

## Campo de Radiação Clássico: Aproximação de dipolo elétrico

Na aula passada obtivemos a seção de choque de transição do nível  $|i\rangle$  para o nível  $|n\rangle$  devido a interação de um campo clássico com um átomo. A expressão obtida foi:

$$\sigma_{\text{abs}} = \frac{4\pi^2 \hbar}{m_e^2 \omega} \left( \frac{e^2}{\hbar c} \right) |\langle n | e^{i\frac{\omega}{c} \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x}} \hat{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{p} | i \rangle|^2 \delta(E_n - E_i - \hbar\omega)$$

Hoje, vamos estudar a chamada aproximação de dipolo elétrico.

A base da aproximação:  $\lambda_{\text{luz incidente}} \gg$  dimensões atômicas

$$\frac{\omega}{c} = 2\pi \frac{\nu}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \ll 1 \Rightarrow e^{i(\omega/c)\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x}} = 1 + i\frac{\omega}{c}\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x} + \dots \approx 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{esta é a} \\ \text{aproximação} \end{array} \right.$$

Explorando um pouco mais as limitações da aproximação.

Olhe <http://lectureonline.cl.msu.edu/~mmp/applist/Spectrum/s.htm>

Para as transições eletrônicas, quanto vale  $\hbar\omega$ ? Deve ser da ordem do

espaçamento entre níveis atômicos. Que tal  $\hbar\omega \sim \frac{Ze^2}{R_{\text{atom}}} \therefore \omega \sim \frac{Ze^2}{\hbar R_{\text{atom}}}$

mas então,  $\lambda = \frac{c}{\omega} = \frac{\hbar c}{Ze^2} R_{\text{atom}} = \frac{137}{Z} R_{\text{atom}} \Rightarrow \lambda \gg R_{\text{atom}}$

## Campo de Radiação Clássico: Aproximação de dipolo elétrico

Quando calculamos o elemento de matriz  $\langle n | e^{i\frac{\omega}{c}\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{x}} \hat{\mathbf{e}}\cdot\mathbf{p} | i \rangle$ , na representação das coordenadas,  $|\langle \mathbf{x}' | i \rangle| \approx 0$  se  $|\mathbf{x}'| > R_{\text{atom}}$ . Assim, se  $\frac{\omega}{c}\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{x} \approx 0$  para  $|\mathbf{x}| \approx R_{\text{atom}}$  a condição de aproximação de dipolo elétrico estará satisfeita. Portanto, basta ter  $\frac{\omega}{c}|\mathbf{x}| \Big|_{\text{região com } |\langle \mathbf{x}' | i \rangle| \neq 0} \ll 1$ . O caso extremo é para  $|\mathbf{r}| = |R_{\text{atom}}|$ . Assim, podemos escrever  $\frac{|\mathbf{x}|}{\lambda} \Big|_{|\mathbf{x}|=R_{\text{atom}}} = \frac{R_{\text{atom}}}{\lambda} \approx \frac{Z}{137} \ll 1$  (para  $\omega \sim \frac{Ze^2}{\hbar R_{\text{atom}}}$ ).

A aproximação de dipolo permite simplificar  $\langle n | e^{i\frac{\omega}{c}\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{x}} \hat{\mathbf{e}}\cdot\mathbf{p} | i \rangle \approx \hat{\mathbf{e}}\cdot\langle n | \mathbf{p} | i \rangle$

Tomando  $\hat{\mathbf{e}}$  ao longo de  $\hat{\mathbf{x}}$ ,  $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{z}}$ , e lembrando que  $[x, H_0] = \frac{i\hbar p_x}{m}$  temos:

$$\langle n | p_x | i \rangle = \frac{m}{i\hbar} \langle n | [x, H_0] | i \rangle = \frac{m}{i\hbar} (E_i - E_n) \langle n | x | i \rangle = im\omega_{ni} \underbrace{\langle n | x | i \rangle}$$

*operador de dipolo que dá origem ao nome aproximação de dipolo elétrico.*

Nesta aproximação, a seção de choque de absorção é dada por:

$$\sigma_{\text{abs}} = 4\pi^2 \alpha \omega_{ni} |\langle n | x | i \rangle|^2 \delta(\omega - \omega_{ni})$$

## Campo de Radiação Clássico

Se integrarmos (e somarmos sobre todos os estados finais), temos

$$\int \sigma_{\text{abs}} d\omega = \sum_n 4\pi^2 \alpha \omega_{ni} |\langle n|x|i \rangle|^2$$

Força de oscilador

Ao definir  $f_{ni} = \frac{2m\omega_{ni}}{\hbar} |\langle n|x|i \rangle|^2$  é possível mostrar que  $\sum_n f_{ni} = 1$ .

Para isso, calcule  $\langle i|[x, [x, H_0]]|i \rangle$ , utilizando a relação  $\mathbb{1} = \sum_n |n\rangle\langle n|$

em  $[x, [x, H_0]] = [x, \frac{i\hbar}{m} p_x] = \frac{i\hbar}{m} [x, p_x] = \frac{i\hbar}{m} i\hbar = -\frac{\hbar^2}{m}$  e conclua

$$\int \sigma_{\text{abs}} d\omega = 4\pi^2 \alpha \left( \sum_n \frac{2m\omega_{ni}}{\hbar} |\langle n|x|i \rangle|^2 \right) \frac{\hbar}{2m} = 2\pi^2 \frac{\alpha \hbar}{m} = 2\pi^2 c \left( \frac{e^2}{mc^2} \right) \begin{cases} \text{resultado} \\ \text{clássico} \end{cases}$$

### Efeito fotoelétrico

Basicamente, trata-se da transição, devido à um campo de radiação, de um elétron em um estado ligado  $|i\rangle$  do átomo para um estado do contínuo  $|n\rangle = |\mathbf{k}_f\rangle$  de energia positiva. O estado final pode ser descrito por uma onda plana se o elétron sair rapidamente de perto do átomo. Para aplicar a fórmula obtida para  $\sigma_{\text{abs}}$ , precisamos definir a densidade de estados finais e integrar com  $\delta(\omega_{ni} - \omega)$ .

Para obter a densidade de estados, usamos condições periódicas de contorno da caixa, de aresta  $L$ , como fizemos em FI001 e resumiremos a seguir.

## Efeito Fotoelétrico

Condições periódicas de contorno da caixa, de aresta  $L$ , fornece  $\langle \mathbf{x} | \mathbf{k}_f \rangle = \frac{e^{i\mathbf{k}_f \cdot \mathbf{x}}}{L^{3/2}}$

com  $k_{f_{i=x,y,z}} = \frac{2\pi}{L} n_i$ , e  $n_i$  inteiro positivo ou negativo. A energia de uma partícula nesta caixa é

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2 (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{(2\pi)^2}{L^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) = \frac{\hbar^2 n^2}{2m} \frac{(2\pi)^2}{L^2}$$

Para calcular  $\rho(E)dE$  (número de estados com energia entre  $E$  e  $E + dE$ ), podemos imaginar uma folha esférica de raio  $n$  e espessura  $dn$ . O número de estados nesta folha espessa é:  $4\pi n^2 dn$ . Se quiséssemos apenas o número de estados em um pequeno volume desta casca esférica, definido pelo ângulo sólido  $d\Omega$ , bastaria trocar  $4\pi$  por  $d\Omega$ , isto é  $d\Omega n^2 dn$ . Com isso,  $\rho(E)dE$  pode ser escrito na forma  $\rho(E)dE = d\Omega n^2 dn$  e assim, obtemos

$$\rho(E) = d\Omega n^2 \frac{dn}{dE} = d\Omega n^2 \frac{1}{\frac{dE}{dn}} = d\Omega \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 \frac{m}{\hbar^2} \frac{n^2}{n} = \frac{mk}{\hbar^2} \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 d\Omega$$

Pense em  $dE$  como a energia total dentro do elemento de “volume”  $d\Omega n^2 dn$  que contém estados com energia entre  $E$  e  $E + dE$ . A dedução da seção de choque diferencial do efeito fotoelétrico para elétrons emitidos na direção  $\hat{\mathbf{k}}_f$ , dentro do ângulo sólido  $d\Omega$ , definida por  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ , fica para casa.

## Deslocamento de energia e largura de decaimento

Até aqui estudamos a probabilidade de haver mudança,  $n \neq i$ . É interessante analisar o caso onde o estado final é igual ao estado inicial, ou seja ver o que acontece com  $c_i(t)$ . Para evitar mudanças bruscas na Hamiltoniana, propomos aumentar a intensidade da perturbação gradualmente. No passado remoto,  $t \rightarrow -\infty \Rightarrow V(t) = 0$ , com o passar do tempo,  $V(t)$  vai surgindo até que em  $t \sim 0$  tem o valor desejado. A proposta é  $V(t) = e^{\eta t} V$  com  $V$  independente do tempo e  $\eta$  positivo e pequeno. No fim faremos  $\eta \rightarrow 0$  (potencial constante o tempo todo), e faremos ligação deste assunto com teoria de perturbação independente do tempo. O que será possível pois  $V(t) \rightarrow V$  quando  $\eta \rightarrow 0$ . Como fica  $c_n(t)$  (ainda para  $n \neq i$ )? Para  $t_0 = -\infty$ , temos:

$c_n^{(0)} = \delta_{ni} = 0$  (não depende do tempo e informa que o estado  $i$  é o inicial)

$$c_n^{(1)} = -\frac{i}{\hbar} V_{ni} \int_{-\infty}^t e^{\eta t'} e^{i\omega_{ni}t'} dt' = -\frac{i}{\hbar} V_{ni} \frac{e^{(\eta+i\omega_{ni})t'}}{n+i\omega_{ni}} \Big|_{-\infty}^t = -\frac{i}{\hbar} V_{ni} \frac{e^{(\eta+i\omega_{ni})t}}{\eta+i\omega_{ni}}$$

$$\therefore |c_n(t)|^2 \approx |c_n^{(1)}(t)|^2 = \frac{|V_{ni}|^2}{\hbar^2} \frac{e^{2\eta t}}{\eta^2 + \omega_{ni}^2} \text{ e nestas condições:}$$

$$\frac{d}{dt} |c_n(t)|^2 = 2 \frac{|V_{ni}|^2}{\hbar^2} \left( \frac{\eta e^{2\eta t}}{\eta^2 + \omega_{ni}^2} \right).$$

*Em seguida, tomaremos o limite  $\eta \rightarrow 0$ .*

## Deslocamento de energia e largura de decaimento

Lembrando que  $\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\eta}{\eta^2 + \omega_{ni}^2} = \pi \delta(\omega_{ni})$ ,

temos  $\frac{d}{dt} |c_n(t)|^2 = \frac{2\pi |V_{ni}|^2}{\hbar^2} \delta(\omega_{ni}) = \frac{2\pi |V_{ni}|^2}{\hbar^2} \underbrace{\hbar \delta(E_n - E_i)}_{\delta\left(\frac{E_n - E_i}{\hbar}\right)}$ . Ou ainda,

$$\omega_{i \rightarrow n} = \frac{d}{dt} |c_n(t)|^2 = \frac{2\pi}{\hbar} |V_{ni}|^2 \delta(E_n - E_i) \Rightarrow \text{já deduzida Golden Rule}$$

Animados com o resultado, vejamos quanto dá  $c_i^{(0)}$ ,  $c_i^{(1)}$ , e  $c_i^{(2)}$ , ou seja  $n = i$ .

- $c_i^{(0)} = \delta_{ii} = 1$
- $c_i^{(1)} = -\frac{i}{\hbar} V_{ii} \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \int_{t_0}^t e^{\eta t'} dt' = -\frac{i}{\hbar \eta} V_{ii} e^{\eta t}$
- $c_i^{(2)} = \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{-\infty}^t dt' \int_{-\infty}^{t'} dt'' \langle i | V_I(t') V_I(t'') | i \rangle =$   
 $= \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \sum_m \int_{-\infty}^t dt' \int_{-\infty}^{t'} dt'' e^{i\omega_{im}t'} V_{im}(t') e^{i\omega_{mi}t''} V_{mi}(t'')$   
 $= \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \sum_m |V_{mi}|^2 \int_{-\infty}^t dt' \int_{-\infty}^{t'} dt'' e^{(\eta+i\omega_{im})t'} e^{(\eta+i\omega_{mi})t''}$

## Deslocamento de energia e largura de decaimento

$$\begin{aligned}
 c_i^{(2)} &= \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \sum_m |V_{mi}|^2 \int_{-\infty}^t dt' \int_{-\infty}^{t'} dt'' e^{(\eta+i\omega_{im})t'} e^{(\eta+i\omega_{mi})t''} \\
 &= \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \sum_m |V_{mi}|^2 \int_{-\infty}^t dt' e^{(\eta+i\omega_{im})t'} \frac{e^{(\eta+i\omega_{mi})t'}}{\eta+i\omega_{mi}} \Big|_{-\infty}^{t'} = \\
 &= \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \sum_m \frac{|V_{mi}|^2}{\eta+i\omega_{mi}} \int_{-\infty}^t dt' e^{2\eta t'} = \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \sum_m \frac{|V_{mi}|^2}{\eta+i\omega_{mi}} \frac{e^{2\eta t'}}{2\eta} \Big|_{-\infty}^t = \\
 &= \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \sum_m \frac{|V_{mi}|^2}{\eta+i\omega_{mi}} \frac{e^{2\eta t}}{2\eta} = \\
 &= \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 |V_{ii}|^2 \frac{e^{2\eta t}}{2\eta^2} + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \sum_{m \neq i} \frac{|V_{mi}|^2}{\eta+i\omega_{mi}} \frac{e^{2\eta t}}{2\eta} = \\
 &= \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 |V_{ii}|^2 \frac{e^{2\eta t}}{2\eta^2} + \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \sum_{m \neq i} \frac{|V_{mi}|^2}{i\hbar(\eta+i\frac{E_n-E_i}{\hbar})} \frac{e^{2\eta t}}{2\eta} = \\
 &= \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 |V_{ii}|^2 \frac{e^{2\eta t}}{2\eta^2} + \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \sum_{m \neq i} \frac{|V_{mi}|^2 e^{2\eta t}}{2\eta(E_i - E_n + i\hbar\eta)}
 \end{aligned}$$

Juntando tudo em  $c_i(t) = c_i^{(0)} + c_i^{(1)} + c_i^{(2)}$ , teremos:

$$c_i(t) = 1 - \frac{i}{\hbar\eta} V_{ii} e^{\eta t} + \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^2 |V_{ii}|^2 \frac{e^{2\eta t}}{2\eta^2} + \left(\frac{-i}{\hbar}\right) \sum_{m \neq i} \frac{|V_{mi}|^2 e^{2\eta t}}{2\eta(E_i - E_n + i\hbar\eta)}$$

## Deslocamento de energia e largura de decaimento

A partir de

$$c_i(t) = 1 - \frac{i}{\hbar\eta} V_{ii} e^{\eta t} + \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^2 |V_{ii}|^2 \frac{e^{2\eta t}}{2\eta^2} + \left(\frac{-i}{\hbar}\right) \sum_{m \neq i} \frac{|V_{mi}|^2 e^{2\eta t}}{2\eta(E_i - E_n + i\hbar\eta)},$$

calcularemos  $\dot{c}_i(t)$  e a razão  $\frac{\dot{c}_i(t)}{c_i(t)}$  (isso permitirá definir tempo de vida).

$$\dot{c}_i(t) = \frac{dc_i}{dt} = -\frac{i}{\hbar} V_{ii} e^{\eta t} + \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^2 |V_{ii}|^2 \frac{e^{2\eta t}}{\eta} + \left(\frac{-i}{\hbar}\right) \sum_{m \neq i} \frac{|V_{mi}|^2 e^{2\eta t}}{(E_i - E_n + i\hbar\eta)} \text{ com isso}$$

$\frac{\dot{c}_i(t)}{c_i(t)} \approx \frac{\dot{c}_i(t)}{1 - \frac{i}{\hbar\eta} V_{ii}}$  jogamos fora termos  $\mathcal{O}(V^3)$  e ordens superiores, além de

considerar  $e^{\eta t} \approx 1$ . Supondo a perturbação,  $V$ , pequena, podemos escrever:

$$\frac{\dot{c}_i(t)}{c_i(t)} = \dot{c}_i(t) \left(1 + \frac{i}{\hbar\eta} V_{ii}\right). \text{ Substituindo a expressão de } \dot{c}_i(t), \text{ tomando } e^{2\eta t} \approx 1$$

e mantendo os termos até 2a. ordem em  $V$ , temos:

$$\frac{\dot{c}_i(t)}{c_i(t)} = -\frac{i}{\hbar} V_{ii} + \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^2 \frac{|V_{ii}|^2}{\eta} + \left(\frac{-i}{\hbar}\right) \sum_{m \neq i} \frac{|V_{mi}|^2}{(E_i - E_n + i\hbar\eta)} - \frac{i}{\hbar} V_{ii} \frac{i}{\hbar\eta} V_{ii} + \mathcal{O}(V^3)$$

$$\therefore \boxed{\frac{\dot{c}_i(t)}{c_i(t)} = -\frac{i}{\hbar} V_{ii} + \left(\frac{-i}{\hbar}\right) \sum_{m \neq i} \frac{|V_{mi}|^2}{(E_i - E_n + i\hbar\eta)}} \text{ (correta até 2a ordem)}$$



## Deslocamento de energia e largura de decaimento

Supondo que o lado direito de  $\frac{\dot{c}_i(t)}{c_i(t)} = -\frac{i}{\hbar}V_{ii} + \left(\frac{-i}{\hbar}\right) \sum_{m \neq i} \frac{|V_{mi}|^2}{(E_i - E_m + i\hbar\eta)}$

não depende do tempo, a solução da equação deve ser do tipo  $c_i(t) = e^{-i\Delta_i t/\hbar}$

com  $\Delta_i = V_{ii} + \sum_{m \neq i} \frac{|V_{mi}|^2}{(E_i - E_m + i\hbar\eta)}$ , independente do tempo, mas um número

complexo (denominador do 2o. termo). Para entender fisicamente, o significado de  $\Delta_i$ , considere o estado inicial no enfoque de interação  $|i\rangle_I \xrightarrow{t} \left( \underbrace{e^{-i\Delta_i t/\hbar}}_{\substack{\downarrow \\ \text{evolui conforme } c_i(t)}}} |i\rangle_I \right)$

Sabendo que  $|\alpha, t_0; t\rangle_I = e^{+iH_0 t/\hbar} |\alpha, t_0; t\rangle_S$ , podemos escrever:

$$|\alpha, t_0; t\rangle_S = e^{-iH_0 t/\hbar} |\alpha, t_0; t\rangle_I \rightarrow \left( e^{-iH_0 t/\hbar} e^{-i\Delta_i t/\hbar} |i\rangle_I \right) \implies e^{-i\Delta_i t/\hbar} e^{-iH_0 t/\hbar} |i\rangle$$

$|i\rangle_I(0) = |i\rangle_S = |i\rangle$

assim, o ket de Schrödinger evolui como  $e^{-i\Delta_i t/\hbar} e^{-iH_0 t/\hbar} |i\rangle = e^{-i\Delta_i t/\hbar} e^{-iE_i t/\hbar} |i\rangle$  e como deveria ser  $e^{-iEt/\hbar} |i\rangle$  reconhecemos o nosso  $\Delta_i$  da teoria de perturbação independente do tempo com  $E = E_i + \Delta_i$  e  $\Delta_i = \Delta_i^{(1)} + \Delta_i^{(2)}$  (caixa azul)

## Deslocamento de energia e largura de decaimento

Tem uma diferença com a teoria de perturbação independente do tempo que é

o aparecimento de uma componente complexa em  $\Delta_i^{(2)} = \sum_{m \neq i} \frac{|V_{mi}|^2}{(E_i - E_m + i\hbar\eta)}$ .

Isto tem a ver com o fato que não exigimos que  $E_i$  fosse não-degenerado.

Considerando que  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{x + i\epsilon} = Pr \frac{1}{x} - i\pi\delta(x)$ , podemos escrever  $\Delta_i^{(2)}$  como

$$\Delta_i^{(2)} = Pr \sum_{m \neq i} \frac{|V_{mi}|^2}{(E_i - E_m)} + i \left( -\pi \sum_{m \neq i} |V_{mi}|^2 \delta(E_i - E_m) \right)$$

A parte real evita

a degenerescência e a parte imaginária lembra a Golden Rule, pois

$$\sum_{m \neq i} \omega_{i \rightarrow m} = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{m \neq i} |V_{mi}|^2 \delta(E_i - E_m) = -\frac{2}{\hbar} Im[\Delta_i^{(2)}]$$

Assim,  $c_i(t) = e^{-\frac{i}{\hbar} \Delta_i t} = e^{-\frac{i}{\hbar} Re[\Delta_i]t + \frac{1}{\hbar} Im[\Delta_i]t}$ . Se definirmos  $\frac{\Gamma_i}{\hbar} = \frac{-2}{\hbar} Im[\Delta_i]$ ,

podemos escrever  $c_i(t) = e^{-\frac{i}{\hbar} Re[\Delta_i]t - \frac{\Gamma_i}{2\hbar} t}$  e  $\therefore |c_i(t)|^2 = e^{-\frac{\Gamma_i}{\hbar} t}$ , ou seja,  $\Gamma_i$  diz

a taxa que  $|c_i(t)|^2$  desaparece e  $\tau \equiv \frac{\hbar}{\Gamma_i}$  é o “tempo de vida” de  $|i\rangle$ . Note que

$$|c_i(t)|^2 + \sum_{m \neq i} |c_m(t)|^2 = \underbrace{1 - \frac{\Gamma_i}{\hbar} t}_{\text{decai}} + \sum_{m \neq i} \omega_{i \rightarrow m} t = 1 - \frac{\Gamma_i}{\hbar} t + \frac{\Gamma_i}{\hbar} t = 1$$

*Isso vale para t pequeno!*

## Deslocamento de energia e largura de decaimento

A quantidade  $\Gamma_i = \frac{-2}{\hbar} \text{Im}[\Delta_i]$  é chamada de “largura” de decaimento. Para entender a razão disto, considere uma distribuição de energia  $f(E)$ , tal que

$$\int dE f(E) e^{-\frac{i}{\hbar} E t} = e^{-i \frac{(E_i + \text{Re}[\Delta_i])}{\hbar} t - \frac{\Gamma_i}{2\hbar} t} \Theta(t) \quad \text{onde } \Theta(t) \begin{cases} 0 & \text{p/ } t \leq 0 \\ 1 & \text{p/ } t > 0 \end{cases}$$

Tome a transformada de Fourier, ou seja multiplique por  $e^{+\frac{i}{\hbar} E' t}$  e integre em  $t$  de  $-\infty$  a  $\infty$ .

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{+\frac{i}{\hbar} E' t} \int dE f(E) e^{-\frac{i}{\hbar} E t} = \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{+\frac{i}{\hbar} E' t} e^{-i \frac{(E_i + \text{Re}[\Delta_i])}{\hbar} t - \frac{\Gamma_i}{2\hbar} t} \Theta(t)$$

$$\int dE f(E) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-\frac{i}{\hbar} (E - E') t}}_{\propto \delta(E - E')} = \underbrace{\int_0^{+\infty} dt e^{+\frac{i}{\hbar} E' t} e^{-i \frac{(E_i + \text{Re}[\Delta_i])}{\hbar} t - \frac{\Gamma_i}{2\hbar} t}}_{\frac{-\hbar/i}{E' - (E_i + \text{Re}[\Delta_i]) + i \frac{\Gamma_i}{2}}}$$

$$f(E') \propto \frac{1}{E' - (E_i + \text{Re}[\Delta_i]) + i \frac{\Gamma_i}{2}} \Rightarrow |f(E')|^2 \propto \frac{1}{(E' - (E_i + \text{Re}[\Delta_i]))^2 + \frac{\Gamma_i^2}{4}}$$

Distribuição de energia centrada em  $E' = E_i + \text{Re}[\Delta_i]$  com largura  $\frac{\Gamma_i}{2}$ .

Mostre que  $|f(E')|^2 = \frac{1}{2} |f(E'_{\text{max}})|^2$  para  $E' = E_i + \text{Re}[\Delta_i] \pm \frac{\Gamma_i}{2}$