Espalhamento como perturbação dependente do tempo

Para estudar o problema de espalhamento como uma perturbação dependente do tempo, continuamos com

$$H = H_0 + V, \text{ onde } \begin{cases} H_0 = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \rightarrow \text{é a Hamiltoniana da partícula livre} \\ V \rightarrow \text{ é o potencial espalhador.} \end{cases}$$

Exceto que agora o potencial é ligado quando a partícula se aproxima e é desligado ao ficar longe o suficiente. Usaremos, como no livro texto, a normalização da caixa

$$H_0|\phi\rangle = E|\phi\rangle \begin{cases} |\phi\rangle = |\mathbf{k}'\rangle \rightarrow \langle \mathbf{r}'|\mathbf{k}'\rangle = \frac{e^{i\mathbf{k}'.\mathbf{r}'}}{L^{3/2}} \text{ e } \langle \mathbf{k}''|\mathbf{k}'\rangle = \delta_{\mathbf{k}'',\mathbf{k}'} \\ E = \frac{\hbar^2 \mathbf{k}'^2}{2m} \end{cases}$$

Do enfoque de interação,

$$U_I(t,t_0) = 1 - \frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} V_I(t')U_I(t',t_0)dt' \begin{cases} U_I(t_0,t_0) = 1 \\ V_I = e^{iH_0 t/\hbar} V e^{-iH_0 t/\hbar} \end{cases}$$

e amplitude de transição do estado $|i\rangle(|\mathbf{k}'\rangle)$ para o estado $|\mathbf{n}\rangle(|\mathbf{k}''\rangle)$, dada por $\langle n|U_I(t,t_0)|i\rangle = \delta_{ni} - \frac{i}{\hbar}\sum_m \langle n|V|m\rangle \int e^{i\omega_{nm}t'}\langle m|U_I(t',t_0)|i\rangle$

Espalhamento como perturbação dependente do tempo

A estratégia para resolver a equação

$$\boxed{\langle n|U_I(t,t_0)|i\rangle = \delta_{ni} - \frac{i}{\hbar}\sum_m \langle n|V|m\rangle \int e^{i\omega_{nm}t'}\langle m|U_I(t',t_0)|i\rangle}$$

foi:

- Substituir iterativamente o lado direito em $\langle m|U_I(t',t_0)|i\rangle$. Isto cria uma hierarquia em $\mathcal{O}(V^n)$.
- Para atender que o potencial começa a ser ligado gradativamente a partir de $t_0=-\infty$, multiplicávamos V por $e^{\epsilon t}$. No final fazíamos $\epsilon = 0$, o que implicava que o estado inicial mudava a partir de um autoestado de H_0, sujeito à um potencial constante no tempo.

Agora, no problema de espalhamento, temos que considerar que a condição assimptótica deve valer para $t=-\infty$ e $t=+\infty$. Em ambos os tempos, a solução precisa ser solução de H_0. Assim, repetimos o procedimento de antes, exceto que exigiremos $\epsilon << 1/t, e^{\epsilon t}\sim 1$ (futuro distante). Ou seja, é preciso primeiro fazer $\epsilon \to 0$ e depois $t\to +\infty$. Proporemos uma solução baseada no primeiro termo da série perturbativa, isto é, situação obtida para o caso em que inserimos do lado direito da equação acima a expressão $\langle n|U_I(t,t_0)|i\rangle = \delta_{ni}$ (o $|i\rangle$ evoluído é ortornormal ao $|n\rangle$) : $\langle n|U_I(t,t_0)|i\rangle = \delta_{ni} - \frac{i}{\hbar}\langle n|V|i\rangle \int_{t_0}^{t} e^{i\omega_{ni}t'+\epsilon t'}dt'$

Espalhamento como perturbação dependente do tempo

Por hipótese, consideraremos que a dependência temporal para o espalhamento deve ter o mesmo formato que o termo de primeira ordem, e com isso trocar V_{ni} por algo mais geral, T_{ni}. Assim, escrevemos:

$$\langle n|U_I(t,t_0)|i\rangle = \delta_{ni} - \frac{i}{\hbar}\langle n|T|i\rangle \int_{t_0}^{t} e^{i\omega_{ni}t'+\epsilon t'}dt'$$

Esta amplitude de transição é conhecida por matriz S de espalhamento e fica:

$$S_{ni} \equiv \lim_{t\to\infty}\left(\lim_{\epsilon\to 0}\langle n|U_I(t,t_0)|i\rangle\right) = \delta_{ni} - \frac{i}{\hbar}\langle n|T|i\rangle \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega_{ni}t'}dt' =$$
$$= \delta_{ni} - 2\pi i\delta(E_n - E_i)T_{ni}$$

A matriz de espalhamento S tem claramente duas partes, uma na qual o estado final é igual ao estado inicial e outra governada pela matriz T que deve levar em conta o espalhamento.

Taxa de transição e seção de choque. Como fizemos antes, definimos por taxa de transição a quantidade: $\omega(i\to n) = \frac{d}{dt}\left|\langle n|U_I(t,t_0)|i\rangle\right|^2$. Para $|i\rangle \neq |n\rangle$, temos:

$$\boxed{\langle n|U_I(t,-\infty)|i\rangle = -\frac{i}{\hbar}T_{ni}\int_{-\infty}^{t} e^{i\omega_{ni}t'+\epsilon t'}dt' = -\frac{i}{\hbar}T_{ni}\frac{e^{i\omega_{ni}t+\epsilon t}}{i\omega_{ni}+\epsilon}}$$

$$\therefore\ \omega(i\to n) = \frac{1}{\hbar^2}|T_{ni}|^2\frac{2\epsilon\ e^{2\epsilon t}}{\omega_{ni}^2+\epsilon^2},\quad \text{mas} \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\epsilon\ e^{2\epsilon t}}{\omega_{ni}^2+\epsilon^2} = \pi\hbar\delta(E_n - E_i)$$

Espalhamento como perturbação dependente do tempo

A expressão $\omega(i \to n) = \frac{2\pi}{\hbar}|T_{ni}|^2\delta(E_n - E_i)$ é muito similar à Regra de ouro de Fermi, exceto que T_{ni} aparece no lugar do V_{ni}. Veremos, logo mais, como calcular T_{ni}. Primeiro, vamos ver como ficam as seções de choque dentro deste procedimento. Multiplicando a expressão acima por $\rho(En)dE_n$ e integrando sobre E_n, temos: $\omega(i \to n) = \frac{mkL^3}{(2\pi)^2\hbar^3}|T_{ni}|^2 d\Omega$, onde usamos o resultado para $\rho(E)$, isto é, $\rho = \frac{mk}{\hbar^2}(\frac{L}{2\pi})^3 d\Omega$ obtido na aula 10, slide 4. Aplicando a definição de seção de choque da aula passada e lembrando que estamos na normalização da caixa, temos: $\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = (\frac{mL^3}{2\pi\hbar^2})^2|T_{ni}|^2}$ (note que para obter esse resultado, é preciso mostrar que o fluxo de probabilidade incidente é $\mathbf{J} = \frac{\hbar}{m}\frac{\mathbf{k}}{L^3} = \frac{v}{L^3}$, onde $v = \hbar k/m$). Compare isso com o resultado da aula passada $\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\mathbf{k}', \mathbf{k})|^2}$ com $f(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = -\frac{4\pi^2 m}{\hbar^2}\langle\mathbf{k}'|V|\Psi_{\mathbf{k}}^{(+)}\rangle = -\frac{mL^3}{2\pi\hbar^2}\langle\mathbf{k}'|V|\Psi_{\mathbf{k}}^{(+)}\rangle$ (este último com a normalização da caixa), e conclua: $\boxed{f(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = \frac{mL^3}{2\pi\hbar^2}T_{ni}}$ a menos de fase global.

Espalhamento como perturbação dependente do tempo

Vamos agora obter a matriz T, seguindo a estratégia do livro texto. Primeiro, resgate duas equações do 2o.(caixa azul) e 3o.(caixa verde) slides (para $t_0 = -\infty$):

$$1)\ \langle n|U_I(t,-\infty)|i\rangle = \delta_{ni} - \frac{i}{\hbar}\sum_m V_{nm}\int_{-\infty}^{t} e^{i\omega_{nm}t'}\langle m|U_I(t',-\infty)|i\rangle$$

$$2)\ \langle n|U_I(t,-\infty)|i\rangle = \delta_{ni} + \frac{1}{\hbar}T_{ni}\frac{e^{i\omega_{ni}t+\epsilon t}}{-\omega_{ni}+i\epsilon}$$

Insira a equação 2 (com $n = m$) no lado direito da 1 para obter:

$$\langle n|U_I(t,-\infty)|i\rangle = \delta_{ni} - \frac{i}{\hbar}\sum_m V_{nm}\int_{-\infty}^{t} e^{i\omega_{nm}t'}\left(\delta_{mi} + \frac{1}{\hbar}T_{mi}\frac{e^{i\omega_{mi}t'+\epsilon t'}}{-\omega_{mi}+i\epsilon}\right) =$$

$$= \delta_{ni} - \frac{i}{\hbar}V_{ni}\int_{-\infty}^{t} e^{i\omega_{ni}t'} - \frac{i}{\hbar}\frac{1}{\hbar}\sum_m V_{nm}\frac{T_{mi}}{-\omega_{mi}+i\epsilon}\int_{-\infty}^{t} e^{i\omega_{nm}t'+i\omega_{mi}t'+\epsilon t'} =$$

Faltou isso no texto

$$= \delta_{ni} - \frac{i}{\hbar}V_{ni}\frac{e^{i\omega_{ni}t+\epsilon t}}{+i\omega_{ni}+\epsilon} - \frac{i}{\hbar}\frac{1}{\hbar}\sum_m V_{nm}\frac{T_{mi}}{-\omega_{mi}+i\epsilon}\int_{-\infty}^{t} e^{i\omega_{ni}t'+\epsilon t'} =$$

$$= \delta_{ni} + \frac{1}{\hbar}\frac{e^{i\omega_{ni}t+\epsilon t}}{-\omega_{ni}+i\epsilon}\left(V_{ni} + \frac{1}{\hbar}\sum_m V_{nm}\frac{T_{mi}}{-\omega_{mi}+i\epsilon}\right) \text{ comparação com Eq. 2}$$

nos leva à: $T_{ni} = V_{ni} + \frac{1}{\hbar}\sum_m V_{nm}\frac{T_{mi}}{-\omega_{mi}+i\epsilon} = V_{ni} + \sum_m V_{nm}\frac{T_{mi}}{E_i - E_m + i\hbar\epsilon}$

Espalhamento como perturbação dependente do tempo

Vamos agora obter a matriz T, seguindo $\pm$ a estratégia do livro texto. Primeiro, resgate duas equações do 2o.(caixa azul) e 3o.(caixa verde) slides (para $t_0 = -\infty$):

1) $\langle n|U_I(t,-\infty)|i\rangle = \delta_{ni} - \frac{i}{\hbar}\sum_m V_{nm}\int_{-\infty}^{t} e^{i\omega_{nm}t'+\epsilon t'}\langle m|U_I(t',-\infty)|i\rangle$

Inclui a dependência temporal do V

2) $\langle n|U_I(t,-\infty)|i\rangle = \delta_{ni} + \frac{1}{\hbar}T_{ni}\frac{e^{i\omega_{ni}t+\epsilon t}}{-\omega_{ni}+i\epsilon}$

Insira a equação 2 (com $n=m$) no lado direito da 1 para obter:

$$\langle n|U_I(t,-\infty)|i\rangle = \delta_{ni} - \frac{i}{\hbar}\sum_m V_{nm}\int_{-\infty}^{t} e^{i\omega_{nm}t'+\epsilon t'}\left(\delta_{mi} + \frac{1}{\hbar}T_{mi}\frac{e^{i\omega_{mi}t'+\epsilon t'}}{-\omega_{mi}+i\epsilon}\right) =$$

$$= \delta_{ni} - \frac{i}{\hbar}V_{ni}\int_{-\infty}^{t} e^{i\omega_{ni}t'+\epsilon t'} - \frac{i}{\hbar}\frac{1}{\hbar}\sum_m V_{nm}\frac{T_{mi}}{-\omega_{mi}+i\epsilon}\int_{-\infty}^{t} e^{i\omega_{nm}t'+i\omega_{mi}t'+2\epsilon t'} =$$

$$= \delta_{ni} - \frac{i}{\hbar}V_{ni}\frac{e^{i\omega_{ni}t+\epsilon t}}{+i\omega_{ni}+\epsilon} - \frac{i}{\hbar}\frac{1}{\hbar}\sum_m V_{nm}\frac{T_{mi}}{-\omega_{mi}+i\epsilon}\int_{-\infty}^{t} e^{i\omega_{ni}t'+2\epsilon t'} =$$

$$= \delta_{ni} + \frac{1}{\hbar}\frac{e^{i\omega_{ni}t+\epsilon t}}{-\omega_{ni}+i\epsilon}\left(V_{ni} + \frac{1}{\hbar}\sum_m V_{nm}\frac{T_{mi}e^{\epsilon t}}{-\omega_{mi}+i2\epsilon}\right).$$ Tome $e^{\epsilon t}\approx 1$ e compare

com Eq. 2: $T_{ni} = V_{ni} + \frac{1}{\hbar}\sum_m V_{nm}\frac{T_{mi}}{-\omega_{mi}+i2\epsilon} = V_{ni} + \sum_m V_{nm}\frac{T_{mi}}{E_i - E_m + i\hbar\epsilon'}$

Chame ϵ' de ϵ (note que tanto faz, pois o que importa é que vá a zero).

Espalhamento como perturbação dependente do tempo

Temos com isso uma equação $T_{ni} = V_{ni} + \sum_m V_{nm} \frac{T_{mi}}{E_i - E_m + i\hbar\epsilon}$ para os elementos de matriz de T, em função de elementos de matriz conhecidos, V_{nm}.

Se definirmos $T_{ni} = \langle n|T|i\rangle \equiv \langle n|V|\psi_i^{(+)}\rangle$ podemos re-escrevê-la por:

$$\langle n|V|\psi_i^{(+)}\rangle = \langle n|V|i\rangle + \sum_m \langle n|V|m\rangle \frac{\langle m|V|\psi_i^{(+)}\rangle}{E_i - E_m + i\hbar\epsilon}$$

e re-arranjá-la da seguinte forma:

$$\langle n|V \left(|\psi_i^{(+)}\rangle - |i\rangle - \sum_m \frac{|m\rangle\langle m|}{E_i - E_m + i\hbar\epsilon} V|\psi_i^{(+)}\rangle \right) = 0$$

ou ainda

$$\langle n|V \left(|\psi_i^{(+)}\rangle - |i\rangle - \frac{1}{E_i - H_0 + i\hbar\epsilon} V|\psi_i^{(+)}\rangle \right) = 0.$$

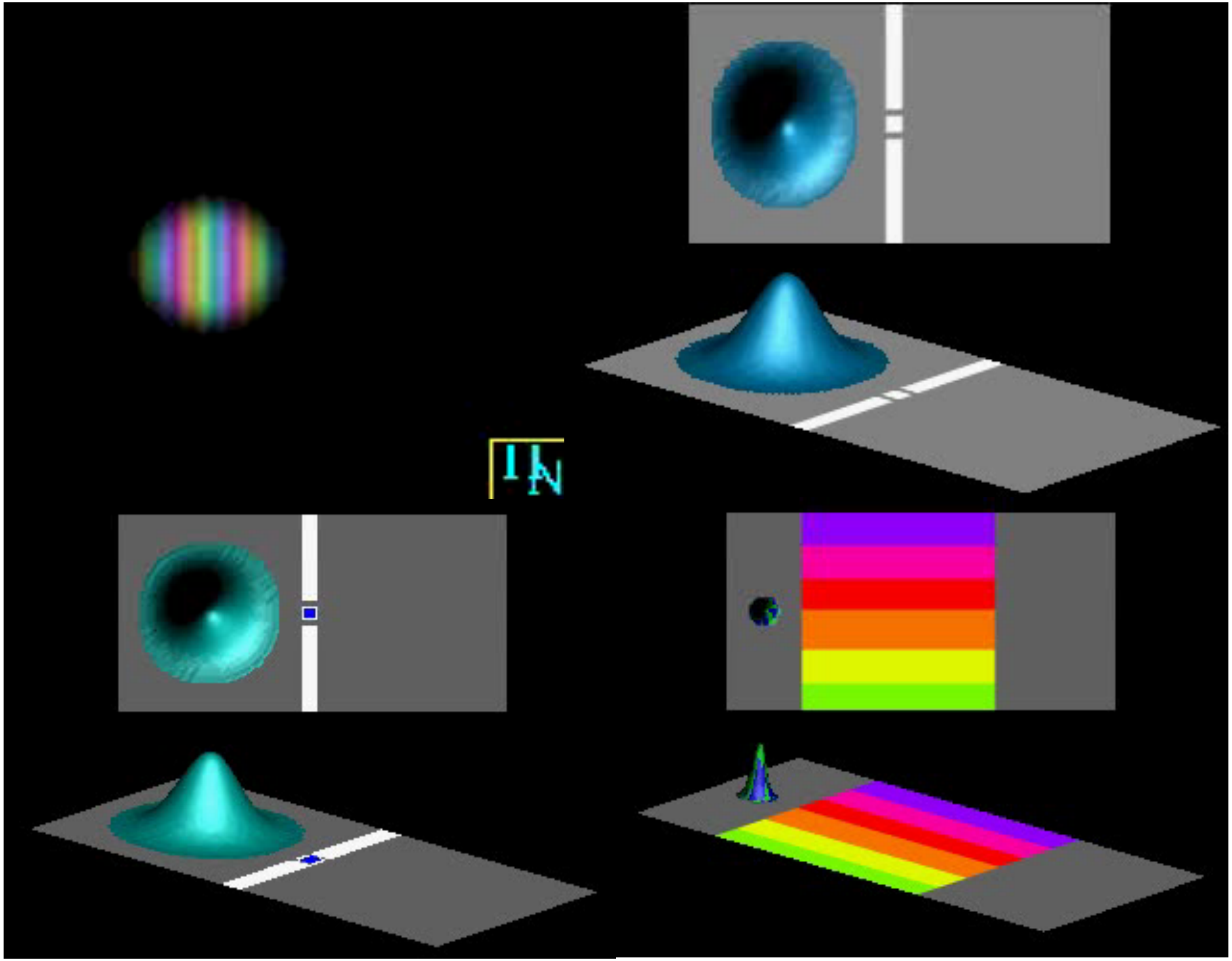
Para $\langle n|$ arbitrário, é preciso ter o elemento entre parênteses igual à zero, isto é:

$$\boxed{|\psi_i^{(+)}\rangle = |i\rangle + \frac{1}{E_i - H_0 + i\hbar\epsilon} V|\psi_i^{(+)}\rangle.}$$

Note que $\boxed{V|\psi_i^{(+)}\rangle = T|i\rangle}$

Esta é a equação de Lippmann-Schwinger obtida na aula anterior.

Espalhamento de um pacote de ondas

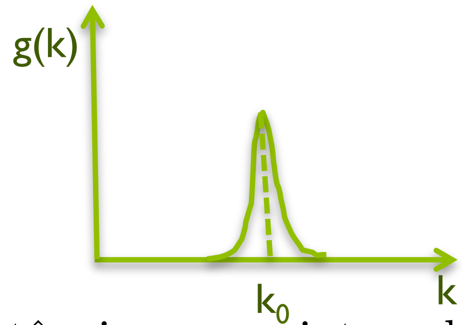


Espalhamento de um pacote de ondas

Evolução do pacote

$$\psi(\mathbf{r},t) = \int_0^\infty dk\; g(k)\psi_k^{(+)}(\mathbf{r})e^{-i\frac{E_k}{\hbar}t}$$

Para simplificar $g(k)$ real, unidimensional e tem pico em $k = k_0$ e é zero para k longe de k_0. Para $r \to \infty$, temos:



$$\psi(\mathbf{r},t) = \int_0^\infty dk\; g(k) \underbrace{\left(e^{ikz} + f_k(\theta,\varphi)\frac{e^{ikr}}{r}\right)}_{\lim\limits_{r\to\infty} \psi_k^{(+)}(\mathbf{r},t)} e^{-i\frac{E_k}{\hbar}t}$$

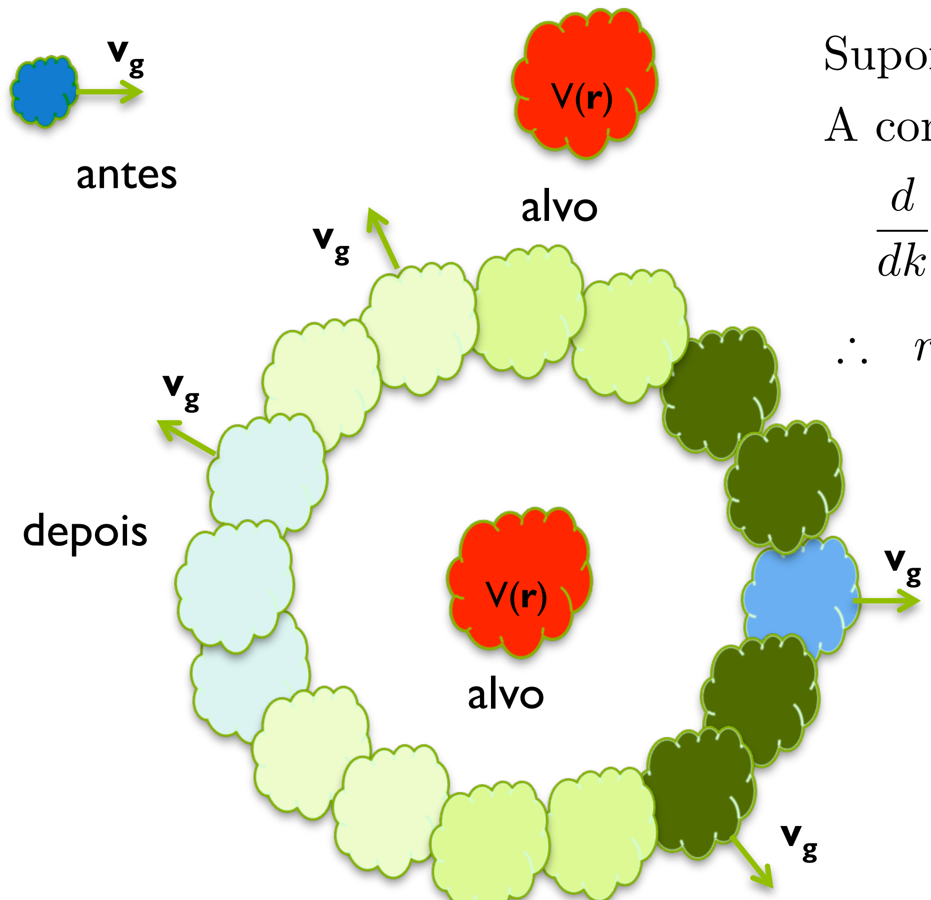
Pensando que $g(k)$ está centrado em k_0, em que circunstâncias que a integral em k contribui para o caso da onda incidente?

Se $(kz - \frac{E_k}{\hbar}t)$ variar ao redor de $k_0, e^{i(kz-\frac{E_k}{\hbar}t)}$ vai oscilar muito e "matar" a integral. Para que isso não ocorra exija que $\frac{d}{dk}(kz - \frac{E_k}{\hbar}t)\big|_{k=k_0} = 0$ e $\therefore$

$$z = \frac{1}{\hbar}\frac{dE_k}{dk}\Big|_{k=k_0} t = \frac{1}{\hbar}\frac{d}{dk}\frac{\hbar^2 k^2}{2m}\Big|_{k=k_0} t = \frac{\hbar k_0}{m}t,$$ ou seja, $z = v_G t = \frac{\hbar k_0}{m}t$ e

interprete como: *nas proximidades de z o pacote vai existir e z muda linearmente com t, $\therefore$ centro anda com velocidade $v_G = \frac{\hbar k_0}{m}$.*

Espalhamento de um pacote de ondas



Suponha $f_k(\theta, \varphi) = e^{-i\alpha_k} |f_k(\theta, \varphi)|$

A condição estacionária é dada por:

$$\frac{d}{dk}(kr - \alpha_k - \frac{E_k}{\hbar}t)\Big|_{k=k_0} = 0$$

$$\therefore \quad r = \frac{d\alpha_k}{dk}\Big|_{k=k_0} + \frac{\hbar k_0}{m} t$$

região de interferência do pacote de ondas planas com pacote de ondas esféricas

A onda espalhada não é esfericamente simétrica. Ela é modulada por $f(\theta, \varphi)$.

Só que r é sempre positivo. Assim p/ $\begin{cases} t \to -\infty \nexists \text{ condição estacionária.} \\ \\ t \to +\infty \exists \text{ condição estacionária.} \end{cases}$

O "centro" do pacote espalhado tb viaja com velocidade $v_G = \dfrac{\hbar k_0}{m}$.

Teorema Ótico (região de interferência da figura do slide 9)

Vamos mostrar que $\boxed{\mathrm{Im} f_k(\theta=0,\varphi) = \mathrm{Im} f(\mathbf{k},\mathbf{k}) = \frac{k\sigma_{tot}}{4\pi}}$, ou seja que o ângulo zero carrega a informação sobre as partículas que foram "retiradas" do feixe incidente pelo potencial e está relacionada à definição de seção de choque total: "todas que saíram, foram espalhadas".

Da equação de Lippmann-Schwinger $|\psi_i^{(+)}\rangle = |i\rangle + \frac{1}{E_i - H_0 + i\hbar\epsilon} V|\psi_i^{(+)}\rangle$,

podemos, tomando o adjunto Hermiteano, escrever uma equação para o bra:

$\langle\psi_i^{(+)}| = \langle i| + \langle\psi_i^{(+)}|V\frac{1}{E_i - H_0 - i\hbar\epsilon}$. Isso permite re-escrever a amplitude de

Normalização da caixa

Normalização de Dirac

espalhamento $f(\mathbf{k},\mathbf{k}) = -\frac{mL^3}{2\pi\hbar^2}\langle\mathbf{k}|V|\Psi_{\mathbf{k}}^{(+)}\rangle = -\frac{m4\pi^2}{\hbar^2}\langle\mathbf{k}|V|\Psi_{\mathbf{k}}^{(+)}\rangle$ apenas usando $\langle i| = \langle\mathbf{k}|$ nesta expressão do bra. E assim obter:

$$\langle\mathbf{k}|V|\Psi_{\mathbf{k}}^{(+)}\rangle = \left(\langle\Psi_{\mathbf{k}}^{(+)}| - \langle\Psi_{\mathbf{k}}^{(+)}|V\frac{1}{E_i - H_0 - i\hbar\epsilon}\right)V|\Psi_{\mathbf{k}}^{(+)}\rangle \text{ e}$$

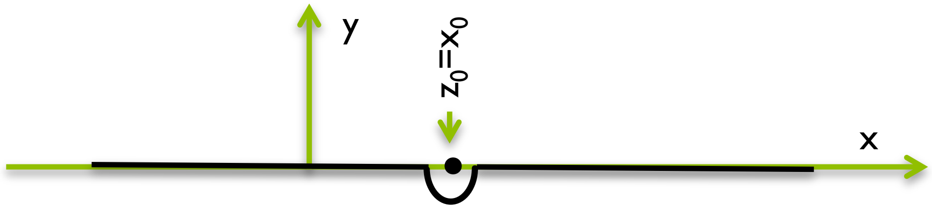
$$\mathrm{Im}\langle\mathbf{k}|V|\Psi_{\mathbf{k}}^{(+)}\rangle = \mathrm{Im}\underbrace{\langle\Psi_{\mathbf{k}}^{(+)}|V|\Psi_{\mathbf{k}}^{(+)}\rangle} - \mathrm{Im}\langle\Psi_{\mathbf{k}}^{(+)}|V\frac{1}{E_i - H_0 - i\hbar\epsilon}V|\Psi_{\mathbf{k}}^{(+)}\rangle$$

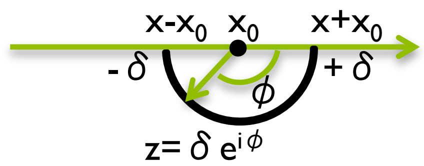
$0 \rightarrow$ pois é um número real

$$\mathrm{Im}\langle\mathbf{k}|V|\Psi_{\mathbf{k}}^{(+)}\rangle = -\mathrm{Im}\langle\Psi_{\mathbf{k}}^{(+)}|V\frac{1}{E_i - H_0 - i\hbar\epsilon}V|\Psi_{\mathbf{k}}^{(+)}\rangle$$

Teorema Ótico

Lembre que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x)}{x-x_0}dx=\mathcal{P}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x)}{x-x_0}dx+\int_C\frac{f(z)}{z-z_0}dz$ onde, $f(z)$ é uma função complexa com $z=x+iy$. O valor principal é definido por $\displaystyle\mathcal{P}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x)}{x-x_0}dx=\lim_{\delta\to 0}\Big(\int_{-\infty}^{x_0-\delta}\frac{f(x)}{x-x_0}dx+\int_{x_0+\delta}^{\infty}\frac{f(x)}{x-x_0}dx\Big)$ e o resíduo por $\displaystyle\int_C\frac{f(z)}{z-z_0}dz=\int_{-\delta}^{+\delta}\frac{f(z)}{z-z_0}dz=\int_{-\pi}^{0}\frac{f(x_0)}{\delta e^{i\phi}}(i\delta e^{i\phi}d\phi)=+i\pi f(x_0)$





Com isso, podemos calcular $\displaystyle\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{E-H_0-i\hbar\epsilon}=\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\delta(E'-E)}{E'-H_0-i\hbar\epsilon}dE'$

onde apenas usamos que a integração em E' de qualquer função multiplicada por $\delta(E'-E)$ fornece a função calculada em E. A função em questão é:

$\displaystyle\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{E'-H_0-i\hbar\epsilon}$. Assim, temos $\displaystyle\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\overset{f(x)}{\delta(E'-E)}}{\underbrace{E'-H_0-i\hbar\epsilon}_{x-x_0}}dE'\overset{\text{Defina } x=E'-E;\ x_0=H_0-E}{=}i\pi\underbrace{\delta(E-H_0)}_{f(-x_0)=f(x_0)}$

(apenas o resíduo pois o valor principal é zero). Usaremos esse resultado,

$\displaystyle\boxed{\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{E-H_0-i\hbar\epsilon}=i\pi\delta(E-H_0),}$ na última expressão do slide 11.

Teorema Ótico (normalização de Dirac)

Isso é $\mathrm{Im}\langle\mathbf{k}|V|\Psi_{\mathbf{k}}^{(+)}\rangle = -\mathrm{Im}\langle\Psi_{\mathbf{k}}^{(+)}|V\dfrac{1}{E_i - H_0 - i\hbar\epsilon}V|\Psi_{\mathbf{k}}^{(+)}\rangle =$

$$= -\mathrm{Im}\langle\Psi_{\mathbf{k}}^{(+)}|Vi\pi\delta(E-H_0)V|\Psi_{\mathbf{k}}^{(+)}\rangle =$$

$$= -\pi\langle\Psi_{\mathbf{k}}^{(+)}|V\delta(E-H_0)V|\Psi_{\mathbf{k}}^{(+)}\rangle = -\pi\langle\mathbf{k}|T^\dagger\delta(E-H_0)T|\mathbf{k}\rangle$$

onde nesta última passagem, usamos que $T|\mathbf{k}\rangle = V|\Psi_{\mathbf{k}}^{(+)}\rangle$. Assim,

$$\mathrm{Im}f(\mathbf{k},\mathbf{k}) = -\frac{4\pi^2 m}{\hbar^2}\mathrm{Im}\langle\mathbf{k}|V|\Psi_{\mathbf{k}}^{(+)}\rangle = \frac{4\pi^3 m}{\hbar^2}\int d^3k'\langle\mathbf{k}|T^\dagger\delta(E-H_0)|\mathbf{k}'\rangle\langle\mathbf{k}'|T|\mathbf{k}\rangle$$

E finalmente $\mathrm{Im}f(\mathbf{k},\mathbf{k}) = \dfrac{4\pi^3 m}{\hbar^2}\displaystyle\int d^3k'|\langle\mathbf{k}'|T|\mathbf{k}\rangle|^2\delta(E - \dfrac{\hbar^2 k'^2}{2m})$ com $E = \dfrac{\hbar^2 k^2}{2m}$

Lembrando que $f(\mathbf{k}',\mathbf{k}) = -\dfrac{4\pi^2 m}{\hbar^2}\langle\mathbf{k}'|V|\Psi_{\mathbf{k}}^{(+)}\rangle = -\dfrac{4\pi^2 m}{\hbar^2}\langle\mathbf{k}'|T|\mathbf{k}\rangle$, podemos

escrever $\mathrm{Im}f(\mathbf{k},\mathbf{k}) = \dfrac{4\pi^3 m}{\hbar^2}\left(\dfrac{\hbar^2}{4\pi^2 m}\right)^2\displaystyle\int d^3k'|f(\mathbf{k}',\mathbf{k})|^2\delta(E - \dfrac{\hbar^2 k'^2}{2m}) = \left(\dfrac{\hbar^2}{4\pi m}\right)\times$

$$\times\int d^3k'|f(\mathbf{k}',\mathbf{k})|^2\delta(E - \frac{\hbar^2 k'^2}{2m}) = \left(\frac{\hbar^2}{4\pi m}\right)\int dE\rho(E)d\Omega_{\mathbf{k}'}|f(\mathbf{k}',\mathbf{k})|^2\delta(E - \frac{\hbar^2 k'^2}{2m})$$

$$= \left(\frac{\hbar^2}{4\pi m}\right)\underbrace{\frac{mk}{\hbar^2}}_{\rho(E)\text{ para }|\mathbf{k}'| = |\mathbf{k}|}\int d\Omega_{\mathbf{k}'}|f(\mathbf{k}',\mathbf{k})|^2 = \frac{k}{4\pi}\int d\Omega_{\mathbf{k}'}|f(\mathbf{k}',\mathbf{k})|^2 = \frac{k\sigma_{tot}}{4\pi} \quad \boxed{\text{c.q.d.}}$$

Instituto de Física Gleb Wataghin
IFGW
UNICAMP

Teorema Ótico (normalização da caixa)

Isso é $\mathrm{Im}\langle\mathbf{k}|V|\Psi_{\mathbf{k}}^{(+)}\rangle = -\mathrm{Im}\langle\Psi_{\mathbf{k}}^{(+)}|V\dfrac{1}{E_i - H_0 - i\hbar\epsilon}V|\Psi_{\mathbf{k}}^{(+)}\rangle =$

$$= -\mathrm{Im}\langle\Psi_{\mathbf{k}}^{(+)}|Vi\pi\delta(E-H_0)V|\Psi_{\mathbf{k}}^{(+)}\rangle =$$

$$= -\pi\langle\Psi_{\mathbf{k}}^{(+)}|V\delta(E-H_0)V|\Psi_{\mathbf{k}}^{(+)}\rangle = -\pi\langle\mathbf{k}|T^\dagger\delta(E-H_0)T|\mathbf{k}\rangle$$

onde nesta última passagem, usamos que $T|\mathbf{k}\rangle = V|\Psi_{\mathbf{k}}^{(+)}\rangle$

Assim $\mathrm{Im}f(\mathbf{k},\mathbf{k}) = -\dfrac{mL^3}{2\pi\hbar^2}\mathrm{Im}\langle\mathbf{k}|V|\Psi_{\mathbf{k}}^{(+)}\rangle = \dfrac{mL^3}{2\hbar^2}\displaystyle\sum_{\mathbf{k}'}\langle\mathbf{k}|T^\dagger\delta(E-H_0)|\mathbf{k}'\rangle\langle\mathbf{k}'|T|\mathbf{k}\rangle$

E finalmente $\mathrm{Im}f(\mathbf{k},\mathbf{k}) = \dfrac{mL^3}{2\hbar^2}\displaystyle\sum_{\mathbf{k}'}|\langle\mathbf{k}'|T|\mathbf{k}\rangle|^2\delta_{E,\frac{\hbar^2k'^2}{2m}}$ com $E = \dfrac{\hbar^2k^2}{2m}$

Lembrando que $f(\mathbf{k}',\mathbf{k}) = -\dfrac{mL^3}{2\pi\hbar^2}\langle\mathbf{k}'|V|\Psi_{\mathbf{k}}^{(+)}\rangle = -\dfrac{mL^3}{2\pi\hbar^2}\langle\mathbf{k}'|T|\mathbf{k}\rangle$, podemos escrever $\mathrm{Im}f(\mathbf{k},\mathbf{k}) = \dfrac{mL^3}{2\hbar^2}\left(\dfrac{2\pi\hbar^2}{mL^3}\right)^2\displaystyle\sum_{\mathbf{k}'}|f(\mathbf{k}',\mathbf{k})|^2\delta_{E,\frac{\hbar^2k'^2}{2m}} = \left(\dfrac{2\pi^2\hbar^2}{mL^3}\right)\times$

$$\times\sum_{\mathbf{k}'}|f(\mathbf{k}',\mathbf{k})|^2\delta_{E,\frac{\hbar^2k'^2}{2m}} = \left(\frac{2\pi^2\hbar^2}{mL^3}\right)\int dE\rho(E)d\Omega_{\mathbf{k}'}|f(\mathbf{k}',\mathbf{k})|^2\delta\left(E-\frac{\hbar^2k'^2}{2m}\right)$$

$$= \left(\frac{2\pi^2\hbar^2}{mL^3}\right)\underbrace{\frac{mk}{\hbar^2}\left(\frac{L}{2\pi}\right)^3}_{\rho(E)\text{ para }|\mathbf{k}'|=|\mathbf{k}|}\int d\Omega_{\mathbf{k}'}|f(\mathbf{k}',\mathbf{k})|^2 = \frac{k}{4\pi}\int d\Omega_{\mathbf{k}'}|f(\mathbf{k}',\mathbf{k})|^2 = \frac{k\sigma_{tot}}{4\pi}\ \boxed{\text{c.q.d.}}$$