

## Teoria de Espalhamento

Para estudar o problema de espalhamento de uma partícula por um potencial, obteremos a forma integral da Equação de Schrödinger, conhecida por Equação de Lippmann-Schwinger. Para tanto, comece definindo:

$$H = H_0 + V, \text{ onde } \begin{cases} H_0 = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \rightarrow \text{é a Hamiltoniana da partícula livre} \\ V \rightarrow \text{é o potencial espalhador.} \end{cases}$$

Conhecemos as soluções na ausência de  $V$

$$H_0|\phi\rangle = E|\phi\rangle \begin{cases} |\phi\rangle = |\mathbf{k}'\rangle \rightarrow \langle \mathbf{r}'|\mathbf{k}'\rangle = \frac{e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}'}}{(2\pi)^{3/2}} \text{ e } \langle \mathbf{k}''|\mathbf{k}'\rangle = \delta(\mathbf{k}'' - \mathbf{k}') \\ E = \frac{\hbar^2\mathbf{k}'^2}{2m} \rightarrow \text{note degenerescência infinita} \end{cases}$$

Quando  $V \neq 0$ , queremos a solução de  $(H_0 + V)|\Psi\rangle = \underbrace{E}_{\text{mesma energia}}|\Psi\rangle$

*mesma energia*

Usaremos estratégia já utilizada em teoria de perturbação de inverter  $(E - H_0)$  e obter uma equação para  $|\Psi\rangle$  que tenha a condição de contorno embutida nela. Para tanto, primeiro escrevemos:

$$(E - H_0)|\Psi\rangle = V|\Psi\rangle \text{ que quando invertida fornece } |\Psi\rangle = \frac{1}{E - H_0}V|\Psi\rangle$$

Como na teoria de perturbação, falta algo, pois se  $V = 0 \Rightarrow |\Psi\rangle = 0$ .

## Teoria de Espalhamento

Antes de inverter, precisamos “somar” a solução da partícula livre em  $|\Psi\rangle$ , isto é  $(E - H_0)(|\Psi\rangle - |\phi\rangle) = V|\Psi\rangle$ . Isso vale, pois  $|\phi\rangle$  é solução de

$$(E - H_0)|\phi\rangle = 0. \text{ Com isso, a inversão fornece } |\Psi\rangle = |\phi\rangle + \frac{1}{E - H_0} V|\Psi\rangle.$$

Agora, quando  $V = 0$ , temos  $|\Psi\rangle = |\phi\rangle$  e isso pode ser entendido como a condição de contorno do problema: na ausência de  $V$  a partícula é livre e é descrita por uma onda plana com momento linear  $\mathbf{p}' = \hbar\mathbf{k}'$ .

Ainda temos um problema: como a energia  $E$  é a mesma, com e sem potencial, temos um infinito devido ao zero no denominador. Para ser removido, é preciso utilizar estratégia semelhante a que usamos em teoria de perturbação dependente do tempo (onde obtivemos  $i\epsilon$ , com  $\epsilon$  real, somado ao denominador). Feito isso, a equação de Lippmann-Schwinger fica:

$$|\Psi\rangle = |\phi\rangle + \frac{1}{E - H_0 \pm i\epsilon} V|\Psi\rangle$$

Veremos, em seguida, que a presença de  $\epsilon$ , além de remover o infinito, permitirá definir as condições assintóticas adequadas do problema de espalhamento.

## Teoria de Espalhamento

Na representação das coordenadas a equação de Lippmann-Schwinger fica:

$$\langle \mathbf{x} | \Psi \rangle = \langle \mathbf{x} | \phi \rangle + \int d^3 x' \langle \mathbf{x} | \frac{1}{E - H_0 \pm i\epsilon} | \mathbf{x}' \rangle \langle \mathbf{x}' | V | \Psi \rangle, \text{ onde } \langle \mathbf{x}' | \mathbf{k}' \rangle = \frac{e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}'}}{(2\pi)^{3/2}}.$$

O livro texto usa a normalização da caixa (aresta  $L$ ) e define  $\langle \mathbf{x}' | \mathbf{k}' \rangle = \frac{e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}'}}{L^{3/2}}$

Nossa tarefa nesta aula é obter  $G_{\pm}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{\hbar^2}{2m} \langle \mathbf{x} | \frac{1}{E - H_0 \pm i\epsilon} | \mathbf{x}' \rangle$ , que pode ser re-escrito com auxílio do operador unidade, como:

$$G_{\pm}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{\hbar^2}{2m} \int d^3 k' \int d^3 k'' \langle \mathbf{x} | \mathbf{k}' \rangle \langle \mathbf{k}' | \frac{1}{E - H_0 \pm i\epsilon} | \mathbf{k}'' \rangle \langle \mathbf{k}'' | \mathbf{x}' \rangle. \text{ Usando que}$$

$$\langle \mathbf{k}' | \frac{1}{E - H_0 \pm i\epsilon} | \mathbf{k}'' \rangle = \frac{1}{E - \frac{\hbar^2 \mathbf{k}'^2}{2m} \pm i\epsilon} \langle \mathbf{k}' | \mathbf{k}'' \rangle = \frac{\delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k}'')}{E - \frac{\hbar^2 \mathbf{k}'^2}{2m} \pm i\epsilon}, \text{ escrevemos:}$$

$$G_{\pm}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{\hbar^2}{2m} \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{k}' \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}}{E - \frac{\hbar^2 \mathbf{k}'^2}{2m} \pm i\epsilon}. \text{ Se usarmos } E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \text{ e } \mathbf{k}' \equiv \mathbf{q}, \text{ temos:}$$

$$G_{\pm}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 q \frac{e^{i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}}{k^2 - q^2 \pm i\epsilon} \text{ onde } \epsilon \text{ foi redefinido. Para fazer esta}$$

integral, escolhamos  $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$  na direção  $\hat{\mathbf{z}}$  e tomamos  $d^3 q = q^2 \sin \theta d\theta d\varphi dq$ .

## Teoria de Espalhamento

$$E \text{ assim: } G_{\pm}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{\infty} dq q^2 \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} \underbrace{\int_0^{\pi} d\theta \sin \theta}_{\int_1^{-1} -d(\cos \theta) \rightarrow \int_{-1}^1 d(\cos \theta)} \frac{e^{i|\mathbf{q}||\mathbf{x}-\mathbf{x}'| \cos \theta}}{k^2 - q^2 \pm i\epsilon}$$

$$\begin{aligned} G_{\pm}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{\infty} dq \frac{q^2}{k^2 - q^2 \pm i\epsilon} \int_{-1}^1 d\zeta e^{iq|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|\zeta} \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{\infty} dq \frac{q^2}{k^2 - q^2 \pm i\epsilon} \left. \frac{e^{iq|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|\zeta}}{iq|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \right|_{-1}^{+1} \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{i|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \int_0^{\infty} dq \underbrace{\frac{q}{k^2 - q^2 \pm i\epsilon}}_{\text{mudei de ordem}} \left( e^{iq|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} - e^{-iq|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \right) \end{aligned}$$

O integrando é par em  $q$ , pois: *ímpar em  $q$*  e *ímpar em  $q$*

e assim podemos trocar a  $\int_0^{\infty}$  por  $\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty}$  e com isso obter:

$$G_{\pm}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\frac{1}{8\pi^2} \frac{1}{i|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \int_{-\infty}^{+\infty} dq \underbrace{\frac{q}{q^2 - k^2 \mp i\epsilon}}_{\text{mudei de ordem}} \left( e^{+iq|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} - e^{-iq|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \right)$$

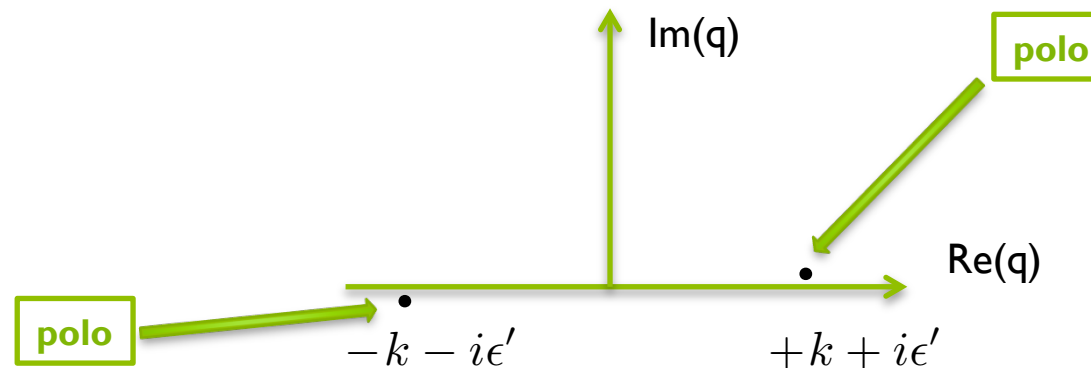
*Estamos prontos para integração no plano complexo. Note os polos.*

## Teoria de Espalhamento

Os polos do integrando são definidos por  $q^2 - k^2 \mp i\epsilon = 0 \Rightarrow q^2 = k^2 \pm i\epsilon$  ou melhor  $q = \pm \sqrt{k^2 \pm i\epsilon} = \pm k \sqrt{1 \pm i \frac{\epsilon}{k^2}} = \pm(k \pm i\epsilon')$ . Onde  $\epsilon' = \frac{\epsilon}{2k^2}$ . Note

que o  $+i\epsilon$  original corresponde à  $\begin{cases} +k + i\epsilon' \\ -k - i\epsilon' \end{cases}$  e o  $-i\epsilon$  à  $\begin{cases} +k - i\epsilon' \\ -k + i\epsilon' \end{cases}$

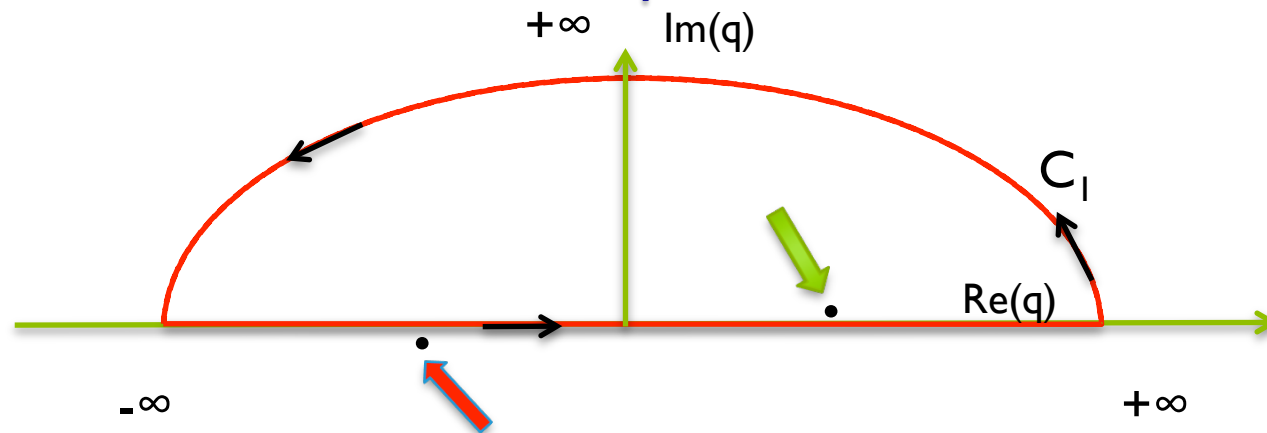
Os pontos negros na figura abaixo representam os polos no caso  $+i\epsilon$



A integral  $e^{+iq|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} = e^{+iRe(q)|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \cdot e^{-Im(q)|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}$  deve ser fechada por cima, pois a exponencial com  $Im(q)$  garante contribuição zero e isso permite fechar o circuito e obter a mesma integral que antes. Argumento semelhante sugere que  $e^{-iq|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} = e^{-iRe(q)|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \cdot e^{+Im(q)|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}$  deve ser fechada por

baixo.  $\frac{q}{q^2 - k^2 \mp i\epsilon}$  fornece integrando zero para  $Re(q) = \pm\infty$ .

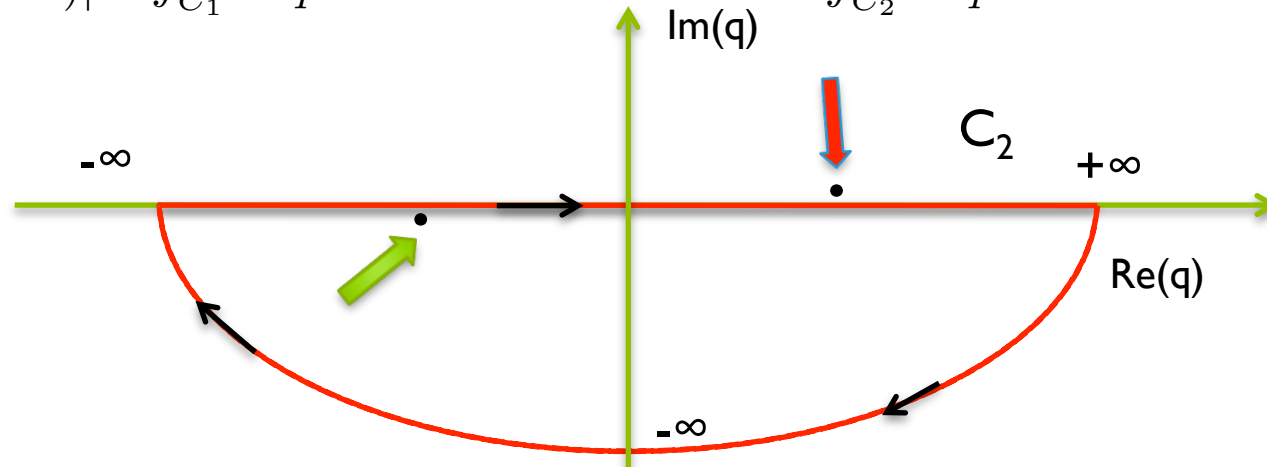
# Teoria de Espalhamento



o sinal + é para lembrar que estamos analisando o caso  $+i\epsilon$  original.

$$G_+(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{-1}{8\pi^2} \frac{1}{i|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \int_{-\infty}^{+\infty} dq \frac{q}{q^2 - k^2 - i\epsilon} (e^{+iq|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} - e^{-iq|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}) =$$

$$\frac{-1}{8\pi^2} \frac{1}{i|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \left( \oint_{C_1} dq \frac{q}{q^2 - k^2 - i\epsilon} e^{+iq|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} - \oint_{C_2} dq \frac{q}{q^2 - k^2 - i\epsilon} e^{-iq|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right)$$



## Teoria de Espalhamento

Para aplicar o Teorema de Cauchy (cálculo IV):  $\oint \frac{f(z)}{z - z_i} dz = 2\pi i f(z_i)$ ,

onde  $z_i$  é um polo no plano complexo e a integração fechada (que circula  $z_i$ ) corre no sentido anti-horário do circuito, precisamos fazer uma modificação na expressão de  $G$ .

Usaremos que  $\frac{1}{q^2 - k^2} = \frac{1}{(q - k)(q + k)} = \left(\frac{1}{q - k} + \frac{1}{q + k}\right) \frac{1}{2q}$  para escrever

$$\begin{aligned}
 G_+(\mathbf{x}, \mathbf{x}') &= -\frac{1}{8\pi^2} \frac{1}{i|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \oint_{C_1} dq \frac{q}{q^2 - k^2 - i\epsilon} e^{+iq|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \\
 &+ \frac{1}{8\pi^2} \frac{1}{i|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \oint_{C_2} dq \frac{q}{q^2 - k^2 - i\epsilon} e^{-iq|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \\
 &= -\frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{i|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \left( \underbrace{\oint_{C_1} dq \frac{e^{+iq|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}}{q - k}}_{\text{contribui}} + \underbrace{\oint_{C_1} dq \frac{e^{+iq|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}}{q + k}}_{\text{não contribui}} \right) + \\
 &+ \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{i|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \left( \underbrace{\oint_{C_2} dq \frac{e^{-iq|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}}{q - k}}_{\text{não contribui}} + \underbrace{\oint_{C_2} dq \frac{e^{-iq|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}}{q + k}}_{\text{contribui}} \right)
 \end{aligned}$$

## Teoria de Espalhamento

Assim,  $G$  (uma função de Green) para o caso  $+i\epsilon$  (original) fica:

$$G_+(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{+ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}$$

Se repetíssemos todo o procedimento para  $-i\epsilon$ , obteríamos

$$\underbrace{G_-}_{o}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{-ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}$$

*o - é para lembrar que é o caso  $-i\epsilon$ .*

Assim, a equação de Lippman-Schwinger pode ser escrita por:

$$\langle \mathbf{x} | \Psi^{(\pm)} \rangle = \langle \mathbf{x} | \phi \rangle - \frac{2m}{\hbar^2} \int d^3x' \frac{1}{4\pi} \frac{e^{\pm ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \langle \mathbf{x}' | V | \Psi^{(\pm)} \rangle$$

Se  $\langle \mathbf{x}' | V | \mathbf{x}'' \rangle = V(\mathbf{x}') \delta^{(3)}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'')$  (potencial local), temos:

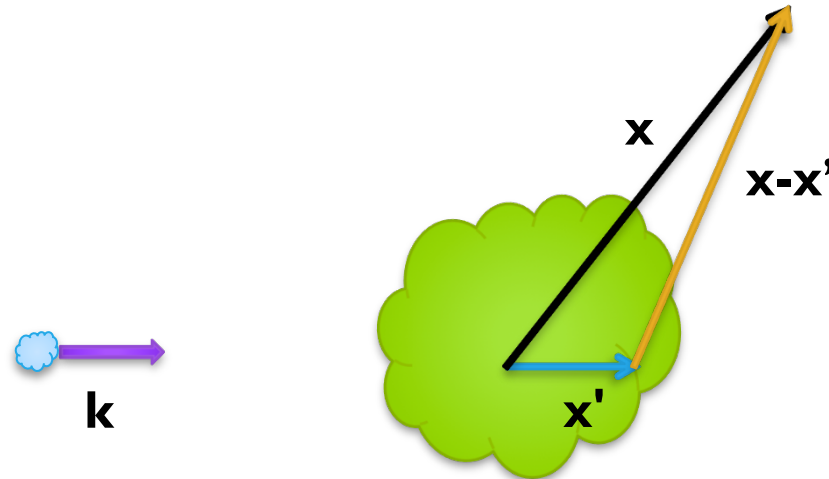
$$\langle \mathbf{x} | \Psi^{(\pm)} \rangle = \langle \mathbf{x} | \phi \rangle - \frac{2m}{\hbar^2} \int d^3x' \frac{1}{4\pi} \frac{e^{\pm ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} V(\mathbf{x}') \langle \mathbf{x}' | \Psi^{(\pm)} \rangle$$

*Será que esta equação fornece a condição assintótica adequada?*



## Amplitude de Espalhamento

Suponha um observador longe do alvo. Como é a função de onda lá, em  $\mathbf{x}$ ?



a região verde é a região onde  $V(\mathbf{x}') \neq 0$ . Note que a equação de Lippman-

Schwinger 
$$\langle \mathbf{x} | \Psi^{(\pm)} \rangle = \langle \mathbf{x} | \phi \rangle - \frac{2m}{\hbar^2} \int d^3x' \frac{1}{4\pi} \frac{e^{\pm ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} V(\mathbf{x}') \langle \mathbf{x}' | \Psi^{(\pm)} \rangle$$

nos ensina que só esta região interessa na integração. Se o observador estiver longe o suficiente, temos  $|\mathbf{x}| \gg |\mathbf{x}'|$  e podemos expandir  $|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|$  da seguinte

forma 
$$|\mathbf{x}-\mathbf{x}'| = \sqrt{(\mathbf{x}-\mathbf{x}')^2} = \sqrt{\mathbf{x}^2 - 2\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}' + \mathbf{x}'^2} = x \sqrt{1 - 2\hat{\mathbf{x}}\cdot\left(\frac{\mathbf{x}'}{x}\right) + \left(\frac{x'}{x}\right)^2}$$

$$\approx x \left(1 - \hat{\mathbf{x}}\cdot\left(\frac{\mathbf{x}'}{x}\right)\right). \text{ Usaremos } \begin{cases} e^{\pm ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \approx e^{\pm ikx} e^{\mp ik\hat{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{x}'} \\ |\mathbf{x}-\mathbf{x}'| \approx x \text{ (no denominador)} \end{cases}$$

Aponta na direção do observador

# Amplitude de Espalhamento

Definindo  $\mathbf{k}' = k\hat{\mathbf{x}}$  a equação de Lippman-Schwinger fica (caso +)

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x} | \Psi^{(+)} \rangle &\xrightarrow{x \rightarrow \infty} \langle \mathbf{x} | \phi \rangle - \frac{2m}{\hbar^2} \frac{e^{+ikx}}{4\pi x} (2\pi)^{3/2} \int d^3x' \frac{e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}'}}{(2\pi)^{3/2}} V(\mathbf{x}') \langle \mathbf{x}' | \Psi^{(+)} \rangle \\ &= \frac{e^{+i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}}{(2\pi)^{3/2}} - \frac{2m}{\hbar^2} \frac{e^{+ikx}}{4\pi x} (2\pi)^{3/2} \int d^3x' \frac{e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}'}}{(2\pi)^{3/2}} V(\mathbf{x}') \langle \mathbf{x}' | \Psi^{(+)} \rangle = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left( e^{+i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} - \frac{2m}{\hbar^2} \frac{e^{+ikx}}{4\pi x} (2\pi)^3 \int d^3x' \frac{e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}'}}{(2\pi)^{3/2}} V(\mathbf{x}') \langle \mathbf{x}' | \Psi^{(+)} \rangle \right) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left( e^{+i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} + \frac{e^{+ikx}}{x} \left( -\frac{4\pi^2 m}{\hbar^2} \int d^3x' \frac{e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}'}}{(2\pi)^{3/2}} V(\mathbf{x}') \langle \mathbf{x}' | \Psi^{(+)} \rangle \right) \right) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left( e^{+i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} + f(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \frac{e^{+ikx}}{x} \right) \text{ com} \end{aligned}$$

$$f(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \equiv -\frac{4\pi^2 m}{\hbar^2} \int d^3x' \frac{e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}'}}{(2\pi)^{3/2}} V(\mathbf{x}') \langle \mathbf{x}' | \Psi^{(+)} \rangle = -\frac{4\pi^2 m}{\hbar^2} \langle \mathbf{k}' | V | \underbrace{\Psi_{\mathbf{k}}^{(+)}} \rangle$$

*mudança de notação para lembrar que a partícula chega com momento  $\hbar\mathbf{k}$ .*

Note que  $\langle \mathbf{k}' |$  é o bra do ket  $|\mathbf{k}'\rangle = |\phi_{\mathbf{k}'}\rangle$  (onda plana na direção  $\mathbf{k}'$ , que “leva” a partícula até o observador). A matemática nos trouxe até aqui.

*sai com  $\mathbf{k}'$*

*chega com  $\mathbf{k}$*

*Qual o significado físico de  $f(\mathbf{k}', \mathbf{k})$ ?*

## Outras formas de escrever a Amplitude de Espalhamento

Antes é importante notar que a amplitude de espalhamento pode ser escrita de outras formas. Para ver isso, considere a equação de Lippmann-Schwinger na sua forma geral

$$|\Psi_{\mathbf{k}}^{(\pm)}\rangle = |\mathbf{k}\rangle + G^{(\pm)}V|\Psi_{\mathbf{k}}^{(\pm)}\rangle$$

Multiplique a equação para  $|\Psi_{\mathbf{k}}^{(-)}\rangle$  por  $V$  e tome o adjunto Hermiteano

$$(V|\Psi_{\mathbf{k}}^{(-)}\rangle)^{\dagger} = (V|\mathbf{k}\rangle + VG^{(-)}V|\Psi_{\mathbf{k}}^{(-)}\rangle)^{\dagger}$$

$$\langle\Psi_{\mathbf{k}}^{(-)}|V = \langle\mathbf{k}|V + \langle\Psi_{\mathbf{k}}^{(-)}|VG^{(+)}V$$

$$\langle\mathbf{k}|V = \langle\Psi_{\mathbf{k}}^{(-)}|(V - VG^{(+)}V)$$

Isto permite re-escrever a amplitude

$$f(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = -\frac{4\pi^2 m}{\hbar^2} \langle\mathbf{k}'|V|\Psi_{\mathbf{k}}^{(+)}\rangle = -\frac{4\pi^2 m}{\hbar^2} \langle\Psi_{\mathbf{k}'}^{(-)}|(V - VG^{(+)}V)|\Psi_{\mathbf{k}}^{(+)}\rangle$$

Mas  $(V - VG^{(+)}V)|\Psi_{\mathbf{k}}^{(+)}\rangle = V|\mathbf{k}\rangle \therefore f(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = -\frac{4\pi^2 m}{\hbar^2} \langle\Psi_{\mathbf{k}'}^{(-)}|V|\mathbf{k}\rangle$

## Amplitude de Espalhamento

Algumas observações importantes:

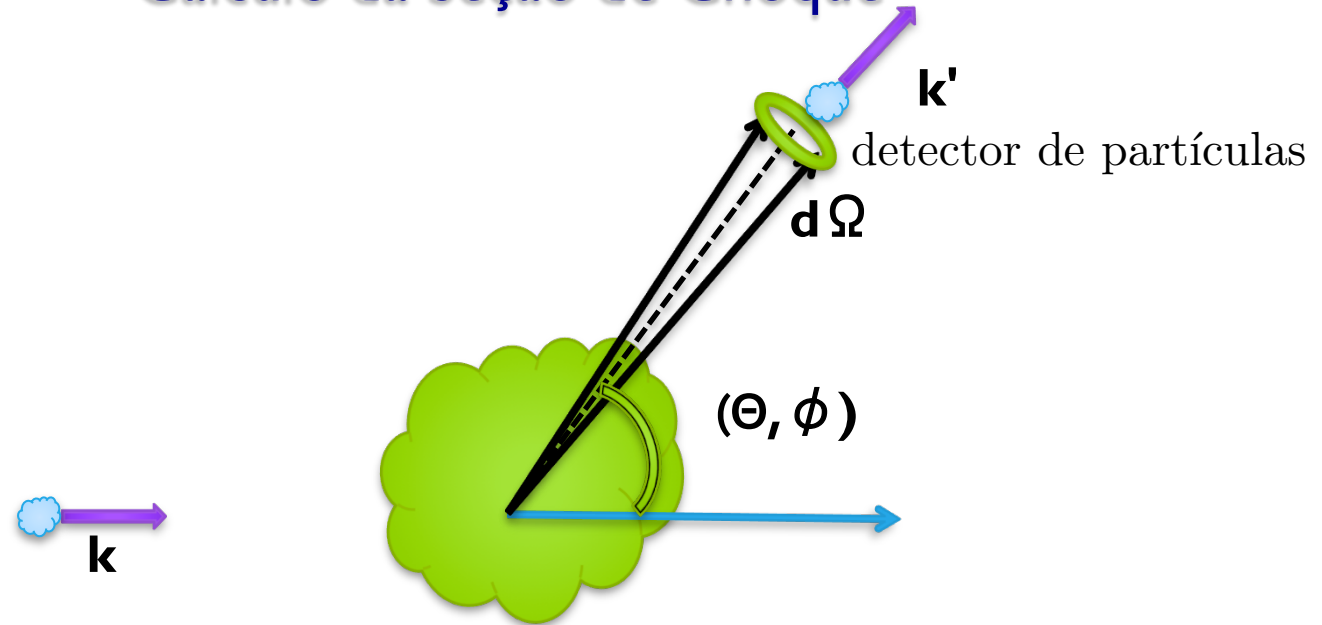
- Se  $V = 0 \implies f(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = -\frac{4\pi^2 m}{\hbar^2} \langle \mathbf{k}' | V | \Psi_{\mathbf{k}}^{(+)} \rangle = 0$ . Dependendo do ângulo que você olha (um observador distante),  $f$  pode dar um resultado diferente. Trata-se da amplitude de probabilidade da partícula entrar na direção  $\mathbf{k}$  e, devido ao potencial, sair na direção  $\mathbf{k}'$ , com  $|\mathbf{k}'| = |\mathbf{k}|$ .

- A solução assintótica  $\langle \mathbf{x} | \Psi^{(+)} \rangle \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left( e^{+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + f(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \frac{e^{+ikx}}{x} \right)$  é solução da equação de Schrödinger na região onde a partícula é livre,  $V(\mathbf{x}') = 0$ .
- A onda livre deve estar associada a tempos “infinitamente” negativos (antes da colisão) e “infinitamente” positivos (depois da colisão). A onda esférica só para tempos “infinitamente” positivos (depois da colisão).

Mostre!

- *Em seguida, para desenvolver intuição*
  - Vamos definir seção de choque
  - Olharemos o espalhamento como uma perturbação dependente do tempo
  - E vamos analisar o espalhamento de um pacote de ondas dependente no tempo.

## Cálculo da Seção de Choque



$$dn \equiv \frac{\text{número de partículas detectadas}}{\text{unidade de tempo}} \propto \begin{cases} \text{fluxo de partículas incidentes } F_i \\ \text{ângulo sólido } d\Omega \end{cases}$$

A constante de proporcionalidade é a chamada seção de choque diferencial:

$$dn = \sigma(\theta, \varphi) F_i d\Omega$$

Diagram illustrating the components of the differential cross-section equation:

- $\frac{\# \text{ partículas}}{\text{tempo}}$  is proportional to  $dn$ .
- $\frac{\# \text{ partículas}}{\text{tempo} \times \text{área}}$  is proportional to  $F_i$ .
- $\text{ângulo sólido}$  is proportional to  $d\Omega$ .
- The differential cross-section  $\sigma(\theta, \varphi)$  is the constant of proportionality.

## Cálculo da Seção de Choque

A Seção de choque pode ser escrita por:  $\sigma(\theta, \varphi) = \frac{dn}{F_i d\Omega}$

onde  $\begin{cases} F_i \propto J_i \text{ (fluxo de probabilidade)} \\ dn = \mathbf{F}_f \cdot d\mathbf{S} \propto \mathbf{J}_f \cdot d\mathbf{S} \end{cases}$

$$\sigma(\theta, \varphi) = \frac{\mathbf{F}_f \cdot d\mathbf{S}}{F_i d\Omega} = \frac{J_f r^2 d\Omega}{J_i d\Omega} = \frac{J_f r^2}{J_i}$$

Vimos (FI001) que  $\mathbf{J} = \frac{1}{m} \text{Re}[\Psi^* \frac{\hbar}{i} \nabla \Psi]$ . Para obter  $\begin{cases} J_i \text{ use } \Psi = e^{ikz} \\ J_f \text{ use } \Psi = f(\theta, \varphi) \frac{e^{ikr}}{r} \end{cases}$

Assim  $\mathbf{J}_i = \frac{1}{m} [e^{-ikz} \frac{\hbar}{i} ik \hat{\mathbf{z}} e^{ikz}] = \frac{\hbar k}{m} \hat{\mathbf{z}}$  e  $\mathbf{J}_f$  é obtido, usando  $\nabla$  em coordenadas esféricas  $\nabla = \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{\theta}} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\boldsymbol{\phi}} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}$ . **Faça isso em casa** e obtenha as

componentes de  $\mathbf{J}_f$   $\begin{cases} (J_f)_r = \frac{\hbar k}{m} \frac{1}{r^2} |f(\theta, \varphi)|^2; \\ (J_f)_\theta = \frac{\hbar k}{m} \frac{1}{r^3} [\frac{1}{i} f^*(\theta, \varphi) \frac{\partial}{\partial \theta} f(\theta, \varphi)]; \\ (J_f)_\varphi = \frac{\hbar k}{m} \frac{1}{r^3 \sin \theta} [\frac{1}{i} f^*(\theta, \varphi) \frac{\partial}{\partial \varphi} f(\theta, \varphi)] \end{cases}$

Note que  $r \rightarrow \infty \Rightarrow (J_f)_r \gg (J_f)_\theta$  e  $(J_f)_\varphi$  e isso permite obter

$$\sigma(\theta, \varphi) = |f(\theta, \varphi)|^2$$

Partícula chega na direção  $\mathbf{z}$  e sai na direção  $(\theta, \phi)$ .