Densidade de corrente de probabilidade e seção de choque diferencial

Alan Guilherme Falkowski

Universidade Estadual de Campinas

November 4, 2020

- A condição assintótica para o espalhamento de uma partícula de massa m por um potencial V é dada por:

$$\tilde{\Psi}(\mathbf{r}) = \lim_{r\to\infty} \Psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left[e^{i\mathbf{k_i}\cdot\mathbf{r}} + f(\mathbf{k_f}, \mathbf{k_i}) \frac{e^{ik_f r}}{r} \right] \tag{1}$$

- Para o espalhamento elástico, de (1):

$$\tilde{\Psi}(\mathbf{r}) = \lim_{r\to\infty} \Psi(\mathbf{r}) = \overbrace{\frac{e^{ikz}}{(2\pi)^{3/2}}}^{\text{incidente}} + \overbrace{\frac{f(\theta,\phi)}{(2\pi)^{3/2}} \frac{e^{ikr}}{r}}^{\text{espalhada}} \tag{2}$$

com

$$k_i = k_f = k$$

e

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = kr\cos\theta = kz$$

- A densidade de corrente de probabilidade é dada por:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \frac{\hbar^2}{mi}\,\mathrm{Re}\Big\{\tilde{\Psi}^*(\mathbf{r})\boldsymbol{\nabla}\tilde{\Psi}(\mathbf{r})\Big\}$$

ou ainda

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \frac{\hbar^2}{2mi}\left[\tilde{\Psi}^*(\mathbf{r})\boldsymbol{\nabla}\tilde{\Psi}(\mathbf{r}) - \tilde{\Psi}(\mathbf{r})\boldsymbol{\nabla}\tilde{\Psi}^*(\mathbf{r})\right] \tag{3}$$

- $\mathbf{J}$ da onda incidente: Com o 1º termo da Eq. (2) na Eq. (3), temos

$$\mathbf{J}_{inc}(\mathbf{r}) = \frac{\hbar^2}{2mi(2\pi)^3}\left[e^{-ikz}\boldsymbol{\nabla}e^{ikz} - e^{ikz}\boldsymbol{\nabla}e^{-ikz}\right]$$

$$\mathbf{J}_{inc}(\mathbf{r}) = \frac{\hbar^2}{2mi(2\pi)^3}\left[e^{-ikz}\left(\hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\right)e^{ikz} - e^{ikz}\left(\hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\right)e^{-ikz}\right] = \boxed{\frac{\hbar k}{(2\pi)^3 m}\hat{z}} \tag{4}$$

- $\mathbf{J}$ da onda espalhada: Com o 2º termo da Eq. (2) na Eq. (3), temos

$$\mathbf{J}_{esp}(\mathbf{r}) = \frac{\hbar^2}{2mi(2\pi)^3}\left[f^*(\theta,\phi)\frac{e^{-ikr}}{r}\nabla f(\theta,\phi)\frac{e^{ikr}}{r} - f(\theta,\phi)\frac{e^{ikr}}{r}\nabla f^*(\theta,\phi)\frac{e^{-ikr}}{r}\right]$$

com ∇ em coord. esféricas dado por:

$$\nabla = \hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\theta}}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\hat{\phi}}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}$$

- $\mathbf{J}_{esp}$ pode ser separada em três termos, associados a (r,θ,ϕ). Para r:

$$J^r_{esp}(\mathbf{r}) = \frac{\hbar^2}{2mi(2\pi)^3}\left[f^*(\theta,\phi)\frac{e^{-ikr}}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)f(\theta,\phi)\frac{e^{ikr}}{r} + \right.$$
$$\left. - f(\theta,\phi)\frac{e^{ikr}}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)f^*(\theta,\phi)\frac{e^{-ikr}}{r}\right]$$

$$J^r_{esp}(\mathbf{r}) = \frac{\hbar}{(2\pi)^3 2mi}(2ik)\frac{|f(\theta,\phi)|^2}{r^2} = \boxed{\frac{\hbar k}{(2\pi)^3 m}\frac{|f(\theta,\phi)|^2}{r^2}} \qquad (5)$$

- Para θ:

$$J^{\theta}_{esp}(\mathbf{r}) = \frac{\hbar^2}{2mi(2\pi)^3}\left[f^*(\theta,\phi)\frac{e^{-ikr}}{r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)f(\theta,\phi)\frac{e^{ikr}}{r} + \right.$$
$$\left. -f(\theta,\phi)\frac{e^{ikr}}{r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)f^*(\theta,\phi)\frac{e^{-ikr}}{r}\right]$$

e, lembrando que $\mathrm{Re}\{a^*b\} = (a^*b + ab^*)/2$, temos

$$\boxed{J^{\theta}_{esp}(\mathbf{r}) = \frac{\hbar k}{(2\pi)^3 m}\frac{1}{r^3}\,\mathrm{Re}\left\{\frac{\hbar}{i}f^*(\theta,\phi)\frac{\partial}{\partial\theta}f(\theta,\phi)\right\}} \quad (6)$$

- Para ϕ, semelhantemente:

$$\boxed{J^{\phi}_{esp}(\mathbf{r}) = \frac{\hbar k}{(2\pi)^3 m}\frac{1}{r^3\sin\theta}\,\mathrm{Re}\left\{\frac{\hbar}{i}f^*(\theta,\phi)\frac{\partial}{\partial\phi}f(\theta,\phi)\right\}} \quad (7)$$

- Comparando as Eqs. (5), (6) e (7), para $r \to \infty$, $J^r_{esp} \gg J^{\theta}_{esp}$ e $J^r_{esp} \gg J^{\phi}_{esp}$, já que $J^r_{esp} \propto 1/r^2$ e $J^{\theta,\phi}_{esp} \propto 1/r^3$

- Então, para o limite de r muito grande, usaremos $J_{esp} \approx J^{r}_{esp}$:

$$\boxed{J_{esp}(\mathbf{r}) \approx \frac{\hbar k}{(2\pi)^3 m} \frac{|f(\theta,\phi)|^2}{r^2}} \tag{8}$$

- A seção de choque diferencial é dada por:

$$\frac{d\sigma(\theta,\phi)}{d\Omega} = \frac{\mathbf{F}_{esp} \cdot d\mathbf{S}}{F_{inc} d\Omega} = \frac{J_{esp} r^2 d\Omega}{J_{inc} d\Omega} \tag{9}$$

- Com as Eqs. (4) e (8) na Eq. (9), encontramos finalmente:

$$\boxed{\frac{d\sigma(\theta,\phi)}{d\Omega} = |f(\theta,\phi)|^2}$$

C. J. Joachain, Quantum collision theory, Netherlands: North-Holland (1975).