Enfoque de Schrödinger versus Enfoque de Heisenberg

Os kets evoluindo no tempo é a forma de Schrödinger olhar o problema. Uma outra maneira é deixar que as observáveis evoluam no tempo: é o enfoque de Heisenberg. Para discutí-lo, precisamos saber um pouco mais sobre operadores unitários.

Já vimos 3 tipos $\begin{cases} \text{a) um para mudanças de base, } U \\ \text{b) um para translação, } \Im(d\mathbf{x}) \\ \text{c) um para evolução temporal, } U(t, t_0) \end{cases}$

O tipo a) não muda o ket, só sua forma de representá-lo. Os tipos b) e c) mudam o ket.

Transformações unitárias que mudam os kets

lousa

Suponha $\begin{cases} |\alpha\rangle \longrightarrow U|\alpha\rangle \\ |\beta\rangle \longrightarrow U|\beta\rangle \end{cases}$ e note que $\langle\beta|\alpha\rangle \longrightarrow \langle\beta|U^\dagger U|\alpha\rangle = \langle\beta|\alpha\rangle$

Como fica o elemento de matriz?

$$\langle\beta|X|\alpha\rangle \longrightarrow (\langle\beta|U^\dagger)X(U|\alpha\rangle) = \langle\beta|(U^\dagger X U)|\alpha\rangle$$

O resultado é o mesmo

Por um lado, afetam os kets e não afetam os operadores

Por outro, não afetam os kets e afetam os operadores

Schrödinger X Heisenberg

Para o mesmo $\langle\beta|U^\dagger XU|\alpha\rangle$, temos $\begin{cases}\text{enfoque 1: } |\alpha\rangle \longrightarrow U|\alpha\rangle \text{ e } X \longrightarrow X \\ \text{enfoque 2: } |\alpha\rangle \longrightarrow |\alpha\rangle \text{ e } X \longrightarrow U^\dagger XU\end{cases}$

Exemplificando as diferenças de enfoque para deslocamentos espaciais

Enfoque 1: $\Im(d\mathbf{x}')$ afeta o ket, mas não muda o operador $\mathbf{x}$

kets mudam $|\alpha\rangle = \int d^3x'|\mathbf{x}'\rangle\langle\mathbf{x}'|\alpha\rangle \longrightarrow (1 - \frac{i\mathbf{p}.d\mathbf{x}'}{\hbar})|\alpha\rangle =$

$$= (1 - \frac{i\mathbf{p}.d\mathbf{x}'}{\hbar})\int d^3x'|\mathbf{x}'\rangle\langle\mathbf{x}'|\alpha\rangle = \int d^3x'|\mathbf{x}' + d\mathbf{x}'\rangle\langle\mathbf{x}'|\alpha\rangle$$

operadores não mudam $\mathbf{x} \longrightarrow \mathbf{x}$

Enfoque 2: $\Im(d\mathbf{x}')$ não afeta o ket, mas muda o operador $\mathbf{x}$

kets não mudam $|\alpha\rangle \longrightarrow |\alpha\rangle$

operadores mudam $\mathbf{x} \longrightarrow (1 + \frac{i\mathbf{p}.d\mathbf{x}'}{\hbar})\mathbf{x}(1 - \frac{i\mathbf{p}.d\mathbf{x}'}{\hbar})$

$$= \mathbf{x} + \frac{i}{\hbar}[\mathbf{p}.d\mathbf{x}', \mathbf{x}] + O(d\mathbf{x}')^2 = \mathbf{x} + \frac{i}{\hbar}[p_x dx' + p_y dy' + p_z dz', x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}]$$

$$= \mathbf{x} + \frac{i}{\hbar}\{dx'\hat{i}[p_x, x] + dy'\hat{j}[p_y, y] + dz'\hat{k}[p_z, z]\} = \mathbf{x} + d\mathbf{x}'$$

cuidado $d\mathbf{x}'$ não é operador. É $d\mathbf{x}'\mathbb{1}$

Schrödinger X Heisenberg

Quanto muda o elemento de matriz $\langle\alpha|\mathbf{x}|\alpha\rangle$, segundo os dois enfoques?

No enfoque 1. Use resultado do slide anterior:

$$\langle\alpha|\mathbf{x}|\alpha\rangle \to \left\{\int d^3x''\langle\alpha|\mathbf{x}''\rangle\langle\mathbf{x}''+d\mathbf{x}'|\right\}\mathbf{x}\left\{\int d^3x'|\mathbf{x}'+d\mathbf{x}'\rangle\langle\mathbf{x}'|\alpha\rangle\right\}$$

$$=\int d^3x''\int d^3x'\langle\alpha|\mathbf{x}''\rangle(\mathbf{x}'+d\mathbf{x}')\langle\mathbf{x}''+d\mathbf{x}'|\mathbf{x}'+d\mathbf{x}'\rangle\langle\mathbf{x}'|\alpha\rangle\}=$$

$$=\int d^3x''\int d^3x'\langle\alpha|\mathbf{x}''\rangle(\mathbf{x}'+d\mathbf{x}')\delta(\mathbf{x}''-\mathbf{x}')\langle\mathbf{x}'|\alpha\rangle\}=$$

$$=\int d^3x'\langle\alpha|\mathbf{x}'\rangle(\mathbf{x}'+d\mathbf{x}')\langle\mathbf{x}'|\alpha\rangle=\int d^3x'\langle\alpha|(\mathbf{x}'+d\mathbf{x}')|\mathbf{x}'\rangle\langle\mathbf{x}'|\alpha\rangle=$$

$$=\int d^3x'\langle\alpha|(\mathbf{x}+d\mathbf{x}')|\mathbf{x}'\rangle\langle\mathbf{x}'|\alpha\rangle=\langle\alpha|(\mathbf{x}+d\mathbf{x}')|\alpha\rangle=\langle\mathbf{x}\rangle_\alpha+\langle d\mathbf{x}'\rangle_\alpha$$

No enfoque 2. Use resultado do slide anterior e obtenha, diretamente:

$$\langle\alpha|(\mathbf{x}+d\mathbf{x}')|\alpha\rangle=\langle\mathbf{x}\rangle_\alpha+\langle d\mathbf{x}'\rangle_\alpha$$

Estados (kets) e observáveis segundo Schrödinger e Heisenberg

$U(t,t_0)$ tem papel chave na estória $\begin{cases} \text{Enfoque 1} & \longrightarrow & \text{Schrödinger} \\ \text{Enfoque 2} & \longrightarrow & \text{Heisenberg} \end{cases}$

No enfoque de Schrödinger, as observáveis não evoluem no tempo. Os kets mudam de acordo com $U(t,t_0)$, como já vimos.

No enfoque de Heisenberg os kets não evoluem no tempo e as observáveis evoluem com auxílio de $U(t,t_0)$.

Para simplificar, tomaremos

$U(t, t_0 = 0) = U(t) = \exp\left(-i\dfrac{Ht}{\hbar}\right)$ e a seguinte notação:

$A^{(H)}(t) = U^\dagger(t) A^{(S)} U(t).$

Assim, para $t=0$, temos $A^{(H)}(0) = A^{(S)}$ (pois, $U^\dagger(0) = U(0) = 1$) e

$|\alpha, t_0 = 0, t\rangle_S = U(t)|\alpha, t_0 = 0\rangle$

$|\alpha, t_0 = 0, t\rangle_H = |\alpha, t_0 = 0\rangle \; \forall t$

Quanto vale o valor esperado de A em t nos dois enfoques?

$$_S\langle\alpha, t_0 = 0, t|A^{(S)}|\alpha, t_0 = 0, t\rangle_S = \langle\alpha, t_0 = 0|U^\dagger(t)A^{(S)}U(t)|\alpha, t_0 = 0\rangle =$$

$$= {}_H\langle\alpha, t_0 = 0, t|A^{(H)}|\alpha, t_0 = 0, t\rangle_H$$

Equação de movimento de Heisenberg

Consideraremos $A^{(S)}(t) = A^{(S)}$, sem dependência explícita com o tempo.

Comece por $A^{(H)}(t) = U^\dagger(t) A^{(S)} U(t)$, e derive esta equação com respeito ao tempo

$$\frac{dA^{(H)}}{dt} = \frac{\partial U^\dagger(t)}{\partial t} A^{(S)} U(t) + U^\dagger(t) A^{(S)} \frac{\partial U(t)}{\partial t}$$

mas, $\quad i\hbar \dfrac{\partial U}{\partial t} = HU \;\therefore\; \dfrac{\partial U}{\partial t} = \dfrac{1}{i\hbar} HU \quad$ e $\quad \dfrac{\partial U^\dagger}{\partial t} = -\dfrac{1}{i\hbar} U^\dagger H.$

Assim, $\quad \dfrac{dA^{(H)}}{dt} = -\dfrac{1}{i\hbar} U^\dagger(t) H A^{(S)} U(t) + U^\dagger(t) A^{(S)} \dfrac{1}{i\hbar} HU(t) =$

$$= -\frac{1}{i\hbar} U^\dagger(t) H \underbrace{U(t) U^\dagger(t)}_{\mathbf{1}} A^{(S)} U(t) + \frac{1}{i\hbar} U^\dagger(t) A^{(S)} \underbrace{U(t) U^\dagger(t)}_{\mathbf{1}} HU(t)$$

lousa

$$= -\frac{1}{i\hbar} H^{(H)} A^{(H)} + \frac{1}{i\hbar} A^{(H)} H^{(H)} = \frac{1}{i\hbar} \left[A^{(H)}, H^{(H)} \right]$$

mas, $\quad H^{(H)} = U^\dagger(t) H^{(S)} U(t) = \exp\left(\dfrac{iHt}{\hbar}\right) H \exp\left(-\dfrac{iHt}{\hbar}\right) = H.$

Assim, finalmente, temos a equação de Heisenberg:

$$\frac{dA^{(H)}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \left[A^{(H)}, H \right]$$

Equação de movimento de Heisenberg

A equação de Heisenberg: $\frac{dA^{(H)}}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\left[A^{(H)}, H\right]$ é muito similar à equação clássica de movimento $\frac{dA}{dt} = \left[A, H\right]_{\text{clássico}}$

Note, entretanto, que a equação quântica tem sentido, mesmo quando não existe análogo clássico, como é o caso de spin:

$\frac{dS_i^{(H)}}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\left[S_i^{(H)}, H\right] \to S_i^{(H)}$ não pode ser escrito em termos de p e $q's$.

Assim, é melhor virar a ordem da flecha

de $\quad \left[A, H\right]_{\text{clássico}} \to \frac{1}{i\hbar}\left[A^{(H)}, H\right]$

para $\quad \frac{1}{i\hbar}\left[A^{(H)}, H\right] \to \left[A, H\right]_{\text{clássico}}$

Clássica pode ser deduzida da quântica, vice-versa nem sempre.

Construindo a Hamiltoniana Quântica

Precisamos aprender a construir a Hamiltoniana na Mecânica Quântica. Faça o seguinte:

1) Quando tem análogo clássico, usaremos a Hamiltoniana clássica. Simplesmente trocaremos as variáveis clássicas x_i e p_i por operadores correspondentes. Veremos que com esta hipótese, poderemos reproduzir as equações clássicas corretas no limite clássico. Caso a Hamiltoniana clássica não seja simétrica com respeito à operadores que não comutam entre si, torne-a simétrica. Por exemplo, se $H = xp$, use $H = \frac{1}{2}(xp + px)$.

2) Quando não tem análogo clássico, "chute" H e veja se os resultados reproduzem a experiência.

Para F e G expandíveis em série de potências, vale: $\begin{cases} [x_i, F(\mathbf{p})] = i\hbar \frac{\partial F}{\partial p_i} \\ \\ [p_i, G(\mathbf{x})] = -i\hbar \frac{\partial G}{\partial x_i} \end{cases}$

Construindo a Hamiltoniana Quântica

Para provar a relação $[x_i, F(\mathbf{p})] = i\hbar\frac{\partial F}{\partial p_i}$, comece pela expansão em p_i de $F(\mathbf{p})$

$$F(\mathbf{p}) = F(\mathbf{p})\Big|_{(p_i=0)} + \frac{1}{1!}\frac{\partial F}{\partial p_i}(\mathbf{p})\Big|_{(p_i=0)} p_i^1 + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 F}{\partial p_i^2}(\mathbf{p})\Big|_{(p_i=0)} p_i^2 + \ldots +$$
$$+ \frac{1}{n!}\frac{\partial^n F}{\partial p_i^n}(\mathbf{p})\Big|_{(p_i=0)} p_i^n + \ldots$$

Primeiro, derive a expressão acima com respeito à p_i

$$\frac{\partial F}{\partial p_i} = \frac{1}{1!}\frac{\partial F}{\partial p_i}(\mathbf{p})\Big|_{(p_i=0)} p_i^0 + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 F}{\partial p_i^2}(\mathbf{p})\Big|_{(p_i=0)} 2p_i^1 + \ldots +$$
$$+ \frac{1}{n!}\frac{\partial^n F}{\partial p_i^n}(\mathbf{p})\Big|_{(p_i=0)} np_i^{n-1} + \ldots$$

depois, compare com $[x_i, F(\mathbf{p})]$, usando a expansão de $F(\mathbf{p})$ e as regras de comutação abaixo:

$$[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{i,j}; \quad [x_i, p_j^2] = [x_i, p_j]p_j + p_j[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{i,j}p_j + i\hbar\delta_{i,j}p_j = 2i\hbar p_j\delta_{i,j};$$
$$[x_i, p_j^3] = [x_i, p_j]p_j^2 + p_j[x_i, p_j^2] = i\hbar\delta_{i,j}p_j^2 + 2i\hbar\delta_{i,j}p_j^2 = 3i\hbar p_j^2\delta_{i,j}; \quad \ldots$$

$[x_i, p_j^n] = ni\hbar p_j^{n-1}\delta_{i,j};$ ... etc. (faça por indução finita)

lousa

De forma similar é possível mostrar que $[p_i, G(\mathbf{x})] = -i\hbar\frac{\partial G}{\partial x_i}$

Equação de Heisenberg para uma partícula livre

Suponha uma partícula livre de massa m. Como seria a Hamiltoniana? Que tal?

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m}$$

O futuro será definido pela equação

$$\frac{dp_i^{(H)}}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[p_i^{(H)}, H] = 0$$

ou seja, para uma partícula livre, o operador momento é uma constante

de movimento $p_i^{(H)}(t) = p_i^{(H)}(0) = p_i^{(S)}(0) = p_i$

É possível generalizar. Se $[A^{(H)}, H] = 0 \rightarrow A^{(H)}$ é constante de movimento.

Como fica $x_i^{(H)}(t)$? Basta resolver a equação de Heisenberg para este operador

$$\frac{dx_i^{(H)}}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[x_i^{(H)}, H] = \frac{1}{i\hbar}[x_i^{(H)}, \sum_j \frac{p_j^2}{2m}] = \frac{1}{i\hbar 2m} i\hbar \frac{\partial}{\partial p_i} \sum_j p_j^2 = \frac{p_i}{m}$$

ou seja, $\dfrac{dx_i^{(H)}}{dt} = \dfrac{p_i}{m} \;\therefore\; x_i^{(H)}(t) = x_i^{(H)}(0) + \dfrac{p_i}{m}t$. Cuidado! $[x_i^{(H)}(0), x_j^{(H)}(0)] = 0$,

mas $[x_i^{(H)}(t), x_i^{(H)}(0)] = [x_i^{(H)}(0) + \dfrac{p_i}{m}t, x_i^{(H)}(0)] = \dfrac{t}{m}[p_i, x_i^{(H)}(0)] = -\dfrac{i\hbar t}{m}$

Isto tem consequências interessantes!

Equação de Heisenberg para uma partícula livre

De $[x_i^{(H)}(t), x_i^{(H)}(0)] = -\dfrac{i\hbar t}{m}$

e da expressão $\langle(\Delta A)^2\rangle\langle(\Delta B)^2\rangle \geq \dfrac{1}{4}|\langle[A,B]\rangle|^2$, onde A e B são observáveis,

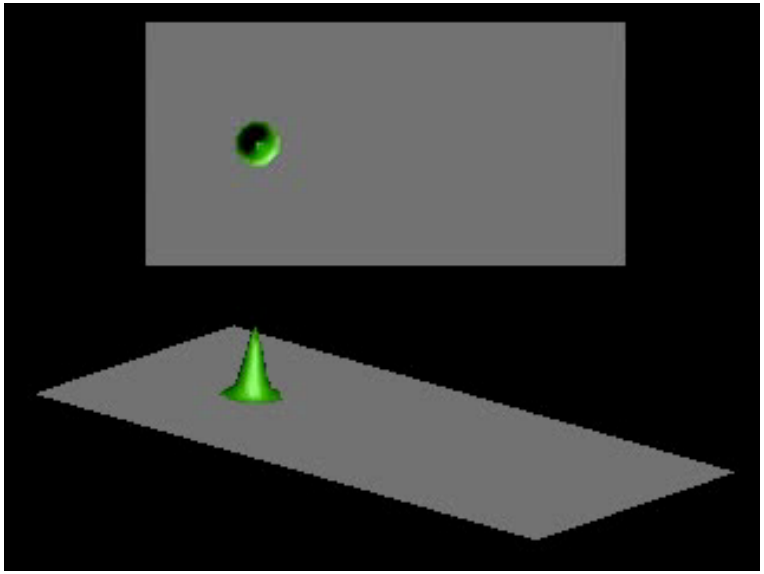
tiramos:

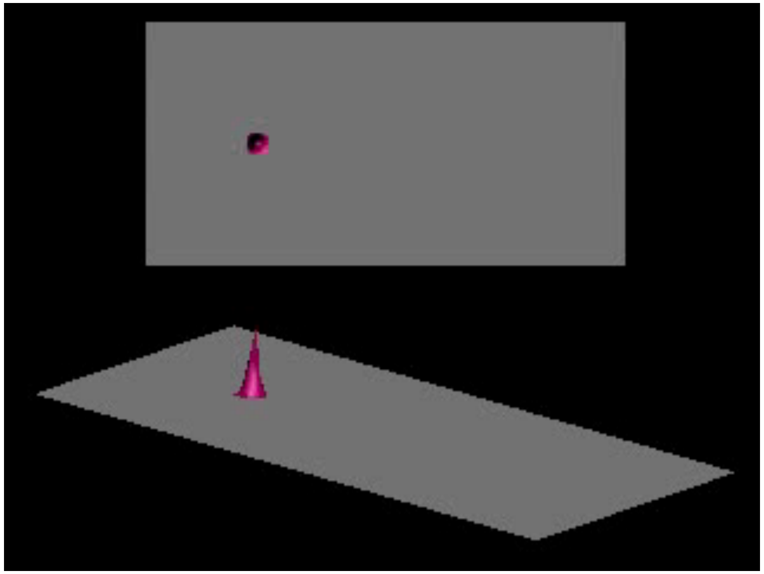
$\langle(\Delta x_i^{(H)})^2\rangle_t \langle(\Delta x_i^{(H)})^2\rangle_{t=0} \geq \dfrac{\hbar^2 t^2}{4m^2}$ (o mesmo vale no enfoque de Schrödinger?)

Mesmo se $\langle(\Delta x_i^{(H)})^2\rangle_{t=0}$ for pequeno (a partícula bem localizada em t=0),

Um voluntário para explorar o tema?

$\langle(\Delta x_i^{(H)})^2\rangle_t$ vai crescer, pelo menos com $\dfrac{\hbar^2 t^2}{4m^2}$, e o pacote vai abrir.





Para ver as animações, visite: **http://www.embd.be/quantummechanics/**

Equação de Heisenberg para uma partícula em um potencial

Adicionemos um potencial $V(\mathbf{x})$. Teremos, então, $H = \dfrac{p^2}{2m} + V(\mathbf{x})$ e as equações de Heisenberg para x_i e p_i,
$$\begin{cases} \frac{dp_i}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[p_i, V(\mathbf{x})] = -\frac{\partial}{\partial x_i} V(\mathbf{x}) \\ \\ \frac{dx_i}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[x_i, \frac{p^2}{2m}] = \frac{p_i}{m} \end{cases}$$

Derivando a segunda equação com relação ao tempo e, fazendo uso da primeira, obtemos

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{1}{i\hbar}[\frac{dx_i}{dt}, H] = \frac{1}{i\hbar}[\frac{p_i}{m}, H] = \frac{1}{m}\frac{dp_i}{dt} = -\frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial x_i} V(\mathbf{x}).$$

$$\therefore \quad m\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\nabla V(\mathbf{x}).$$

Tirando média (estado $|\alpha\rangle$), temos :

$$\underbrace{m\frac{d^2}{dt^2}\langle \mathbf{x} \rangle = \frac{d\langle \mathbf{p} \rangle}{dt} = -\langle \nabla V(\mathbf{x}) \rangle} \quad \text{(note que não depende de } \hbar)$$

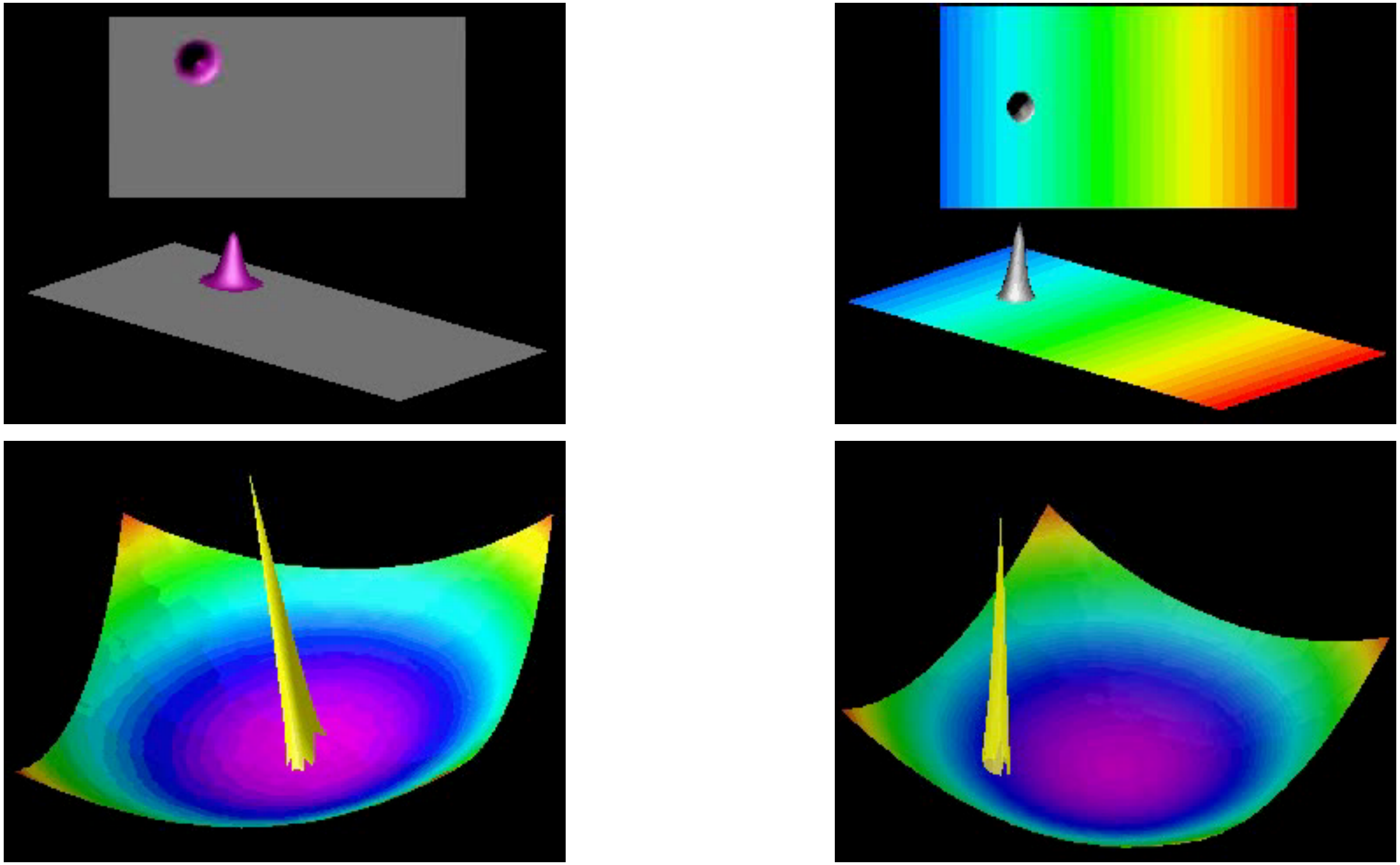
Equação de Ehrenfest (induz a idéia que o centro do pacote é clássico).

Cuidado com a diferença entre $-\langle \nabla V(\mathbf{x}) \rangle$ e $-\nabla V(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\langle \mathbf{x} \rangle}$

Teorema de Ehrenfest

Teorema de Ehrenfest (induz a idéia que o centro do pacote é clássico)

$$m\frac{d^2}{dt^2}\langle \mathbf{x}\rangle = \frac{d\langle \mathbf{p}\rangle}{dt} = -\langle \nabla V(\mathbf{x})\rangle$$



Para ver as animações, visite: **http://www.embd.be/quantummechanics/**

Base de kets e amplitudes de transição

Até o momento, não discutimos como a base de kets evolui no tempo. No enfoque de Schrödinger, a base é obtida com auxílio de uma observável A, que não depende explicitamente do tempo, e portanto a base não depende do tempo. No enfoque de Heisenberg, a observável A evolui no tempo e, devemos esperar que a base também evolua. Ou seja, o fato do ket estado ficar constante no tempo no enfoque de Heisenberg, não implica que a base de kets também fique.

No enfoque de Schrödinger, temos: $A|a'\rangle = a'|a'\rangle \rightarrow$ base $\{|a'\rangle\}$ não evolui no tempo.

O que mudaria no enfoque de Heisenberg, lembrando que: $A^{(H)}(t) = U^\dagger A(0) U$?

Inseri I multipliquei por

Comece com $A|a'\rangle = a'|a'\rangle \rightarrow A\overbrace{UU^\dagger}^{\text{Inseri I}}|a'\rangle = a'|a'\rangle \rightarrow U^\dagger AUU^\dagger|a'\rangle = a'U^\dagger|a'\rangle$
e obtenha $A^{(H)}|a',t\rangle_H = a'|a',t\rangle_H$ com $|a',t\rangle_H = U^\dagger|a'\rangle \rightarrow$ base de Heisenberg feitas de kets $\rightarrow \{|a',t\rangle_H\} = \{U^\dagger|a'\rangle\}$ que evoluem no tempo.

Base de kets e amplitudes de transição

Observe que os kets da base de Heisenberg $\{|a',t\rangle_H\}$, onde $|a',t\rangle_H = U^\dagger(t,0)|a'\rangle$ evoluem ao contrário no tempo (efeito do $U^\dagger$).

Como U satisfaz a equação de Schrödinger, temos que

$$\{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}U(t) = HU(t)\}^\dagger \longrightarrow -i\hbar\frac{\partial}{\partial t}U^\dagger(t) = HU^\dagger(t)$$

satisfaz uma equação de Schrödinger com sinal trocado. Aplicando esta equação em um ket $|a'\rangle$, encontramos que kets da base de Heisenberg, também satisfazem a equação de Schödinger com sinal trocado

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial t}U^\dagger(t)|a'\rangle = HU^\dagger(t)|a'\rangle \rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|a',t\rangle_H = -H|a',t\rangle_H$$

A observável $A^{(H)}(t)$ nesta base, fica

$$A^{(H)}(t) = \sum_{a'} A^{(H)}(t)|a',t\rangle_{H\,H}\langle a',t| = \sum_{a'} a'|a',t\rangle_{H\,H}\langle a',t| =$$

$$= \sum_{a'} U^\dagger(t)a'|a'\rangle\langle a'|U(t) = U^\dagger(t)\{\sum_{a'} a'|a'\rangle\langle a'|\}U(t)$$

$$= U^\dagger(t)A^{(S)}U(t)$$ o que é consistente.

Probabilidade de uma medida nos dois enfoques

Uma boa pergunta é: Na representação da observável A, quanto valem os coeficientes de expansão de um ket genérico de Heisenberg $|\alpha\rangle_H = |\alpha, t=0\rangle_S$ que no enfoque de Schrödinger é dado por $|\alpha, t=0, t\rangle_S$?

Queremos comparar

$$|\alpha, t=0, t\rangle_S = \sum_{a'} C_{a'}^{(S)}(t)|a'\rangle \text{ com } |\alpha\rangle_H = |\alpha, t=0\rangle_S = \sum_{a'} C_{a'}^{(H)}|a', t\rangle_H$$

$$\text{e temos: } \begin{cases} C_{a'}^{(S)}(t) = \langle a'|\alpha, t=0, t\rangle_S = \langle a'|(U(t,0)|\alpha, t=0\rangle_S \rightarrow \text{ Schrödinger} \\ \\ C_{a'}^{(H)}(t) = \underbrace{(\langle a'|U)}_{\text{bra do ket } U^\dagger(t,0)|a'\rangle}|\alpha, t=0\rangle_S \rightarrow \text{ Heisenberg} \end{cases}$$

Encontramos $C_{a'}^{(S)}(t) = C_{a'}^{(H)}(t) = \langle a'|(U(t,0)|\alpha, t=0\rangle_S$ o que é bom, pois tratam-se das amplitudes de probabilidade de medir A e encontrar a'. (Precisavam ser iguais).

Probabilidade de uma medida nos dois enfoques

Uma outra boa pergunta é: Suponha sistema tal que em $t = 0$, medimos A e encontramos a'. No instante t, qual a probabilidade de medindo B encontrarmos b'?

Enfoque de Schrödinger

$$|\alpha\rangle \overset{mede\ A}{\longrightarrow} |a'\rangle \overset{t}{\longrightarrow} \begin{cases} U(t)|a'\rangle \text{ ket evolui} \\ A \text{ operadores NÃO evoluem} \\ B \to \therefore \text{ base NÃO evolui} \end{cases} \overset{mede\ B}{\longrightarrow} \langle b'|(U|a'\rangle)$$

Enfoque de Heisenberg

$$|\alpha\rangle \overset{mede\ A(0)}{\longrightarrow} |a'\rangle \overset{t}{\longrightarrow} \begin{cases} |a'\rangle \text{ ket NÃO evolui} \\ A(t) \text{ operadores evoluem} \\ B(t) \to \therefore \text{ base evolui: } U^\dagger(t)|b'\rangle \end{cases} \overset{mede\ B(t)}{\longrightarrow} (\underbrace{\langle b'|U)}|a'\rangle$$

Ambas podem ser escritas por $\langle b'|U(t,0)|a'\rangle$, amplitude de probabilidade da transição de $|a'\rangle$ para $|b'\rangle$.

Slide 1

Lousa

- Como posso ler $\langle\beta|U^\dagger U|\alpha\rangle = \langle\beta|\alpha\rangle$?

A chance de encontrar $|\beta\rangle$, estando o sistema em $|\alpha\rangle$, não muda com o tempo, desde que ambos evoluam sob a influência da mesma Hamiltoniana.

Slide 5

- $U^\dagger U = \mathbb{1} \rightarrow UU^\dagger = \mathbb{1}$?

Multiplique a primeira por U pela esquerda e por $U^\dagger$ pela direita, para obter

$$UU^\dagger UU^\dagger = U\mathbb{1}U^\dagger = UU^\dagger \rightarrow (UU^\dagger)^2 = UU^\dagger \rightarrow UU^\dagger = \mathbb{1}.$$

Se preferir, multiplique a equação em vermelho por $(UU^\dagger)^{-1}$.

- Note também que $[x,p] = i\hbar$ pode ser escrito por

$$U^\dagger[x,p]U = U^\dagger i\hbar U$$

$$U^\dagger(xp - px)U = i\hbar$$

$$U^\dagger xUU^\dagger pU - U^\dagger pUU^\dagger xU = i\hbar$$

$$x^{(H)}p^{(H)} - p^{(H)}x^{(H)} = i\hbar \Rightarrow [x^{(H)}, p^{(H)}] = i\hbar$$

Slide 8

- Se convença que se $[A,H] = f(x,p) \Rightarrow [A^{(H)}, H] = f(x^{(H)}, p^{(H)})$

Por isso, muitas vezes vamos omitir o super-escrito (H)