Transformação de Lorentz e Relatividade Restrita

É preciso considerar que vocês já estudaram a relatividade restrita de Einstein,

que nasce com as transformações de Lorentz
$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = \frac{z - vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ t' = \frac{t - \frac{vz}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases} \quad \Rightarrow \beta = \frac{v}{c}$$

A propriedade mais interessante destas transformações é que a luz tem a mesma velocidade nos dois referenciais. Isso pode ser constatado, observando que, nos

dois referenciais, a frente de uma onda respeita
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \\ x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2 \end{cases}$$

ou ainda, a equação de onda deduzida na aula 22
$$\begin{cases} \boldsymbol{\nabla}^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0 \\ \boldsymbol{\nabla}'^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t'^2} = 0 \end{cases}$$

De fato as equações de Maxwell são invariantes mediante transformação de Lorentz. A equação da continuidade $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ também.

Mecânica Quântica Relativística

Comentários iniciais

- A equação de Schrödinger não é invariante mediante transformação de Lorentz (derivada segunda na posição e derivada primeira no tempo).
- Precisamos de uma nova equação que no limite não-relativistico, nos devolva a equação de Schrödinger usual $\rightarrow$ *afinal de contas ela funciona nesse limite.*
- Uma das premissas da mecânica quântica que estudamos ao longo de nosso curso é que a probabilidade de encontrar a partícula se conserva. Einstein nos ensinou que $E = mc^2$, ou seja, pode ocorrer que um elétron encontre um pósitron e ter ambos aniquilados, dando origem à dois ou três fótons e vice versa. Para conciliar isso, precisaríamos desenvolver uma teoria de muitos corpos de campos, invariante mediante transformação de Lorentz.
- Neste capítulo desenvolveremos uma teoria quântica de um corpo só, que funciona para energias relativamente baixas e define a linguagem apropriada para uma teoria de campos relativística.
- Começaremos com a partícula livre que nos levará a conhecida equação de Klein-Gordon (introduziremos unidades apropriadas e notação relativistica-mente covariante). Em seguida falaremos sobre a equação de Dirac, suas simetrias e resolveremos o átomo com um único elétron.

Mecânica Quântica Relativística

Um bom começo deste assunto é lembrar que o operador que causava a evolução temporal do estado de um sistema é a Hamiltoniana. Isso nos levou à:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle = H|\Psi(t)\rangle$$

Vimos também que os autovalores deste operador representam as energias permitidas do sistema.

Antes, porém, vamos discutir as chamadas **unidades naturais** da mecânica quântica relativistica.

Começamos definindo $\begin{cases} \hbar = 1 \\ \\ c = 1 \end{cases}$ $\Rightarrow$ com isso, medimos tempo em unidades de comprimento, pois tempo é igual à *distância*/c. Se precisarmos medir o tempo em segundos, basta dividir a distância por 3×10^{10}cm/s. Velocidade vira uma quantidade adimensional, que simplesmente chamaremos de β.

Isso permite medir $\begin{cases} \text{momento linear } p \ (E = pc) \\ \quad \text{e} \\ \text{massa } m \ (E = mc^2) \end{cases}$ $\Rightarrow$ em unidades de energia.

De fato deveria ser: massa em MeV/c^2 *e* p *em* MeV/c.

Mecânica Quântica Relativística

A massa de repouso de um elétron é $0,511\text{MeV}/c^2$ (muitos omitem o c^2). Isso dá, $0,511 \times 10^6 (1,6 \times 10^{-19}\text{kg m}^2/\text{s}^2)/(3 \times 10^8 m/s)^2 = 9,1 \times 10^{-31}\text{kg}$. Quando fazemos o $\hbar = 1$, temos uma ligação direta entre comprimento e energia, pois $p = \hbar k = k$ (inverso de comprimento). Assim, podemos medir posição em MeV^{-1}. Se estivéssemos estudando mecânica estatística, poderíamos fazer a constante de Boltzmann igual à 1 e medir temperatura em MeV também. Saiba onde tem c e $\hbar$ que a conversão de volta para as unidades anteriores fica simples. $\hbar c = 200\text{MeV.fm}$ pode ser útil para estas conversões.

A energia de uma partícula livre relativística

Uma partícula com momento $p = |\mathbf{p}|$ e massa m, tem a energia

$$E_p = \sqrt{c^2p^2 + m^2c^4} = \sqrt{p^2 + m^2} \text{ (em unidades naturais)}$$

Começaremos construindo uma Hamiltoniana que forneça esta energia como autoenergia de um autoestado $|\mathbf{p}\rangle$ que também tem autovalor de momento $\mathbf{p}$. A raiz quadrada atrapalha bastante. Talvez devêssemos expandi-la em série de Taylor e ver o que aprendemos com isso. Isso dá:

$$H = \sqrt{p^2 + m^2} = m\left[1 + \frac{p^2}{m^2}\right]^{1/2} = m + \frac{p^2}{2m} - \frac{p^4}{8m^3} + \frac{p^6}{16m^5} + \ldots$$

Mecânica Quântica Relativística

A expansão em p, torna impossível garantir a invariança da equação mediante transformação de Lorentz, pois a ordem n em p^n, estabelece a ordem da derivada com respeito a posição e o tempo continua em primeira ordem. Lembre é importante que tempo e posição sejam tratados da mesma forma. Para explorar melhor esse assunto, considere a equação de Schrödinger na representação das coordenadas

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\langle\mathbf{x}|\Psi(t)\rangle = \langle\mathbf{x}|H|\Psi(t)\rangle$$

e use a representação dos momentos, para obter:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\langle\mathbf{x}|\Psi(t)\rangle = \int d^3p\langle\mathbf{x}|\mathbf{p}\rangle\langle\mathbf{p}|H|\Psi(t)\rangle = \int d^3p\langle\mathbf{x}|\mathbf{p}\rangle\langle\mathbf{p}|m + \frac{p^2}{2m} - \frac{p^4}{8m^3} +$$

$$+\frac{p^6}{16m^5} + ...|\Psi(t)\rangle = \int d^3x' \int d^3p\langle\mathbf{x}|\mathbf{p}\rangle\langle\mathbf{p}|\mathbf{x}'\rangle\langle\mathbf{x}'|m + \frac{p^2}{2m} - \frac{p^4}{8m^3} + \frac{p^6}{16m^5} +$$

$$...|\Psi(t)\rangle = \int d^3x' \int d^3p\frac{e^{i\mathbf{p}.(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}}{(2\pi)^3}\langle\mathbf{x}'|m + \frac{p^2}{2m} - \frac{p^4}{8m^3} + \frac{p^6}{16m^5} + ...|\Psi(t)\rangle$$

Para obter a derivada com respeito ao tempo em $\mathbf{x}$, precisamos calcular derivadas de ordem infinita em $\mathbf{x}'$. O cálculo destas derivadas exige o conhecimento de $\langle\mathbf{x}'|\Psi(t)\rangle$ cada vez mais longe de $\mathbf{x}$. Se superiores a $c\Delta t$, quebra casualidade. $\Rightarrow$ *Abandonamos H com raiz quadrada.*

Mecânica Quântica Relativística: a equação de Klein-Gordon

Para se livrar da raiz quadrada, derive a equação de Schrödinger dos dois lados com respeito ao tempo:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(H|\Psi(t)\rangle\right)=H\left(\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle\right)=H\frac{1}{i\hbar}H|\Psi(t)\rangle$$

que em unidades naturais fica $-\frac{\partial^2}{\partial t^2}|\Psi(t)\rangle=H^2|\Psi(t)\rangle$. Na representação das coordenadas, temos: $-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\langle\mathbf{x}|\Psi(t)\rangle=\langle\mathbf{x}|H^2|\Psi(t)\rangle=\langle\mathbf{x}|\mathbf{p}^2+m^2|\Psi(t)\rangle$, dando origem à $\boxed{\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\boldsymbol{\nabla}^2+m^2\right]\Psi(\mathbf{x},t)=0\Rightarrow\text{Equação de Klein-Gordon.}}$

Esta equação tem boa parte das propriedades procuradas. A principal é que ela é covariante (invariante mediante transformação de Lorentz). Para perceber isso, lembre que o intervalo espaço-tempo, $ds^2=dt^2-d\mathbf{x}^2$ é covariante e $\therefore\ \frac{\partial^2}{\partial t^2}-\boldsymbol{\nabla}^2$ também é. Isso implica que se $\Psi(\mathbf{x},t)$ é solução, $\Psi(\mathbf{x},'t')$, com respeito à outro referencial, respeita o mesmo formato de equação.

As leis da física são as mesmas em todos os referenciais inerciais

Quando colocamos de volta os $\hbar$ e $c's$, é interessante definir uma escala de comprimento, $\hbar/mc$ (comprimento de onda de Compton).

Covariança Relativística

Ver *Classical Electrodynamics* by J. D. Jackson, 2nd edition, seções 11.6 (p.532) e 11.9 (p.547).

Covariança relativística fica mais fácil de perceber, se usarmos uma notação apropriada para o assunto. Notação: $\begin{cases} \text{índices gregos correm em } 0, 1, 2 \text{ e } 3 \\ \text{índices latinos correm em } 1, 2 \text{ e } 3 \end{cases}$

Se um índice é repetido em um expressão, isso implica que existe uma soma sobre ele, isto é $a_\mu = \eta_{\mu\nu} a^\nu \equiv \sum_\nu \eta_{\mu\nu} a^\nu$. Um quadrivetor contravariante, $a'^\alpha = \dfrac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} a^\beta$

$a^\mu \equiv (a^0, \mathbf{a})$ tem um vetor dual covariante $a_\mu = \eta_{\mu\nu} a^\nu$, $a'_\alpha = \dfrac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\beta} a_\beta$ Tensor métrico

onde $\begin{cases} \eta_{00} = 1 \\ \eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = -1 \\ \eta_{\mu\nu} = 0 \text{ para } \mu \neq \nu \end{cases}$ ou seja $a_\mu = (a^0, -\mathbf{a})$.

Produtos internos entre quadrivetores podem ser tomados somente entre um vetor contravariante e um covariante. Por exemplo: $\begin{cases} a^\mu b_\mu = a^0 b^0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \\ a^\mu a_\mu = (a^0)^2 - \mathbf{a}^2 \end{cases}$

Um aspecto fundamental da transformação de Lorentz é que produtos internos de quadrivetores são invariantes. Isto é,

$a^\mu b_\mu$ *terão o mesmo valor em qualquer referencial!*

Mecânica Quântica Relativística: a equação de Klein-Gordon

O quadrivetor posição espaço-tempo é $x^\mu = (t, \mathbf{x})$. Ele dá origem ao quadrivetor gradiente $\dfrac{\partial}{\partial x^\mu} = (\dfrac{\partial}{\partial t}, \boldsymbol{\nabla}) \equiv \partial_\mu \Rightarrow$ um operador vetorial covariante que permite escrever a equação de Klein-Gordon por $\left[\partial_\mu \partial^\mu + m^2\right] \Psi(\mathbf{x}, t) = 0$.

O que esperamos como solução da equação de Klein-Gordon para uma partícula livre de massa m? Que tal:

- Dependência temporal igual à e^{-iEt}
- E deve ser um autovalor de H
- Parte espacial $\rightarrow$ uma onda plana $e^{+i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}$

$\Rightarrow$ isto é, a solução esperada é $\Psi(\mathbf{x}, t) = N e^{-i(Et - \mathbf{p}\cdot\mathbf{x})} = N e^{-ip^\mu x_\mu}$ com $p^\mu = (E, \mathbf{p})$.

Substituição direta na equação de Klein-Gordon, mostra que de fato esta é uma solução, se $-p^\mu p_\mu + m^2 = -E^2 + \mathbf{p}^2 + m^2 = 0 \Rightarrow -E^2 + E_p^2 = 0 \Rightarrow E = \pm E_p$

A energia positiva apareceu como esperada. A surpresa está na solução negativa, $E = -E_p$. Esse resultado atrapalhou o início da mecânica quântica relativística, até ser compreendido. Trataremos isso na próxima aula. Antes, discutiremos o conceito muito explorado na mecânica quântica de Schrödinger: a densidade de probabilidade de encontrar a partícula e sua relação com a densidade de corrente.

$$\rho(\mathbf{x}, t) \equiv \psi^* \psi \begin{cases} \rho(\mathbf{x}, t) \text{ é sempre positiva e satisfaz a equação de continuidade:} \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{j} = 0 \Rightarrow \text{ com } \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = \dfrac{\hbar}{m} \mathrm{Im}(\psi^* \boldsymbol{\nabla} \psi) \end{cases}$$

Mecânica Quântica Relativística: a equação de Klein-Gordon

Na Mecânica quântica não relativística a densidade de probabilidade em um ponto muda segundo variações da densidade de corrente (fluxo que entra ou sai da região onde se encontra o ponto). Gostaríamos de construir uma expressão análoga à equação da continuidade não-relativística, usando a equação de Klein-Gordon para podermos gerar uma interpretação semelhante para a $\Psi(\mathbf{x},t)$ relativísitica.

A analogia é feita fazendo $j^\mu = (j^0, \mathbf{j}),$ com $j^0 \equiv \rho$ e $\partial_\mu j^\mu = 0$. De fato, se definirmos $j^\mu = \dfrac{i}{2m}\left[\Psi^* \partial^\mu \Psi - (\partial^\mu \Psi)^* \Psi\right]$ podemos escrever:

$$\partial_\mu j^\mu = \frac{i}{2m}\Big[\Psi^* \partial_\mu \partial^\mu \Psi - (\partial_\mu \partial^\mu \Psi)^* \Psi + \underbrace{(\partial_\mu \Psi)^* \partial^\mu \Psi - (\partial^\mu \Psi)^* \partial_\mu \Psi}_{\text{0, pois } a^\mu b_\nu = a_\mu b^\nu \text{ (problema 8.2)}}\Big] =$$

$$= \frac{i}{2m}\left[\Psi^*(-m)^2\Psi - \Psi^*(-m)^2\Psi\right] = 0$$

Com isso, a densidade fica definida por

$$j^0(\mathbf{r},t) = \rho(\mathbf{r},t) = \frac{i}{2m}\left[\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right)^* \Psi\right] \Rightarrow \begin{cases} \text{Embora esta densidade seja} \\ \text{conservada } (\mathbf{j} \text{ cuida disso), ela} \\ \text{pode ser positiva ou negativa.} \end{cases}$$

$j^0(\mathbf{r},t) = \rho(\mathbf{r},t) < 0$ é a grande novidade. Antes de apresentarmos uma interpretação, discutiremos o efeito de interações eletromagnéticas.

A equação de Klein-Gordon com interações eletromagnéticas

Com a notação desenvolvida, é relativamente fácil introduzir campos eletromagnéticos na equação de Klein-Gordon. Como no início do curso, consideraremos que a partícula tem um carga negativa $e < 0$. Lembre que na Hamiltoniana clássica bastava fazer as substituições: $\begin{cases} E \to E - e\Phi \\ \mathbf{p} \to \mathbf{p} - e\mathbf{A} \end{cases}$ onde Φ é um potencial escalar e $\mathbf{A}$ é um potencial vetor. Na forma covariante, isto fica $p^\mu \to p^\mu - eA^\mu$ com $A^\mu = (\Phi, \mathbf{A})$ e $A_\mu = (\Phi, -\mathbf{A})$. Isso permite escrever a equação de Klein-Gordon da seguinte forma: $\left[D_\mu D^\mu + m^2\right]\Psi(\mathbf{x}, t) = 0$ com $\boxed{D_\mu \equiv \partial_\mu + ieA_\mu}$ (derivativa covariante).

A origem de D_μ é melhor explicada se lembrarmos que na representação das coordenadas $p_\mu = (E, -\mathbf{p}) \to i\partial_\mu = (i\partial_t, i\boldsymbol{\nabla})$. Para incorporar o eletromagnetismo, trocamos $i\partial_\mu \to i\partial_\mu - eA_\mu = i(\partial_\mu + ieA_\mu) \equiv iD_\mu$.

Diferentemente da equação de Schrödinger, uma equação cuja derivada no tempo é em primeira ordem, a equação de Klein-Gordon contém uma derivada segunda no tempo. Isso implica que para resolvê-la, além de especificar $\Psi(\mathbf{x}, t)|_{t_0}$, precisamos também de $\dfrac{\partial \Psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t}|_{t=0}$. *Será que na mecânica quântica relativística precisamos saber mais sobre o sistema em um dado instante para prever seu futuro?* $\Rightarrow E = \pm E_p$?

A equação de Klein-Gordon com interações eletromagnéticas

Para entender o que está acontecendo, primeiro note que se $\Psi(\mathbf{x},t)$ é solução da equação de Klein-Gordon,$\Psi^*(\mathbf{x},t)$ não é, a menos que troquemos $e \to -e$.

$$\text{Isto é}\begin{cases} \left[D_\mu D^\mu + m^2\right]\Psi(\mathbf{x},t) = 0 \to \left[(\partial_\mu + ieA_\mu)(\partial^\mu + ieA^\mu) + m^2\right]\Psi(\mathbf{x},t) = 0 \\ \left[D_\mu D^\mu + m^2\right]^*\Psi^*(\mathbf{x},t) = 0 \to \left[(\partial_\mu - ieA_\mu)(\partial^\mu - ieA^\mu) + m^2\right]\Psi^*(\mathbf{x},t) = 0 \\ e \to -e \Rightarrow \left[(\partial_\mu + ieA_\mu)(\partial^\mu + ieA^\mu) + m^2\right]\Psi^*(\mathbf{x},t) = 0 \end{cases}$$

Como interpretar este resultado com a troca no sinal da carga? A equação parece conter informações sobre ambas as cargas possíveis. Veremos, logo mais, que isso está relacionado à energia negativa e com o conceito de antimatéria.

A proposta começa com a definição de duas funções, $\phi(\mathbf{r},t), \chi(\mathbf{r},t)$ tais que

$$\Rightarrow \begin{cases} \Psi(\mathbf{r},t) = \phi(\mathbf{r},t) + \chi(\mathbf{r},t) \\ \frac{i}{m} D_t \Psi(\mathbf{r},t) = \phi(\mathbf{r},t) - \chi(\mathbf{r},t) \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} \phi(\mathbf{r},t) = \frac{1}{2}\left[\Psi(\mathbf{r},t) + \frac{i}{m} D_t \Psi(\mathbf{r},t)\right] \\ \chi(\mathbf{r},t) = \frac{1}{2}\left[\Psi(\mathbf{r},t) - \frac{i}{m} D_t \Psi(\mathbf{r},t)\right] \end{cases}$$

Note que isso permite trocar a necessidade de conhecer $\Psi(\mathbf{r},t)$ e $D_t\Psi(\mathbf{r},t)$ num dado instante, pelo conhecimento de $\phi(\mathbf{r},t)$ e $\chi(\mathbf{r},t)$ neste instante, (precisamos achar duas equações em primeira ordem para estas funções). Do problema 8.5

$$(1)\ iD_t\phi = -\frac{1}{2m}\mathbf{D}^2(\phi+\chi) + m\phi \quad (2)\ iD_t\chi = +\frac{1}{2m}\mathbf{D}^2(\phi+\chi) - m\chi$$

A equação de Klein-Gordon com interações eletromagnéticas

Subtraindo (2) de (1), temos:

$$iD_t\phi - iD_t\chi = -\frac{1}{2m}\mathbf{D}^2(\phi+\chi) + m\phi - \frac{1}{2m}\mathbf{D}^2(\phi+\chi) + m\chi$$

$$iD_t(\phi-\chi) = -\frac{1}{m}\mathbf{D}^2(\phi+\chi) + m(\phi+\chi) \text{ mas } \begin{cases} \Psi(\mathbf{r},t) = \phi(\mathbf{r},t) + \chi(\mathbf{r},t) \\ \frac{i}{m}D_t\Psi(\mathbf{r},t) = \phi(\mathbf{r},t) - \chi(\mathbf{r},t) \end{cases}$$

$$\therefore\ iD_t(\frac{i}{m}D_t\Psi(\mathbf{r},t)) = -\frac{1}{m}\mathbf{D}^2\Psi + m\Psi \rightarrow -D_t^2\Psi = -\mathbf{D}^2\Psi + m^2\Psi$$

Para finalmente obtermos $(D_t^2 - \mathbf{D}^2 + m^2)\Psi = 0 \Rightarrow (D_\mu D^\mu + m^2)\Psi = 0$

Mostre que com auxílio das matrizes de Pauli e com a definição de um vetor função coluna $\Upsilon \equiv \begin{pmatrix} \phi(\mathbf{r},t) \\ \chi(\mathbf{r},t) \end{pmatrix}$ a equação de Klein-Gordon pode ser escrita por

$$\boxed{iD_t\Upsilon = \left[-\frac{1}{2m}\mathbf{D}^2(\tau_3 + i\tau_2) + m\tau_3\right]\Upsilon}$$

onde $\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, e $\tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

A equação de Klein-Gordon com interações eletromagnéticas

Na presença de campos eletromagnéticos a forma relativística da corrente é obtida fazendo a troca $\partial_\mu \to D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$ em $j^\mu = \frac{i}{2m}\left[\Psi^* \partial^\mu \Psi - (\partial^\mu \Psi)^* \Psi\right]$.

Isso fornece: $\quad j^\mu = \frac{i}{2m}\left[\Psi^* D^\mu \Psi - (D^\mu \Psi)^* \Psi\right]$

A "densidade de probabilidade", $\rho = j^0$ fica:

$$\rho = j^0 = \frac{i}{2m}\left[\Psi^* D^0 \Psi - (D^0 \Psi)^* \Psi\right] = \frac{i}{2m}\left[\Psi^* D_t \Psi - (D_t \Psi)^* \Psi\right] =$$

$$= \frac{i}{2m}\left[(\phi+\chi)^* \frac{m}{i}(\phi-\chi) - \left(\frac{m}{i}(\phi-\chi)\right)^*(\phi+\chi)\right] =$$

$$= \frac{i}{2m}\left[(\phi+\chi)^* \frac{m}{i}(\phi-\chi) + \frac{m}{i}(\phi-\chi)^*(\phi+\chi)\right] = \phi^*\phi - \chi^*\chi$$

Observe também que

$$\rho = j^0 = \Upsilon^\dagger \tau_3 \Upsilon = \begin{pmatrix} \phi^*(\mathbf{r},t) & \chi^*(\mathbf{r},t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi(\mathbf{r},t) \\ \chi(\mathbf{r},t) \end{pmatrix}$$

onde agora interpretamos que trata-se de uma densidade de carga, com $\phi^*\phi$ *representando a densidade da carga "e" e* $\chi^*\chi$ *a densidade da carga "* $-e$*".*