Relação de Incerteza

Na aula passada apresentamos a forma geral da relação de incerteza:

$$\langle(\Delta A)^2\rangle\langle(\Delta B)^2\rangle \geq \frac{1}{4}|\langle[A,B]\rangle|^2;\ \text{onde } A \text{ e } B \text{ são observáveis, com} \begin{cases}\Delta A = A - \langle A\rangle \\ \Delta B = B - \langle B\rangle\end{cases}$$

Para prová-la, demostraremos 3 lemas.

Lema 1: A desigualdade de Schwarz $\langle\alpha|\alpha\rangle\langle\beta|\beta\rangle \geq |\langle\alpha|\beta\rangle|^2$

(É análoga à $|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 \geq |\mathbf{a}.\mathbf{b}|^{\mathbf{2}}$ do espaço real Euclideano)

Demonstração:

$$(\langle\alpha| + \lambda^*\langle\beta|)(\underbrace{|\alpha\rangle + \lambda|\beta\rangle}_{|\gamma\rangle}) \geq 0 \text{ isto porque } \langle\gamma|\gamma\rangle \geq 0$$

$$\langle\alpha|\alpha\rangle + \lambda^*\langle\beta|\alpha\rangle + \lambda\langle\alpha|\beta\rangle + \lambda^*\lambda\langle\beta|\beta\rangle \geq 0$$

tome $\lambda = -\dfrac{\langle\beta|\alpha\rangle}{\langle\beta|\beta\rangle}$ (vale para $\forall\lambda \therefore$ vale para esse também)

A expressão fica $\langle\alpha|\alpha\rangle - \dfrac{\langle\alpha|\beta\rangle}{\langle\beta|\beta\rangle}\langle\beta|\alpha\rangle - \dfrac{\langle\beta|\alpha\rangle}{\langle\beta|\beta\rangle}\langle\alpha|\beta\rangle + \dfrac{\langle\alpha|\beta\rangle}{\langle\beta|\beta\rangle}\dfrac{\langle\beta|\alpha\rangle}{\langle\beta|\beta\rangle}\langle\beta|\beta\rangle \geq 0$

Multiplicando tudo por $\langle\beta|\beta\rangle$ encontramos a expressão desejada.

Relação de Incerteza

Lema 2: Se $X^\dagger = X \longrightarrow \langle X \rangle$ é real

Demontração: $\langle \alpha | X^\dagger | \alpha \rangle = \langle \alpha | X | \alpha \rangle = \langle \alpha | X | \alpha \rangle^*$, c.q.d.

Lema 3: Se $X^\dagger = -X \longrightarrow \langle X \rangle$ é imaginário

Demontração: $\langle \alpha | X^\dagger | \alpha \rangle = -\langle \alpha | X | \alpha \rangle = \langle \alpha | X | \alpha \rangle^*$, c.q.d.

Prontos para demonstrar a forma geral da relação de incerteza. Considere $|\alpha\rangle \equiv \Delta A |\rangle$ e $|\beta\rangle \equiv \Delta B |\rangle$, onde $|\rangle$ é um ket arbitrário e ΔA e ΔB são as varianças de A e B. Com isso, podemos escrever as componentes da desigualdade de Schwarz

$$\begin{cases} \langle \alpha | \alpha \rangle = \langle | \Delta A^\dagger \Delta A | \rangle = \langle | (\Delta A)^2 | \rangle, \text{ pois } \Delta A^\dagger = \Delta A \\ \\ \langle \beta | \beta \rangle = \langle | \Delta B^\dagger \Delta B | \rangle = \langle | (\Delta B)^2 | \rangle, \text{ pois } \Delta B^\dagger = \Delta B, \\ \\ |\langle \alpha | \beta \rangle|^2 = |\langle | \Delta A \Delta B | \rangle|^2 \end{cases}$$

E assim $\langle \alpha | \alpha \rangle \langle \beta | \beta \rangle \geq |\langle \alpha | \beta \rangle|^2$ nos leva à $\langle | (\Delta A)^2 | \rangle \langle | (\Delta B)^2 | \rangle \geq |\langle | \Delta A \Delta B | \rangle|^2$

Relação de Incerteza

- $\Delta A \Delta B = \frac{1}{2}[\Delta A, \Delta B] + \frac{1}{2}\{\Delta A, \Delta B\}$
- $[\Delta A, \Delta B] = \Delta A \Delta B - \Delta B \Delta A = (A - \langle A\rangle)(B - \langle B\rangle) - (B - \langle B\rangle)(A - \langle A\rangle) =$
  $= AB - A\langle B\rangle - \langle A\rangle B + \langle A\rangle\langle B\rangle - BA + B\langle A\rangle + \langle B\rangle A - \langle B\rangle\langle A\rangle = [A, B]$
  Note que isto não é verdade para $\{\Delta A, \Delta B\}$.
- $([A, B])^\dagger = (AB - BA)^\dagger = B^\dagger A^\dagger - A^\dagger B^\dagger = BA - AB = -[A, B]$
  o que faz do valor médio dele, um imáginario puro para qualquer ket. Como $\{\Delta A, \Delta B\}^\dagger = \{\Delta A, \Delta B\}$, o seu valor médio seria real para qualquer ket.
  Assim, $\langle \Delta A \Delta B\rangle = \frac{1}{2}\underbrace{\langle[\Delta A, \Delta B]\rangle}_{\textit{imaginário puro}} + \frac{1}{2}\underbrace{\langle\{\Delta A, \Delta B\}\rangle}_{\textit{real puro}}$
- $\therefore |\langle \Delta A \Delta B\rangle|^2 = \frac{1}{4}|\langle[\Delta A, \Delta B]\rangle|^2 + \frac{1}{4}|\langle\{\Delta A, \Delta B\}\rangle|^2 =$
  $= \frac{1}{4}|\langle[A, B]\rangle|^2 + \frac{1}{4}|\langle\{\Delta A, \Delta B\}\rangle|^2 \left\{ \text{Se é maior que a soma de números positivos, é maior que cada parcela.} \right.$
  e assim, como $\langle|(\Delta A)^2|\rangle\langle|(\Delta B)^2|\rangle \geq |\langle|\Delta A \Delta B|\rangle|^2$, vale

$$\boxed{\langle|(\Delta A)^2|\rangle\langle|(\Delta B)^2|\rangle \geq \frac{1}{4}|\langle[A, B]\rangle|^2, \text{ c.q.d.}}$$

Instituto de Física Gleb Wataghin

MAPLima

UNICAMP

Mudança de Base ou mudança de representação

Pense em $|+\rangle, |-\rangle$ ou $|S_x;+\rangle, |S_x;-\rangle$ e suas relações.

Base de autokets de A, $\{|a'\rangle\} \longrightarrow \begin{cases} \text{Representação de } A \text{ ou} \\ \text{Representação diagonal de } A. \end{cases}$

Queremos relacionar a base de autokets de A, $\underbrace{\{|a'\rangle\}}_{\text{base velha}}$, com a base de B, $\underbrace{\{|b'\rangle\}}_{\text{base nova}}$.

Operador de transformação

Teorema: Dados 2 conjuntos de kets, ambos satisfazendo relações de ortogonalidade e completeza, $\exists$ um operador unitário U, tal que

$$|b^{(1)}\rangle = U|a^{(1)}\rangle, |b^{(2)}\rangle = U|a^{(2)}\rangle, \ldots |b^{(N)}\rangle = U|a^{(N)}\rangle, \ldots$$

$$U \text{ unitário} \longrightarrow U^\dagger U = UU^\dagger = 1 \quad (\text{note que } U^\dagger = U^{-1})$$

Demostração: Demonstramos este teorema por construção explícita.

Pressupomos que o seguinte operador resolve o assunto:

$U = \sum_k |b^{(k)}\rangle\langle a^{(k)}|$, e para verificar, aplique-o em $|a^{(\ell)}\rangle$

$$U|a^{(\ell)}\rangle = \sum_k |b^{(k)}\rangle\langle a^{(k)}|a^{(\ell)}\rangle = \sum_k |b^{(k)}\rangle\delta_{k,\ell} = |b^{(\ell)}\rangle.$$

$\boxed{\textit{Será que } UU^\dagger = \mathbb{1}?}$

$$U^\dagger U = (\sum_k |b^{(k)}\rangle\langle a^{(k)}|)^\dagger(\sum_\ell |b^{(\ell)}\rangle\langle a^{(\ell)}| = \sum_{k\ell} |a^{(k)}\rangle\delta_{k,\ell}\langle a^{(\ell)}| = \mathbb{1}$$

Matriz de Transformação I

É instrutivo estudar a representação matricial de U na base antiga $\{|a'\rangle\}$

$$\langle a^{(\ell)}|U|a^{(k)}\rangle = \langle a^{(\ell)}|(\sum_m |b^{(m)}\rangle \underbrace{\langle a^{(m)}|)|a^{(k)}\rangle}_{\delta_{m,k}} = \langle a^{(\ell)}|b^{(k)}\rangle$$

Ou seja, o elemento de matriz do operador de transformação da base antiga para a base nova é o produto escalar entre o bra da base antiga e ket da base nova. Tem uma analogia com a matriz de rotação de vetores do espaço tridimensional de $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ para $(\hat{x}', \hat{y}', \hat{z}')$, que pode ser escrita por:

$$R = \begin{pmatrix} \hat{x}.\hat{x}' & \hat{x}.\hat{y}' & \hat{x}.\hat{z}' \\ \hat{y}.\hat{x}' & \hat{y}.\hat{y}' & \hat{y}.\hat{z}' \\ \hat{z}.\hat{x}' & \hat{z}.\hat{y}' & \hat{z}.\hat{z}' \end{pmatrix}$$

A matriz feita pelos elementos $\langle a^{(\ell)}|U|a^{(k)}\rangle$ é conhecida por matriz de transformação da base $\{|a'\rangle\}$ para a base $\{|b'\rangle\}$.

Matriz de Transformação II

Conhecendo o ket $|\alpha\rangle$ na base $\{|a'\rangle\}$, como escrevê-lo na base $\{|b'\rangle\}$?

Ou seja, sabendo $|\alpha\rangle = \sum_{a'} |a'\rangle\langle a'|\alpha\rangle$, como obter $|\alpha\rangle = \sum_{b'} |b'\rangle\langle b'|\alpha\rangle$?

Para obter $|\alpha\rangle$ na nova base $\{|b^{(k)}\rangle\}$, use $\langle b^{(k)}|\alpha\rangle = \sum_{\ell} \langle b^{(k)}|a^{(\ell)}\rangle\langle a^{(\ell)}|\alpha\rangle$,

$$\langle a^{(\ell)}|b^{(k)}\rangle = \langle a^{(\ell)}|U|a^{(k)}\rangle$$

ou ainda, $\langle b^{(k)}|\alpha\rangle = \sum_{\ell} \langle a^{(\ell)}|b^{(k)}\rangle^* \langle a^{(\ell)}|\alpha\rangle = \sum_{\ell} \langle a^{(\ell)}|U|a^{(k)}\rangle^* \langle a^{(\ell)}|\alpha\rangle =$

$$= \sum_{\ell} \langle a^{(k)}|U^\dagger|a^{(\ell)}\rangle\langle a^{(\ell)}|\alpha\rangle \Longrightarrow (\text{Nova}) \ = (U^\dagger)\ (\text{Velha})$$

Como obter $\langle b^{(k)}|X|b^{(\ell)}\rangle$? Como $|b^{(\ell)}\rangle = U|a^{(\ell)}\rangle$ e $\langle b^{(k)}| = \langle a^{(k)}|U^\dagger$, temos

$$\langle b^{(k)}|X|b^{(\ell)}\rangle = \langle a^{(k)}|U^\dagger X U|a^{(\ell)}\rangle$$

$$\boxed{X' = U^\dagger X U \ \textit{ é conhecida por transformação de similaridade.}}$$

Matriz de Transformação III

Uma propriedade interessante de uma matriz é o traço, $trX \equiv \sum_{a'} \langle a'|X|a'\rangle$

$$trX = \sum_{a'} \langle a'|X|a'\rangle = \sum_{a'}\sum_{b'}\sum_{b''} \langle a'|b'\rangle\langle b'|X|b''\rangle\langle b''|a'\rangle =$$
$$= \sum_{b'}\sum_{b''} \langle b'|X|b''\rangle \Big(\sum_{a'} \langle b''|a'\rangle\langle a'|b'\rangle\Big) = \sum_{b'}\sum_{b''} \langle b'|X|b''\rangle \delta_{b'b''} =$$
$$= \sum_{b'} \langle b'|X|b'\rangle \text{ o traço não depende da representação}$$

Mostre que:

1) $tr(XY) = tr(YX)$;

2) $tr(U^\dagger XU) = tr(X)$;

3) $tr(|a'\rangle\langle a''|) = \delta_{a'a''}$;

4) $tr(|b'\rangle\langle a'|) = \langle a'|b'\rangle$

Autokets, autovalores e diagonalização de matrizes

Como resolver o problema $B|b^{(\ell)}\rangle = b^{(\ell)}|b^{(\ell)}\rangle$, supondo conhecida a base $\{|a^{(i)}\rangle\}$?

Multiplique pela esquerda pelo bra $\langle a^{(i)}|$ e use o operador unidade

$$\sum_k \langle a^{(i)}|B|a^{(k)}\rangle\langle a^{(k)}|b^{(\ell)}\rangle = b^{(\ell)}\langle a^{(i)}|b^{(\ell)}\rangle$$

O que transforma o problema em um problema matricial.

$$\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & \ldots \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & \ldots \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1^{(\ell)} \\ C_2^{(\ell)} \\ C_3^{(\ell)} \\ \vdots \end{pmatrix} = b^{(\ell)} \begin{pmatrix} C_1^{(\ell)} \\ C_2^{(\ell)} \\ C_3^{(\ell)} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

lousa

com $B_{i,j} = \langle a^{(i)}|B|a^{(j)}\rangle$ e $C_k^{(\ell)} = \langle a^{(k)}|b^{(\ell)}\rangle$. Conhecer $|b^{(\ell)}\rangle$ é conhecer suas componentes, pois $|b^{(\ell)}\rangle = \sum_k |a^{(k)}\rangle\langle a^{(k)}|b^{(\ell)}\rangle = \sum_k |a^{(k)}\rangle C_k^{(\ell)}$

Soluções não triviais só se $det(B - \lambda I) = 0$. Lembre que: Matrizes Hermiteanas são diagonalizáveis. Se a dimensão do espaço for N, a equação produz N valores de λ. Substituindo de volta cada $\lambda = b^{(\ell)}$, encontramos os $C_k^{(\ell)}$ a menos de um fator multiplicativo que encontramos normalizando $|b^{(\ell)}\rangle$.

Observáveis unitárias equivalentes

Teorema. Sejam $|a'\rangle$ e $|b'\rangle$ conectados pelo operador de transformação U, $U = \sum_k |b^{(k)}\rangle\langle a^{(k)}|$. Os operadores A e UAU^{-1} têm o mesmo espectro e são denominadas observáveis unitárias equivalentes.

multiplique por U e insira a unidade $\mathbb{1} = U^\dagger U = U^{-1}U$

Demo.: Se $A|a^{(\ell)}\rangle = a^{(\ell)}|a^{(\ell)}\rangle \longrightarrow UAU^{-1}U|a^{(\ell)}\rangle = a^{(\ell)}U|a^{(\ell)}\rangle$.

$\therefore A$ e UAU^{-1} têm o mesmo espectro, onde $\{|a^{(\ell)}\rangle\}$ são autokets de A e $\{U|a^{(\ell)}\rangle = |b^{\ell}\rangle\}$ são autokets de UAU^{-1}.

Por definição $B|b^{(\ell)}\rangle = b^{(\ell)}|b^{(\ell)}\rangle \therefore \{|b^{(\ell)}\rangle\}$ é uma base completa de autokets de B e de UAU^{-1}. Isso só acontece quando as observáveis são compatíveis.

Se são compatíveis, comutam. Mostre, portanto, que mesmo que $[A, B] \neq 0$, $[UAU^{-1}, B] = 0$ (dica: calcule $[UAU^{-1}, B]$ na base $\{|b^{(\ell)}\rangle\}$)

Um bom exemplo são as observáveis S_x e S_z. Elas não comutam, mas estão relacionadas por uma operação unitária (rotação de $\frac{\pi}{2}$ ao redor de y), e possuem o mesmo espectro. No caso $US_xU^{-1} = S_z$

Posição, Momento e Translação

- Um bom começo: Espectro contínuo. Considere

$$\xi|\xi'\rangle = \xi'|\xi'\rangle, \quad \xi = x, y, z, p_x, p_y, p_x, \text{etc.}$$

ξ é um operador, cujo espectro ξ' pode variar continuamente entre $-\infty$ e $+\infty$

- Faremos a seguinte analogia com o espectro discreto:

$$\langle a'|a''\rangle = \delta_{a'a''} \longrightarrow \langle \xi'|\xi''\rangle = \delta(\xi' - \xi'')$$

$$\sum_{a'} |a'\rangle\langle a'| = \mathbb{1} \longrightarrow \int d\xi' |\xi'\rangle\langle \xi'| = \mathbb{1}$$

$$|\alpha\rangle = \sum_{a'} |a'\rangle\langle a'|\alpha\rangle \longrightarrow |\alpha\rangle = \int d\xi' |\xi'\rangle\langle \xi'|\alpha\rangle$$

$$\sum_{a'} |\langle a'|\alpha\rangle|^2 = 1 \longrightarrow \int d\xi' |\langle \xi'|\alpha\rangle|^2 = 1$$

$$\langle \beta|\alpha\rangle = \sum_{a'} \langle \beta|a'\rangle\langle a'|\alpha\rangle \longrightarrow \langle \beta|\alpha\rangle = \int d\xi' \langle \beta|\xi'\rangle\langle \xi'|\alpha\rangle$$

$$\langle a''|A|a'\rangle = a'\delta_{a'a''} \longrightarrow \langle \xi''|\xi|\xi'\rangle = \xi'\delta(\xi'' - \xi')$$

Autokets de posição e medidas de posição

$$\underset{\text{operador}}{x}|x'\rangle = \underset{\text{número}}{x'}|x'\rangle$$

Suponha partícula no estado $|\alpha\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx'|x'\rangle\langle x'|\alpha\rangle$

Experimento de medir x, clica só quando ela estiver em x'. O estado $|\alpha\rangle$ muda abruptamente para $|x'\rangle$. Na prática, um intervalo pequeno ao redor de x', algo entre $x' - \dfrac{\Delta}{2}$ e $x' + \dfrac{\Delta}{2}$. Nestas condições o estado $|\alpha\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx'|x'\rangle\langle x'|\alpha\rangle$ colapsa, com a medida, para $\int_{x'-\frac{\Delta}{2}}^{x'+\frac{\Delta}{2}} dx''|x''\rangle\langle x''|\alpha\rangle$. Considerando que $\langle x''|\alpha\rangle$ varia pouco no intervalo, podemos escrever que a probabilidade de encontrar a partícula em x', é $|\langle x'|\alpha\rangle|^2 dx'$. Para escrever isso, assumimos $dx' = \Delta$.

de fato, entre x' e $x' + dx'$

função de onda

Note que $\int_{-\infty}^{+\infty} |\langle x'|\alpha\rangle|^2 dx' = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle\alpha|x'\rangle\langle x'|\alpha\rangle dx' = \langle\alpha|\alpha\rangle = 1$

Extrapolando para 3 dimensões

$$|\mathbf{x}'\rangle \equiv |x', y', z'\rangle$$
$$x|\mathbf{x}'\rangle = x'|\mathbf{x}'\rangle; \quad y|\mathbf{x}'\rangle = y'|\mathbf{x}'\rangle; \quad z|\mathbf{x}'\rangle = z'|\mathbf{x}'\rangle.$$

Assumiremos que $[x_i, x_j] = 0$ e que a base $\{|\mathbf{x}'\rangle\}$ é completa

x_i e $x_j = x, y, z$

Um estado $|\alpha\rangle$ de uma partícula em um espaço tridimensional pode, portanto, ser escrito por:

$$|\alpha\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} d^3x' |\mathbf{x}'\rangle\langle\mathbf{x}'|\alpha\rangle$$

Agora, a quantidade $d^3x'|\langle\mathbf{x}'|\alpha\rangle|^2$ representa a probabilidade de encontrar a partícula em $\mathbf{x}'$ dentro do elemento de volume d^3x'

Translação (deslocamento espacial)

Este operador atua em um estado $|\mathbf{x}'\rangle$ de uma partícula que se encontra em $\mathbf{x}'$ e a leva para um novo estado, agora $|\mathbf{x}'+d\mathbf{x}'\rangle$

$$\Im(d\mathbf{x}')|\mathbf{x}'\rangle = |\mathbf{x}' + d\mathbf{x}'\rangle$$

Operador de deslocamento infinitesimal

Fase igual a 1 por convenção

Note que $|\mathbf{x}'\rangle$ não é autoket de $\Im(d\mathbf{x}')$.

O efeito de $\Im(d\mathbf{x}')$ sobre $|\alpha\rangle \rightarrow \Im(d\mathbf{x}')|\alpha\rangle = \Im(d\mathbf{x}') \int d^3x' |\mathbf{x}'\rangle\langle\mathbf{x}'|\alpha\rangle$

$$= \int d^3x' |\mathbf{x}' + d\mathbf{x}'\rangle\langle\mathbf{x}'|\alpha\rangle$$

$$= \int d^3x' |\mathbf{x}'\rangle\langle\mathbf{x}' - d\mathbf{x}'|\alpha\rangle$$

função de onda calculada em $\mathbf{x}' - d\mathbf{x}'$

Propriedades do Operador de Translação

1) Se $|\alpha\rangle$ é normalizado $\rightarrow \Im(d\mathbf{x}')|\alpha\rangle$ também é normalizado

$\rightarrow \langle\alpha|\alpha\rangle = \langle\alpha|\Im^\dagger(d\mathbf{x}')\Im(d\mathbf{x}')|\alpha\rangle = 1$

basta $\rightarrow \Im^\dagger(d\mathbf{x}')\Im(d\mathbf{x}') = 1$

2) Translação primeiro em $d\mathbf{x}'$ e depois em $d\mathbf{x}''$ tem que resultar em $d\mathbf{x}' + d\mathbf{x}''$

$\Im(d\mathbf{x}'')\Im(d\mathbf{x}') = \Im(d\mathbf{x}' + d\mathbf{x}'')$

3) $\Im(-d\mathbf{x}') = \Im^{-1}(d\mathbf{x}')$

4) $\lim_{d\mathbf{x}'\rightarrow 0} \Im(d\mathbf{x}') = 1$ neste limite basta primeira ordem em $d\mathbf{x}'$

para representar $\Im(d\mathbf{x}')$. Adotaremos $\Im(d\mathbf{x}') = 1 - i\mathbf{K}.d\mathbf{x}'$

5) Se K_x, K_y, K_z forem operadores Hermiteanos, mostraremos que $\Im$ satisfaz as 3 primeiras propriedades

lousa

slide 8

Observe como chegamos em $\det(B-\lambda I)$

$$\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & \dots \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & \dots \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1^{(\ell)} \\ C_2^{(\ell)} \\ C_3^{(\ell)} \\ \vdots \end{pmatrix} = b^{(\ell)} \begin{pmatrix} C_1^{(\ell)} \\ C_2^{(\ell)} \\ C_3^{(\ell)} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^{(\ell)} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & b^{(\ell)} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & b^{(\ell)} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1^{(\ell)} \\ C_2^{(\ell)} \\ C_3^{(\ell)} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Note que tomamos $\lambda = b^{(\ell)}$ e com isso a equação que exige o determinante nulo acima fica clara, isto é:

$$\begin{pmatrix} B_{11}-\lambda & B_{12} & B_{13} & \dots \\ B_{21} & B_{22}-\lambda & B_{23} & \dots \\ B_{31} & B_{32} & B_{33}-\lambda & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1^{(\ell)} \\ C_2^{(\ell)} \\ C_3^{(\ell)} \\ \vdots \end{pmatrix} = 0$$