

Quantização do campo eletromagnético

As equações de Maxwell fornecem uma descrição clássica completa de campos elétricos e magnéticos que não interagem no espaço “vazio”. A descrição destes campos na Mecânica Quântica têm seus truques e iremos, levemente, explorá-los nesta aula. Usaremos o formalismo de partículas idênticas desenvolvido nas aulas passadas para este fim. As “partículas” envolvidas, como vocês já devem ter imaginado, são os fótons (obedecem a estatística de Bose-Einstein).

Equações de Maxwell no espaço livre (de cargas e correntes).

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho(\mathbf{x}, t) \\ (2) \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ (3) \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \\ (4) \quad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) \end{array} \right. \quad \text{para} \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho(\mathbf{x}, t) = 0 \\ \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = 0 \end{array} \right. \quad \text{temos} \quad \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \\ (2) \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ (3) \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \\ (4) \quad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \end{array} \right.$$

O procedimento tradicional é postular um potencial vetor $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$, tal que $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ (para satisfazer a equação (2)). Sem cargas e correntes é usual

utilizar o Gauge de Coulomb, onde $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ e $\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \Rightarrow$ Equações (1)

e (3) também ficam satisfeitas. A equação (4) é satisfeita se \mathbf{A} for solução de:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} - \frac{1}{c} \frac{\partial \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0$$

Quantização do campo eletromagnético

Ou seja, o potencial vetor $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$, satisfaz uma equação de onda, que viaja com a velocidade da luz, c , conforme previsto.

Soluções para $\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{k}) e^{\pm i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} e^{\pm i \omega_k t}$ com $\omega_k = |\mathbf{k}|c$

Note que o Gauge de Coulomb $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \Rightarrow \mathbf{k} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{k}) = 0$ e $\therefore \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \perp \mathbf{k}$.

O potencial vetor é perpendicular à direção de propagação. Por esta razão, o Gauge de Coulomb é conhecido por Gauge transversal. A notação da solução geral pode ser simplificada para $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}\lambda} A_{\mathbf{k}\lambda}(\mathbf{x}, t)$ onde $\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}\lambda}$ são dois

versores (dois valores de λ) perpendiculares à \mathbf{k} e a forma geral para $A_{\mathbf{k}\lambda}(\mathbf{x}, t)$ fica

$$A_{\mathbf{k}\lambda}(\mathbf{x}, t) = A_{\mathbf{k}\lambda} e^{-i(\omega_k t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} + A_{\mathbf{k}\lambda}^* e^{+i(\omega_k t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}$$

Note que \mathbf{k} e $-\mathbf{k}$ correspondem a diferentes termos na soma e que $A_{\mathbf{k}\lambda}$ e $A_{\mathbf{k}\lambda}^*$ são números (não são funções de \mathbf{r} e t). Note também que a equação diferencial que define \mathbf{A} é linear e \therefore combinação de soluções também é uma solução.

Estamos somando e não integrando por que faremos a normalização da caixa.

A forma de $A_{\mathbf{k}\lambda}(\mathbf{x}, t)$ é para garantir que $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ seja real e seu análogo quântico Hermiteano.

Quantização do campo eletromagnético

Como veremos que será útil, é melhor tomar os vetores unidade $\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}\lambda}$ nas direções de polarização circular, ao invés da polarização linear. Ou seja: se a polarização linear tem direções $\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}}^{(1)}$ e $\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}}^{(2)}$, perpendiculares à \mathbf{k} , tomaremos

$$\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}\pm} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}}^{(1)} \pm i\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}}^{(2)}),$$

que possui as seguintes propriedades (mostre) $\left\{ \begin{array}{l} \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}\lambda}^* \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\pm\mathbf{k}\lambda'} = \pm\delta_{\lambda\lambda'} \\ \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}\lambda}^* \times \hat{\mathbf{e}}_{\pm\mathbf{k}\lambda'} = \pm i\lambda\delta_{\lambda\lambda'}\hat{\mathbf{k}} \end{array} \right.$

onde $\hat{\mathbf{k}}$ é o vetor unitário na direção de \mathbf{k} .

Os campos elétrico, $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$, e magnético, $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \nabla \times \mathbf{A}$, podem ser

escritos por $\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{\mathbf{k}, \lambda} \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}\lambda} (A_{\mathbf{k}\lambda} e^{-i(\omega_k t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} + A_{\mathbf{k}\lambda}^* e^{+i(\omega_k t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}) \right) \\ \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \nabla \times \left(\sum_{\mathbf{k}, \lambda} \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}\lambda} (A_{\mathbf{k}\lambda} e^{-i(\omega_k t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} + A_{\mathbf{k}\lambda}^* e^{+i(\omega_k t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}) \right) \end{array} \right.$

Quantização do campo eletromagnético

A energia no campo eletromagnético é dada pela integração da densidade de energia no espaço todo, isto é:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{8\pi} \int_V \left[|\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)|^2 + |\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)|^2 \right]$$

onde espaço todo é, como antes, o volume $V = L^3$ com condições periódicas de contorno. Na linguagem do eletromagnetismo estamos em uma cavidade imensa com paredes condutoras, o que significa $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z) = \frac{2\pi}{L}(n_x, n_y, n_z)$ com n_x , n_y e n_z inteiros.

Do slide anterior, podemos calcular o campo elétrico:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= -\frac{1}{c} \left(\sum_{\mathbf{k}, \lambda} \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}\lambda} \left(A_{\mathbf{k}\lambda} \frac{\partial}{\partial t} e^{-i(\omega_k t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} + A_{\mathbf{k}\lambda}^* \frac{\partial}{\partial t} e^{+i(\omega_k t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \right) \right) = \\ &= \frac{i}{c} \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \omega_k \left[A_{\mathbf{k}\lambda} e^{-i(\omega_k t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} - A_{\mathbf{k}\lambda}^* e^{+i(\omega_k t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \right] \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}\lambda} \end{aligned}$$

e seu complexo conjugado (para o primeiro termo de \mathcal{E})

$$\mathbf{E}^*(\mathbf{x}, t) = -\frac{i}{c} \sum_{\mathbf{k}', \lambda'} \omega_{k'} \left[A_{\mathbf{k}'\lambda'}^* e^{+i(\omega_{k'} t - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{x})} - A_{\mathbf{k}'\lambda'} e^{-i(\omega_{k'} t - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{x})} \right] \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}'\lambda'}^*$$

As variáveis $A_{\mathbf{k}\lambda}$ e $A_{\mathbf{k}\lambda}^$ vão virar operadores de criação e aniquilação: \therefore mantenha a ordem ao realizar o produto!*

Quantização do campo eletromagnético

Ao colocar este resultado na expressão da energia, mantendo a ordem dos futuros operadores $A_{\mathbf{k}\lambda}$ e $A_{\mathbf{k}\lambda}^*$, teríamos duas somas (com linha e sem linha) de quatro produtos que pode ser simplificada, lembrando que as ondas livres são ortogonais, isto é $\int_V e^{i(\mathbf{k}\mp\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} d^3x = V\delta_{\mathbf{k},\mp\mathbf{k}'}$. Isso permite escrever

$$\int_V |\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)|^2 d^3x = \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \frac{\omega_k^2}{c^2} V [A_{\mathbf{k}\lambda}^* A_{\mathbf{k}\lambda} + A_{\mathbf{k}\lambda} A_{\mathbf{k}\lambda}^* + A_{\mathbf{k}\lambda}^* A_{-\mathbf{k}\lambda}^* e^{2i\omega_k t} + A_{\mathbf{k}\lambda} A_{-\mathbf{k}\lambda} e^{-2i\omega_k t}]$$

O que muda para a contribuição do campo magnético? O efeito do rotacional, na prática troca o $\frac{\omega_k}{c} \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}\lambda}$ por $\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}\lambda}$. Como ambos têm o mesmo módulo, pois $|\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}\lambda}|^2 = |\mathbf{k}|^2 = \omega_k^2/c^2 = k^2$, a diferença está apenas no fato que na troca

$$\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k} \begin{cases} \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}\lambda} \rightarrow \hat{\mathbf{e}}_{-\mathbf{k}\lambda} = -\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}\lambda} \\ \mathbf{k} \times \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}\lambda} \rightarrow -\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{e}}_{-\mathbf{k}\lambda} = \mathbf{k} \times \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}\lambda} \end{cases} \quad \text{e com isso a contribuição}$$

do campo magnético fica:

$$\int_V |\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)|^2 d^3x = \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \frac{\omega_k^2}{c^2} V [A_{\mathbf{k}\lambda}^* A_{\mathbf{k}\lambda} + A_{\mathbf{k}\lambda} A_{\mathbf{k}\lambda}^* - A_{\mathbf{k}\lambda}^* A_{-\mathbf{k}\lambda}^* e^{2i\omega_k t} - A_{\mathbf{k}\lambda} A_{-\mathbf{k}\lambda} e^{-2i\omega_k t}]$$

Fótons e Quantização da Energia

Com isso a energia no campo eletromagnético fica dada por:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{8\pi} \int_V \left[|\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)|^2 + |\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)|^2 \right] = \frac{1}{4\pi} V \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \frac{\omega_k^2}{c^2} \left[A_{\mathbf{k}\lambda}^* A_{\mathbf{k}\lambda} + A_{\mathbf{k}\lambda} A_{\mathbf{k}\lambda}^* \right]$$

Nosso objetivo agora é associar esse valor de energia ao autovalor de um operador Hermiteano. Fazemos isso com a hipótese sobre o campo eletromagnético seja composto por uma coleção de partículas idênticas chamadas fótons.

Para isso definiremos

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{\lambda}^{\dagger}(\mathbf{k}) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{um operador que cria um fóton} \\ \text{com polarização } \lambda, \text{ momento } \hbar\mathbf{k}, \\ \text{e energia } \hbar\omega_k = \hbar ck. \end{array} \right. \\ \\ a_{\lambda}(\mathbf{k}) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{um operador que aniquila um fóton} \\ \text{com polarização } \lambda, \text{ momento } \hbar\mathbf{k}, \\ \text{e energia } \hbar\omega_k = \hbar ck. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Com a hipótese de que os fótons não interagem, a Hamiltoniana é aditiva de uma partícula, que conforme vimos, pode ser escrita por:

$$\mathcal{H} = \sum_{\mathbf{k}\lambda} \hbar\omega_k a_{\lambda}^{\dagger}(\mathbf{k}) a_{\lambda}(\mathbf{k})$$

Fótons são bósons ou férmions? Qual é o spin do fóton?

Um tratamento relativístico mostraria que fótons têm spin 1. Balançando um pouco as mãos é possível mostrar, sem a relatividade, que isso está correto. Na disciplina FI001, capítulo 3 de nosso livro texto, vimos que o operador que roda em φ ao redor do eixo z é o $e^{-iJ_z\varphi/\hbar}$. Os autovalores, $m\hbar$, de J_z , aparecem explicitamente se rodarmos autoestados deste operador, pois

$$e^{-iJ_z\varphi/\hbar}|j, m\rangle = e^{-im\varphi}|j, m\rangle.$$

Lembre que isso deu origem ao -1 quando rodamos estados de spin $\frac{1}{2}$ de 2π . Com isso em mente, o que acontece quando rodamos um fóton, circularmente polarizado, sob o eixo \mathbf{k} de sua propagação? As direções de polarização são definidas pelos vetores unidades, $\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}\pm}$, conforme vimos no slide 3. Para rodá-los,

note que

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}}^{(1)} \rightarrow \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}}^{(1)'} = \cos \varphi \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}}^{(1)} - \sin \varphi \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}}^{(2)} \\ \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}}^{(2)} \rightarrow \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}}^{(2)'} = \sin \varphi \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}}^{(1)} + \cos \varphi \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}}^{(2)} \end{cases}$$

Assim: $\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}\pm} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}}^{(1)} \pm i\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}}^{(2)}) \rightarrow \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}\pm}' = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} ((\cos \varphi \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}}^{(1)} - \sin \varphi \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}}^{(2)}) + \pm i(\sin \varphi \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}}^{(1)} + \cos \varphi \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}}^{(2)})) = e^{\pm i\varphi} \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}\pm} \Rightarrow m = \pm 1$

Esperamos que o estado que representa um fóton rode conforme roda sua polaridade. Isso sugere que os fótons têm spin 1!

Quantização do campo eletromagnético: A Hamiltoniana

A Hamiltoniana do sistema de fótons, bósons idênticos, pode ser re-escrita por:

$$\mathcal{H} = \sum_{\mathbf{k}\lambda} \hbar\omega_k a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) a_\lambda(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{k}\lambda} \frac{1}{2} \hbar\omega_k [a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) a_\lambda(\mathbf{k}) + a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) a_\lambda(\mathbf{k})]$$

Podemos deixar esta expressão parecida com o resultado clássico, se usarmos a regra de comutação dos operadores de criação e aniquilação de bósons no segundo termo. Isto é:

$$\mathcal{H} = \sum_{\mathbf{k}\lambda} \frac{1}{2} \hbar\omega_k [a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) a_\lambda(\mathbf{k}) + a_\lambda(\mathbf{k}) a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) + 1]$$

Note que com a definição $A_{\mathbf{k}\lambda} = (4\pi\hbar c^2)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{V}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} a_\lambda(\mathbf{k})$, os dois primeiros

termos fornecem a expressão clássica. *A novidade está no último termo!*

As energias de um campo de fótons são medidas relativas à um ponto zero, dado por

$$E_0 = \sum_{\mathbf{k}\lambda} \frac{1}{2} \hbar\omega_k = \sum_{\mathbf{k}} \hbar\omega_k$$

Esta é a energia no campo eletromagnético, quando existem zero fótons presentes. Ela é chamada de energia do vácuo. É um número infinito, porém constante. Uma manifestação macroscópica é o efeito Casimir, força atrativa entre superfícies metálicas → leitura para casa.

Quantização do campo eletromagnético

Neste curso demos apenas uma olhada rápida e superficial na quantização do campo eletromagnético. Com a definição de criadores $a_{\lambda}^{\dagger}(\mathbf{k})$ e aniquiladores de fótons $a_{\lambda}(\mathbf{k})$, abre-se um universo de aplicações, por meio da relação

$$A_{\mathbf{k}\lambda} = (4\pi\hbar c^2)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{V}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} a_{\lambda}(\mathbf{k})$$

Vimos no semestre passado, em FI001, como podemos incorporar o campo eletromagnético na Hamiltoniana. Bastava adicionar o potencial vetor ao operador momento linear, $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}$, onde termos, do tipo $\mathbf{p} \cdot \mathbf{A}$, podem ser tratados como perturbação. Usando a versão quantizada de \mathbf{A} , teremos uma Hamiltoniana que pode criar e destruir fótons. Podendo, por exemplo, ter fótons absorvidos por átomos, ou átomos, em estados excitados, decaírem espontaneamente, emitindo um fóton.