

Estados da partícula livre: ondas planas versus ondas esféricas

A Hamiltoniana do sistema de uma partícula livre é dada por: $H_0 = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}$

que em suas dimensões cartesianas fica $H_0 = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m}$. Para definir uma base, escolha $|k'_x\rangle \rightarrow p_x|k'_x\rangle = \hbar k'_x|k'_x\rangle$ e construa $|\mathbf{k}'\rangle = |k'_x\rangle \otimes |k'_y\rangle \otimes |k'_z\rangle$ de tal forma que $H_0|\mathbf{k}'\rangle = \frac{\hbar^2(k_x'^2 + k_y'^2 + k_z'^2)}{2m}|\mathbf{k}'\rangle = \frac{\hbar^2\mathbf{k}'^2}{2m}|\mathbf{k}'\rangle = \frac{\mathbf{p}'^2}{2m}|\mathbf{k}'\rangle$.

Na representação das coordenadas, temos $\langle \mathbf{x}' | \mathbf{k}' \rangle = \frac{e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}'}}{(2\pi)^{3/2}}$. Para obter isso,

percebemos que $[H_0, \mathbf{p}] = 0$ e usamos uma base de autokets de $\mathbf{p} \rightarrow |\mathbf{k}'\rangle$ com $\langle \mathbf{k}' | \mathbf{k}'' \rangle = \delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k}'')$. Quando necessário, outra nomenclatura: $\{|E, \hat{\mathbf{k}}\}$.

Acontece que $[H_0, \mathbf{L}^2] = [H_0, L_z] = 0$ e poderíamos procurar por uma base

$$\{|E, \ell, m\rangle\} \text{ tal que } \begin{cases} H_0|E, \ell, m\rangle = E|E, \ell, m\rangle \\ \mathbf{L}^2|E, \ell, m\rangle = \ell(\ell + 1)\hbar^2|E, \ell, m\rangle \\ L_z|E, \ell, m\rangle = m\hbar|E, \ell, m\rangle \\ \langle E', \ell', m' | E, \ell, m \rangle = \delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'}\delta(E - E') \end{cases}$$

Pergunta: como uma base se relaciona com a outra?

Estados da Partícula Livre: ondas planas versus ondas esféricas

Sabemos fazer esta conexão: $|E, \ell, m\rangle = \int d^3k |\mathbf{k}\rangle \underbrace{\langle \mathbf{k} | E, \ell, m \rangle}$

precisamos achar isso

Um chute, baseado nas propriedades esperadas: $\langle \mathbf{k} | E, \ell, m \rangle = A g_{\ell E}(k) Y_\ell^m(\hat{\mathbf{k}})$

Como provar que a fórmula escolhida para $\langle \mathbf{k} | E, \ell, m \rangle$ é apropriada?

Se acharmos a conexão com $|k\hat{\mathbf{z}}\rangle$, podemos rodá-lo para obter $|\mathbf{k}\rangle$, pois

$$|\mathbf{k}\rangle = \mathcal{D}(\alpha = \phi, \beta = \theta, \gamma = 0) |k\hat{\mathbf{z}}\rangle$$

Assim vamos atrás de $|k\hat{\mathbf{z}}\rangle$. Sabendo que

$|k\hat{\mathbf{z}}\rangle = |k_x = 0, k_y = 0, k_z\rangle$ aplique L_z para obter

$$L_z |k\hat{\mathbf{z}}\rangle = (xp_y - yp_x) |k_x = 0, k_y = 0, k_z\rangle = 0,$$

pois p_y (ou p_x) $|k_x = 0, k_y = 0, k_z\rangle = 0$. Onde se

conclui: *momento angular é nulo na direção de propagação*. Classicamente

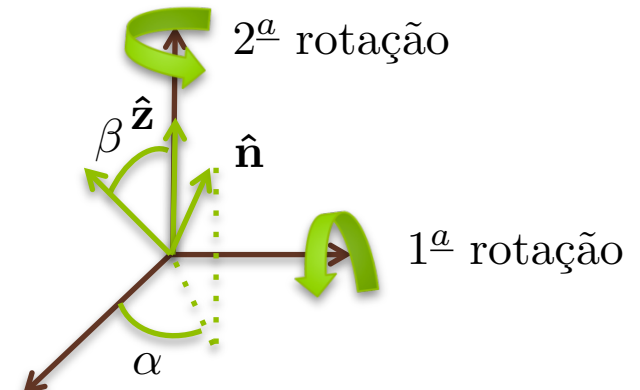
já era, pois $\mathbf{L} \cdot \mathbf{p} = (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) \cdot \mathbf{p} = 0$. Mas, se $L_z |k\hat{\mathbf{z}}\rangle = 0 \rightarrow |k\hat{\mathbf{z}}\rangle$ é autoket de L_z

com autovalor 0. Ao mesmo tempo, $L_z |E, \ell, m\rangle = m\hbar |E, \ell, m\rangle$. Isto implica

que $\langle E', \ell', m' | k\hat{\mathbf{z}} \rangle = 0$, se $m' \neq 0$ (autokets de um operador Hermiteano com

autovalores distintos são ortogonais). Com isso aprendemos algo:

$$|k\hat{\mathbf{z}}\rangle = \sum_{\ell' m'} \int dE' |E', \ell', m'\rangle \langle E', \ell', m' | k\hat{\mathbf{z}} \rangle \text{ pode ser reduzido à}$$



Estados da Partícula Livre: ondas planas versus ondas esféricas

$$\implies |k\hat{\mathbf{z}}\rangle = \sum_{\ell'} \int dE' |E', \ell', m' = 0\rangle \langle E', \ell', m' = 0|k\hat{\mathbf{z}}\rangle$$

Uma vez que $|\mathbf{k}\rangle = \mathcal{D}(\alpha = \phi, \beta = \theta, \gamma = 0)|k\hat{\mathbf{z}}\rangle$, podemos escrever:

$$\langle E, \ell, m|\mathbf{k}\rangle = \sum_{\ell'} \int dE' \langle E, \ell, m|\mathcal{D}(\alpha = \phi, \beta = \theta, \gamma = 0)|E', \ell', m' = 0\rangle \times$$

$\times \langle E', \ell', m' = 0|k\hat{\mathbf{z}}\rangle$. Lembre que \mathcal{D} é de fato um operador que depende apenas

de L_i (sua forma geral é $\mathcal{D} = \exp\left(-i\frac{J_z\alpha}{\hbar}\right) \exp\left(-i\frac{J_y\beta}{\hbar}\right) \exp\left(-i\frac{J_z\gamma}{\hbar}\right)$) e \therefore

é incapaz de mudar ℓ' e E' . Com isso em mente, podemos escrever:

$$\langle E, \ell, m|\mathbf{k}\rangle = \sum_{\ell'} \int dE' \delta(E' - E) \delta_{\ell'\ell} \underbrace{\mathcal{D}_{m0}^{(\ell')}(\alpha = \phi, \beta = \theta, \gamma = 0)} \langle E', \ell', m' = 0|k\hat{\mathbf{z}}\rangle$$

Isso é conhecido, fórmula 3.6.52 do livro, $\sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}} Y_{\ell'}^{m*}(\hat{\mathbf{k}})$. Assim, obtemos

que $\langle E, \ell, m|\mathbf{k}\rangle = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}} Y_{\ell}^{m*}(\hat{\mathbf{k}}) \langle E, \ell, m=0|k\hat{\mathbf{z}}\rangle$. Tome o complexo conjugado

para comparar com fórmula do slide anterior, e conclua que a proposta estava

correta, pois $g_{\ell E}(k) = \langle E, \ell, m=0|k\hat{\mathbf{z}}\rangle^* \rightarrow$ não depende de θ e ϕ e depende

apenas de E, k e ℓ . E assim, $\langle \mathbf{k}|E, \ell, m\rangle = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}} g_{\ell E}(k) Y_{\ell}^m(\hat{\mathbf{k}})$.

Estados da Partícula Livre: ondas planas versus ondas esféricas

Para calcular $g_{\ell E}(k)$, comece com $(H_0 - E)|E, \ell, m\rangle = 0$ e multiplique pela esquerda por $\langle \mathbf{k} |$ para obter:

$$\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - E\right) \langle \mathbf{k} | E, \ell, m \rangle = 0 \Rightarrow \langle \mathbf{k} | E, \ell, m \rangle = 0 \text{ sempre que } \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \neq E \quad \therefore$$

$\langle \mathbf{k} | E, \ell, m \rangle$ é uma função delta. Podemos escrever isso da seguinte forma

$$\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - E\right) g_{\ell E}(k) Y_{\ell}^m(\hat{\mathbf{k}}) = 0 \text{ (ver slide 2) com } g_{\ell E}(k) = N \delta\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - E\right)$$

Para achar N , que tal usarmos $\langle E', \ell', m' | E, \ell, m \rangle = \delta(E - E') \delta_{\ell \ell'} \delta_{m m'} =$

$$\begin{aligned} &= \int d^3 k'' \langle E', \ell', m' | \mathbf{k}'' \rangle \langle \mathbf{k}'' | E, \ell, m \rangle = \frac{4\pi}{2\ell + 1} \int k''^2 dk'' \int d\Omega_{\hat{\mathbf{k}}''} g_{\ell' E'}^*(k'') \times \\ &\times g_{\ell E}(k'') Y_{\ell'}^{m'*}(\hat{\mathbf{k}}'') Y_{\ell}^m(\hat{\mathbf{k}}'') = \frac{4\pi}{2\ell + 1} \int k''^2 dk'' \int d\Omega_{\hat{\mathbf{k}}''} |N|^2 \delta\left(\frac{\hbar^2 k''^2}{2m} - E'\right) \times \\ &\times \delta\left(\frac{\hbar^2 k''^2}{2m} - E\right) Y_{\ell'}^{m'*}(\hat{\mathbf{k}}'') Y_{\ell}^m(\hat{\mathbf{k}}''). \end{aligned}$$

Se considerarmos que $\frac{\hbar^2 k''^2}{2m} = E'' \Rightarrow \frac{\hbar^2 k''}{m} dk'' = dE'' \Rightarrow k''^2 dk'' = \frac{m}{\hbar^2} k'' dE''$,

podemos escrever: $\langle E', \ell', m' | E, \ell, m \rangle = \frac{4\pi}{2\ell + 1} \int \frac{m}{\hbar^2} k'' dE'' \int d\Omega_{\hat{\mathbf{k}}''} |N|^2 \times$

$\times \delta(E'' - E') \delta(E'' - E) Y_{\ell'}^{m'*}(\hat{\mathbf{k}}'') Y_{\ell}^m(\hat{\mathbf{k}}'')$ e ao fazer a integral, temos

Estados da Partícula Livre: ondas planas versus ondas esféricas

$$\langle E', \ell', m' | E, \ell, m \rangle = \frac{4\pi}{2\ell + 1} \frac{m}{\hbar^2} k |N|^2 \delta(E' - E) \delta_{\ell'\ell} \delta_{m'm},$$

onde usamos que

$$\begin{cases} \int dE'' f(E'') \delta(E'' - E') \delta(E'' - E) = f(E) \delta(E' - E) \\ \int d\Omega_{\hat{\mathbf{k}}''} Y_{\ell'}^{m'*}(\hat{\mathbf{k}}'') Y_{\ell}^m(\hat{\mathbf{k}}'') = \delta_{\ell'\ell} \delta_{m'm} \end{cases}$$

Comparação direta com $\langle E', \ell', m' | E, \ell, m \rangle = \delta(E' - E) \delta_{\ell'\ell} \delta_{m'm}$ nos leva à

$$|N|^2 = \frac{\hbar^2}{mk} \frac{2\ell + 1}{4\pi} \Rightarrow N = \frac{\hbar}{\sqrt{mk}} \sqrt{\frac{2\ell + 1}{4\pi}} \text{ e finalmente}$$

$$\langle \mathbf{k} | E, \ell, m \rangle = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell + 1}} \frac{\hbar}{\sqrt{mk}} \delta\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - E\right) \sqrt{\frac{2\ell + 1}{4\pi}} Y_{\ell}^m(\hat{\mathbf{k}}) \text{ ou}$$

$$\langle \mathbf{k} | E, \ell, m \rangle = \frac{\hbar}{\sqrt{mk}} \delta\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - E\right) Y_{\ell}^m(\hat{\mathbf{k}})$$

Podemos usar este resultado para escrever $|\mathbf{k}\rangle = \sum_{\ell m} \int dE |E, \ell, m\rangle \langle E, \ell, m | \mathbf{k}\rangle$

ou ainda $|\mathbf{k}\rangle = \sum_{\ell m} |E, \ell, m\rangle \Big|_{E=\frac{\hbar^2 k^2}{2m}} \frac{\hbar}{\sqrt{mk}} Y_{\ell}^{m*}(\hat{\mathbf{k}})$. E o $\langle \mathbf{x} | \mathbf{k}\rangle$?

Estados da Partícula Livre: ondas planas versus ondas esféricas

$$\langle \mathbf{x} | \mathbf{k} \rangle = \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}}{(2\pi)^{3/2}} = \sum_{\ell m} \langle \mathbf{x} | E, \ell, m \rangle \frac{\hbar}{\sqrt{mk}} Y_{\ell}^{m*}(\hat{\mathbf{k}}), \text{ onde } \langle \mathbf{x} | E, \ell, m \rangle = c_{\ell} j_{\ell}(kr) Y_{\ell}^m(\hat{\mathbf{r}})$$

Para casa (1): *mostre que* $c_{\ell} = \frac{i^{\ell}}{\hbar} \sqrt{\frac{2mk}{\pi}}$. *Para isso, use teorema de adição,*

$$\sum_m Y_{\ell}^m(\hat{\mathbf{r}}) Y_{\ell}^{m*}(\hat{\mathbf{k}}) = \frac{2\ell + 1}{4\pi} P_{\ell}(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{r}})$$

e que $j_{\ell}(kr) \equiv \frac{1}{2i^{\ell}} \int_{-1}^{+1} e^{ik \cos \theta} P_{\ell}(\cos \theta) d(\cos \theta)$.

Resumo

$$\langle \mathbf{k} | E, \ell, m \rangle = \frac{\hbar}{\sqrt{mk}} \delta\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - E\right) Y_{\ell}^m(\hat{\mathbf{k}})$$

$$\langle \mathbf{x} | E, \ell, m \rangle = \frac{i^{\ell}}{\hbar} \sqrt{\frac{2mk}{\pi}} j_{\ell}(kr) Y_{\ell}^m(\hat{\mathbf{r}})$$

Para casa (2): *analise o decaimento* $\text{Ne}^{20*} \rightarrow \text{O}^{16} + \text{He}^4$, *considerando que o “pai”* (Ne^{20*}) *está inicialmente com spin 1 e que os filhos* ($\text{O}^{16} + \text{He}^4$) *ficam ambos com spin zero.*

Ondas parciais e deslocamentos de fase

O método de ondas parciais para o problema de espalhamento.

$$\text{Considere } V \neq 0, \text{ mas (para simplificar) } V(\mathbf{x}) = V(r) \Rightarrow \begin{cases} [V, L^2] = 0 \\ [V, L_z] = 0 \end{cases}$$

O operador de transição T definido anteriormente por:

$$T = V + V \frac{1}{E_i - H_0 + i\hbar\epsilon} V + V \frac{1}{E_i - H_0 + i\hbar\epsilon} V \frac{1}{E_i - H_0 + i\hbar\epsilon} V + \dots$$

também comuta com \mathbf{L}^2 e $\mathbf{L} \rightarrow \therefore T$ é um operador escalar. Aplicação

$$\text{do teorema de Wigner-Eckart } \langle \alpha', j' m' | S | \alpha, j m \rangle = \delta_{jj'} \delta_{mm'} \frac{\langle \alpha', j' || S || \alpha, j \rangle}{\sqrt{2j+1}}$$

onde a barra dupla, indica que não depende de m e m' , permite escrever

$$\langle E, \ell' m' | T | E, \ell m \rangle = T_\ell(E) \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}$$

Isso traz uma **mensagem importante**:

O potencial esfericamente simétrico não consegue alterar ℓ e m no processo de espalhamento.

Ondas parciais e deslocamentos de fase

A amplitude de espalhamento $f(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{2m}{\hbar^2} (2\pi)^3 \langle \mathbf{k}' | T | \mathbf{k} \rangle$ pode ser escrita por:

$$-\frac{1}{4\pi} \frac{2m}{\hbar^2} (2\pi)^3 \sum_{\ell m} \sum_{\ell' m'} \int dE \int dE' \langle \mathbf{k}' | E', \ell', m' \rangle \langle E', \ell', m' | T | E, \ell, m \rangle \langle E, \ell, m | \mathbf{k} \rangle$$

Usando que $\begin{cases} \langle \mathbf{k} | E, \ell, m \rangle = \frac{\hbar}{\sqrt{mk}} \delta\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - E\right) Y_\ell^m(\hat{\mathbf{k}}) \\ \langle E', \ell' m' | T | E, \ell m \rangle = T_\ell(E) \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} \end{cases} \implies$ obtemos:

$$f(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{2m}{\hbar^2} (2\pi)^3 \frac{\hbar^2}{mk} \sum_{\ell m} T_\ell(E) \Big|_{E=\frac{\hbar^2 k^2}{2m}} Y_\ell^m(\hat{\mathbf{k}}') Y_\ell^{m*}(\hat{\mathbf{k}})$$

ou melhor: $f(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = -\frac{4\pi^2}{k} \sum_{\ell m} T_\ell(E) \Big|_{E=\frac{\hbar^2 k^2}{2m}} Y_\ell^m(\hat{\mathbf{k}}') Y_\ell^{m*}(\hat{\mathbf{k}})$

Para obter a dependência angular da amplitude de espalhamento, vamos escolher $\hat{\mathbf{k}}$ na direção $\hat{\mathbf{z}}$ (direção do feixe incidente no referencial

do laboratório). Nestas condições $Y_\ell^m(\hat{\mathbf{k}}) = Y_\ell^m(\hat{\mathbf{z}}) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} \delta_{m0}$

mostre



Ondas parciais e deslocamentos de fase

A amplitude de espalhamento fica

$$f(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = -\frac{4\pi^2}{k} \sum_{\ell} T_{\ell}(E) \Big|_{E=\frac{\hbar^2 k^2}{2m}} Y_{\ell}^0(\hat{\mathbf{k}}') \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}, \text{ onde (mostre)}$$

$$Y_{\ell}^0(\hat{\mathbf{k}}') = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} P_{\ell}(\cos \theta). \text{ Definindo, } f_{\ell} = -\frac{\pi}{k} T_{\ell}(k), \text{ temos}$$

$$f(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = f(\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) f_{\ell}(k) P_{\ell}(\cos \theta)$$

Para entender o significado físico de $f_{\ell}(k)$, vamos estudar o comportamento à longas distâncias de $\langle \mathbf{x} | \Psi_{\mathbf{k}}^{(+)} \rangle$, isto é:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \langle \mathbf{x} | \Psi_{\mathbf{k}}^{(+)} \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left(e^{ik \cdot z} + \frac{e^{ikr}}{r} f(\theta) \right)$$

Do slide 6, temos $e^{ikz} = \sum_{\ell} (2\ell+1) i^{\ell} j_{\ell}(kr) P_{\ell}(\cos \theta)$ onde (mostre)

$$\lim_{r \rightarrow \infty} j_{\ell}(kr) = \frac{e^{+i(kr-\ell\pi/2)} - e^{-i(kr-\ell\pi/2)}}{2ikr} = \underbrace{e^{-i\ell\pi/2}}_{i^{-\ell}} \left(\frac{e^{+ikr} - e^{-i(kr-\ell\pi)}}{2ikr} \right)$$

$$\text{assim } \lim_{r \rightarrow \infty} e^{ikz} = \sum_{\ell} (2\ell+1) P_{\ell}(\cos \theta) \left(\frac{e^{+ikr} - e^{-i(kr-\ell\pi)}}{2ikr} \right)$$

Aula 14 Colocando os resultados das caixa verdes na caixa azul do slide anterior, temos:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \langle \mathbf{x} | \Psi_{\mathbf{k}}^{(+)} \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\ell} (2\ell + 1) P_{\ell}(\cos \theta) \left(\frac{e^{+ikr} - e^{-i(kr - \ell\pi)}}{2ikr} + \frac{e^{ikr}}{r} f_{\ell}(k) \right)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \langle \mathbf{x} | \Psi_{\mathbf{k}}^{(+)} \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\ell} (2\ell + 1) \frac{P_{\ell}(\cos \theta)}{2ik} \left(\underbrace{[1 + 2ik f_{\ell}(k)]}_{\text{potencial só afeta a onda esférica que sai}} \frac{e^{+ikr}}{r} - \frac{e^{-i(kr - \ell\pi)}}{r} \right)$$

*o potencial só afeta a
onda esférica que sai*

O coeficiente da onda esférica emergente $[1 + 2ik f_{\ell}(k)] = 1$, se $V = 0$.

Se construíssemos pacotes, o pacote associado à $\frac{e^{ikr}}{r}$ só existiria p/ $cte \leq t \leq \infty$

e o associado à $\frac{e^{-ikr}}{r}$ só existiria p/ $-\infty \leq t \leq cte'$. Assim, como o $|\Psi_{\mathbf{k}}^{(+)}\rangle$

contém a informação completa (antes e depois da colisão), é de se esperar que:

$\oint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0$. As partículas que entram devem sair (se não há ralos e fontes).

Assim, o fluxo associado à $\frac{e^{ikr}}{r}$ deve ser igual ao fluxo associado à $\frac{e^{-ikr}}{r}$. Isso

deve valer para cada onda parcial. Para calcular esses fluxos, defina antes

$$S_{\ell} \equiv 1 + 2ik f_{\ell}(k).$$

Ondas parciais e deslocamentos de fase

Assim, a partir de $\mathbf{J} = \frac{\hbar}{m} \text{Im}(\psi^* \nabla \psi)$ podemos escrever

$$\left| \int r^2 d\Omega \text{Im} \left(S_\ell^* \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\partial}{\partial r} S_\ell \frac{e^{ikr}}{r} \right) \right| = \left| \int r^2 d\Omega \text{Im} \left(\frac{e^{-i(kr-\ell\pi)}}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{e^{-i(kr-\ell\pi)}}{r} \right) \right|$$

$$4\pi |S_\ell|^2 = 4\pi \implies |S_\ell| = 1 \text{ (fruto da conservação de fluxo).}$$

Se $|S_\ell| = 1$, é sugestiva a seguinte definição: $S_\ell = e^{2i\delta_\ell}$ $\left\{ \begin{array}{l} \delta_\ell \equiv \left\{ \begin{array}{l} \text{deslocamento} \\ \text{de fase} \end{array} \right. \\ \delta_\ell \rightarrow \text{número real} \\ \text{o 2 é convenção} \end{array} \right.$

O que deixa claro que a existência do potencial pode no máximo infligir uma mudança de fase na onda esférica emergente. Como $S_\ell \equiv 1 + 2ikf_\ell(k)$,

podemos escrever $f_\ell = \frac{e^{2i\delta_\ell} - 1}{2ik} = \frac{e^{i\delta_\ell} \sin \delta_\ell}{k} = \frac{\sin \delta_\ell}{ke^{-i\delta_\ell}} = \frac{\sin \delta_\ell}{k(\cos \delta_\ell - i \sin \delta_\ell)}$

Ou ainda $f_\ell = \frac{1}{k(\cot \delta_\ell - i)}$. Assim, $f(\theta) = \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) e^{i\delta_\ell} \sin \delta_\ell P_\ell(\cos \theta)$

está forma será útil

Note que para deduzir isso, usamos apenas Invariança Rotacional e conservação de probabilidade.