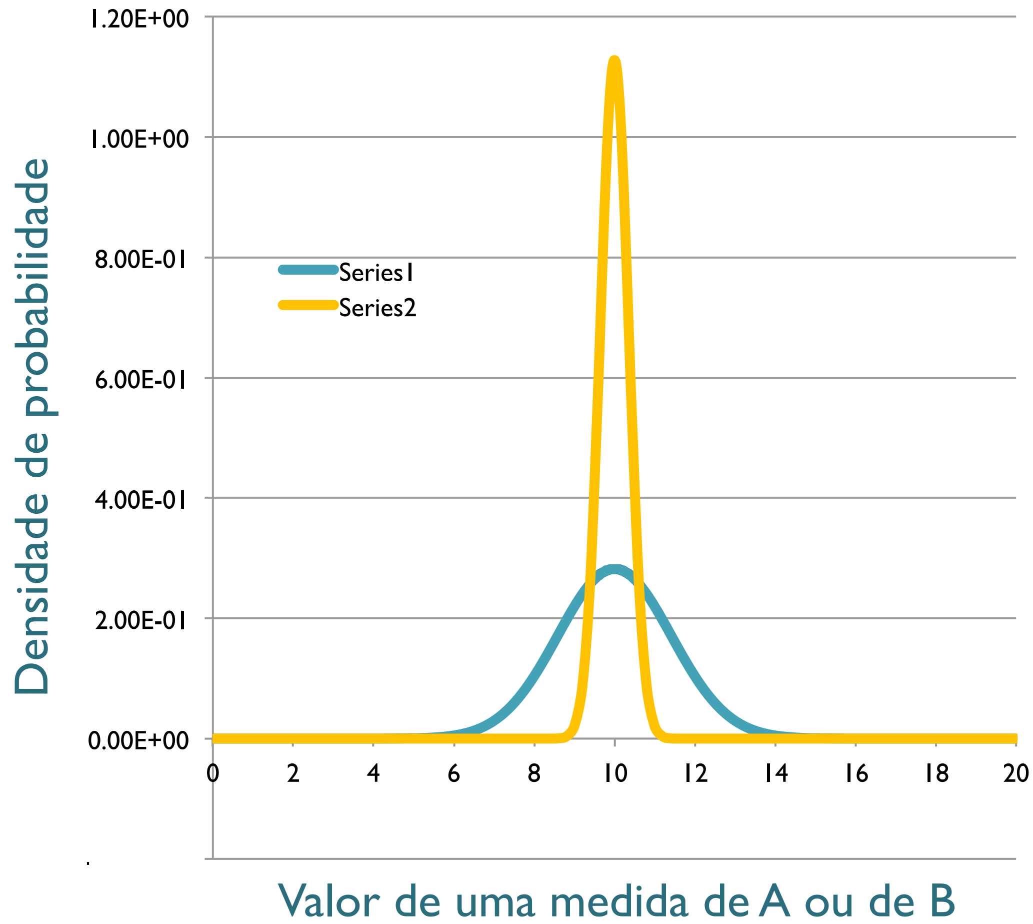
A chamada relação de incerteza é só um caso particular da expressão acima



Relação de Incerteza: forma geral

$$\langle(\Delta A)^2\rangle\langle(\Delta B)^2\rangle \geq \frac{1}{4}|\langle[A,B]\rangle|^2, \text{ suponha } [A,B]\neq 0$$

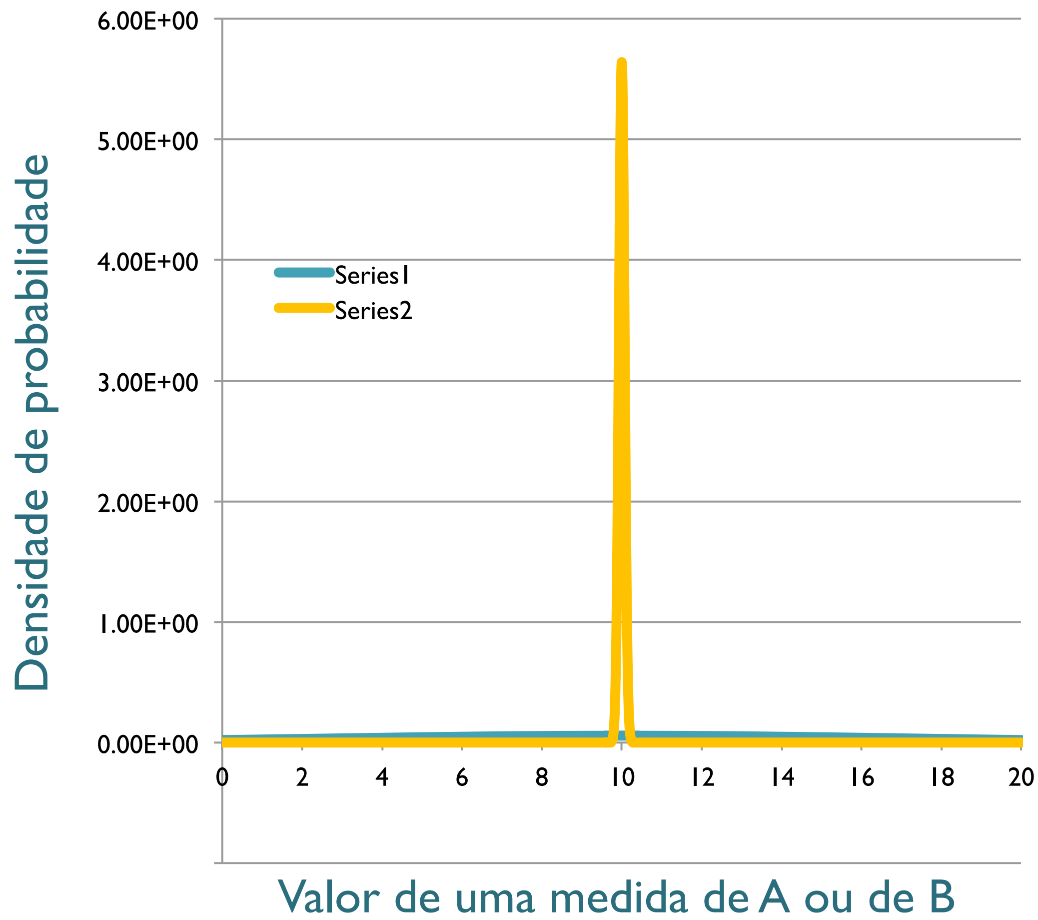
A chamada relação de incerteza é só um caso particular da expressão acima



Relação de Incerteza: forma geral

$$\langle(\Delta A)^2\rangle\langle(\Delta B)^2\rangle \geq \frac{1}{4}|\langle[A,B]\rangle|^2,\ \text{suponha } [A,B]\neq 0$$

A chamada relação de incerteza é só um caso particular da expressão acima



Na próxima aula demonstraremos a expressão

$$\langle(\Delta A)^2\rangle\langle(\Delta B)^2\rangle \geq \frac{1}{4}|\langle[A,B]\rangle|^2, \text{ onde } A \text{ e } B \text{ são observáveis}$$

slide 3

lousa

Na base de autokets de A, A é representado pela matriz

$$A \doteq \begin{pmatrix} \langle a^{(1)}|A|a^{(1)}\rangle & \langle a^{(1)}|A|a^{(2)}\rangle & \dots \\ \langle a^{(2)}|A|a^{(1)}\rangle & \langle a^{(2)}|A|a^{(2)}\rangle & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{(1)} & 0 & \dots \\ 0 & a^{(2)} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Enquanto que, nesta mesma base, B é representado por

$$B \doteq \begin{pmatrix} \langle a^{(1)}|B|a^{(1)}\rangle & \langle a^{(1)}|B|a^{(2)}\rangle & \langle a^{(1)}|B|a^{(3)}\rangle & \dots \\ \langle a^{(2)}|B|a^{(1)}\rangle & \langle a^{(2)}|B|a^{(2)}\rangle & \langle a^{(2)}|B|a^{(3)}\rangle & \dots \\ \langle a^{(3)}|B|a^{(1)}\rangle & \langle a^{(3)}|B|a^{(2)}\rangle & \langle a^{(3)}|B|a^{(3)}\rangle & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Se $[A, B] = 0$ e A tem espectro não degenerado, temos

$$B = \begin{pmatrix} \langle a^{(1)}|B|a^{(1)}\rangle & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \langle a^{(2)}|B|a^{(2)}\rangle & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \langle a^{(3)}|B|a^{(3)}\rangle & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^{(1)} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & b^{(2)} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & b^{(3)} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

slide 4

lousa

Suponha que A tem espectro degenerado. Nesse caso, por exemplo, A poderia ser representado pela matriz

$$A = \begin{pmatrix} \langle a,1|A|a,1\rangle & \langle a,1|A|a,2\rangle & \langle a,1|A|a^{(3)}\rangle & \dots \\ \langle a,2|A|a,1\rangle & \langle a,2|A|a,2\rangle & \langle a,2|A|a^{(3)}\rangle & \dots \\ \langle a^{(3)}|A|a,1\rangle & \langle a^{(3)}|B|a,2\rangle & \langle a^{(3)}|A|a^{(3)}\rangle & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \dots \\ 0 & a & 0 & \dots \\ 0 & 0 & a^{(3)} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

De novo, se $[A,B]=0$, B ficaria

$$B = \begin{pmatrix} \langle a,1|B|a,1\rangle & \langle a,1|B|a,2\rangle & \langle a,1|B|a^{(3)}\rangle & \dots \\ \langle a,2|B|a,1\rangle & \langle a,2|B|a,2\rangle & \langle a,2|B|a^{(3)}\rangle & \dots \\ \langle a^{(3)}|B|a,1\rangle & \langle a^{(3)}|B|a,2\rangle & \langle a^{(3)}|B|a^{(3)}\rangle & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \langle a,1|B|a,1\rangle & \langle a,1|B|a,2\rangle & 0 & \dots \\ \langle a,2|B|a,1\rangle & \langle a,2|B|a,2\rangle & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \langle a^{(3)}|B|a^{(3)}\rangle & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$