Funções especiais

MECÂNICA QUÂNTICA II

ALUNA: ANA ELISA D. BARIONI

PROFESSOR: MARCO AURÉLIO P. LIMA

Relação de ortogonalidade

Queremos provar que $$\int_{-1}^{+1} d(\cos\theta) P_{\ell'}(\cos\theta) P_\ell(\cos\theta) = \frac{2}{2\ell+1}\delta_{\ell\ell'}$$

Comecemos relembrando a definição do polinômio de Legendre

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\frac{dP_n(x)}{dx}\right] + n(n+1)P_n(x) = 0$$

Multiplicamos essa equação por $P_m(x)$ e subtraímos desta a equação satisfeita por $P_m(x)$ multiplicada por $P_n(x)$ e obtemos

$$P_m(x)\frac{d}{dx}[(1-x^2)P_n'(x)] - P_n(x)\frac{d}{dx}[(1-x^2)P_m'(x)] = [m(m+1) - n(n+1)]P_m(x)P_n(x)$$

Relação de ortogonalidade

Integramos os dois lados a fim de obtermos

$$[(1-x^2)P_m(x)P_n'(x)-(1-x^2)P_n(x)P_m'(x)|_{-1}^{1}=[m(m+1)-n(n+1)]\int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)\,dx$$

Como $P_n(x)\ e\ \ P_m'(x)$ são limitados em ± 1, o termo do lado esquerdo se anula nos extremos e então, se $\mathrm{n}\neq m$, temos que

$$\int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)\,dx=0$$

Agora precisamos calcular essa integral quando $\mathrm{n}=m$. Para isso, precisamos da função geratriz

$$g(x,t)=\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)\,t^n$$

Relação de ortogonalidade

Integramos $[g(x,t)]^2$

$$\int_{-1}^{1}[g(x,t)]^2\,dx = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} t^{m+n}\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n}\int_{-1}^{1}[P_n(x)]^2\,dx$$

Por outro lado, usando a primeira definição da função geratriz, obtemos

$$\int_{-1}^{1}[g(x,t)]^2\,dx = \int_{-1}^{1}\frac{1}{1-2xt+t^2}\,dx = -\frac{1}{2t}\ln|1-2xt+t^2|\ \Big|_{-1}^{1}$$

$$= \frac{1}{t}ln\frac{1+t}{1-t} = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n}}{2n+1}$$

Daí, obtemos enfim que

$$\int_{-1}^{1}[P_n(x)]^2\,dx = \frac{2}{2n+1}$$

Relação de ortogonalidade

Por fim, obtemos que $\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\,dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{mn}$

Agora, para obter a expressáo do slide, basta fazer $x = cos\theta$

$$\int_{-1}^{1} P_m(cos\theta)P_n(cos\theta)d(cos\theta) = \frac{2}{2n+1}\delta_{mn}$$

Funções de Hankel

Definimos as funções de Hankel de primeira e segunda espécie como a seguinte combinação das funções de Bessel de primeira e segunda espécie

$$h^{(1)} = j_\ell + i\eta_\ell$$

$$h^{(2)} = j_\ell - i\eta_\ell$$

Queremos provar a seguinte expressão do slide 5 da aula 15

$$A_l = \frac{1}{2}e^{i2\delta_l}h^{(1)} + \frac{1}{2}h^{(2)} = e^{i\delta_\ell}\left(\cos\delta_\ell \; j_\ell(kr) - \sin\delta_\ell \; \eta_\ell(kr)\right)$$

Funções de Hankel

$$A_l = \frac{1}{2} e^{i2\delta_l} h^{(1)} + \frac{1}{2} h^{(2)}$$

$$= \frac{1}{2} e^{i2\delta_l} (j_l + i\,\eta_l) + \frac{1}{2} (j_l - i\,\eta_l)$$

$$= \frac{1}{2} e^{i\delta_l} \left[e^{i\delta_l} (j_l + i\,\eta_l) + e^{-i\delta_l} (j_l - i\,\eta_l) \right]$$

$$= e^{i\delta_l} \left[\frac{1}{2} \left(e^{i\delta_l} + e^{-i\delta_l} \right) j_l + i \frac{1}{2} \left(e^{i\delta_l} - e^{-i\delta_l} \right) \eta_l \right]$$

$$= e^{i\delta_l} (j_l \cos \delta_l - \eta_l \sin \delta_l)$$

Limites assintóticos da função de Bessel

A função de Bessel esférica é definida como a solução da equação diferencial

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + \frac{2}{z}\frac{d}{dz} + \left(1 - \frac{l(l+1)}{z^2}\right)\right]f_l = 0$$

As soluções dessa EDO são chamadas funções de Bessel esféricas de primeira e de segunda espécie e podem escritas na representação de série como

$$j_l(z) = \frac{z^l}{(2l+1)!!}\left[1 - \frac{\frac{1}{2}z^2}{1!(2l+3)} + \frac{(\frac{1}{2}z^2)^2}{2!(2l+3)(2l+5)} - \cdots\right]$$

$$n_l(z) = -\frac{(2l-1)!!}{z^{l+1}}\left[1 - \frac{\frac{1}{2}z^2}{1!(1-2l)} + \frac{(\frac{1}{2}z^2)^2}{2!(1-2l)(3-2l)} - \cdots\right]$$

Limites assintóticos da função de Bessel

Logo, para $kr \ll 1$, temos

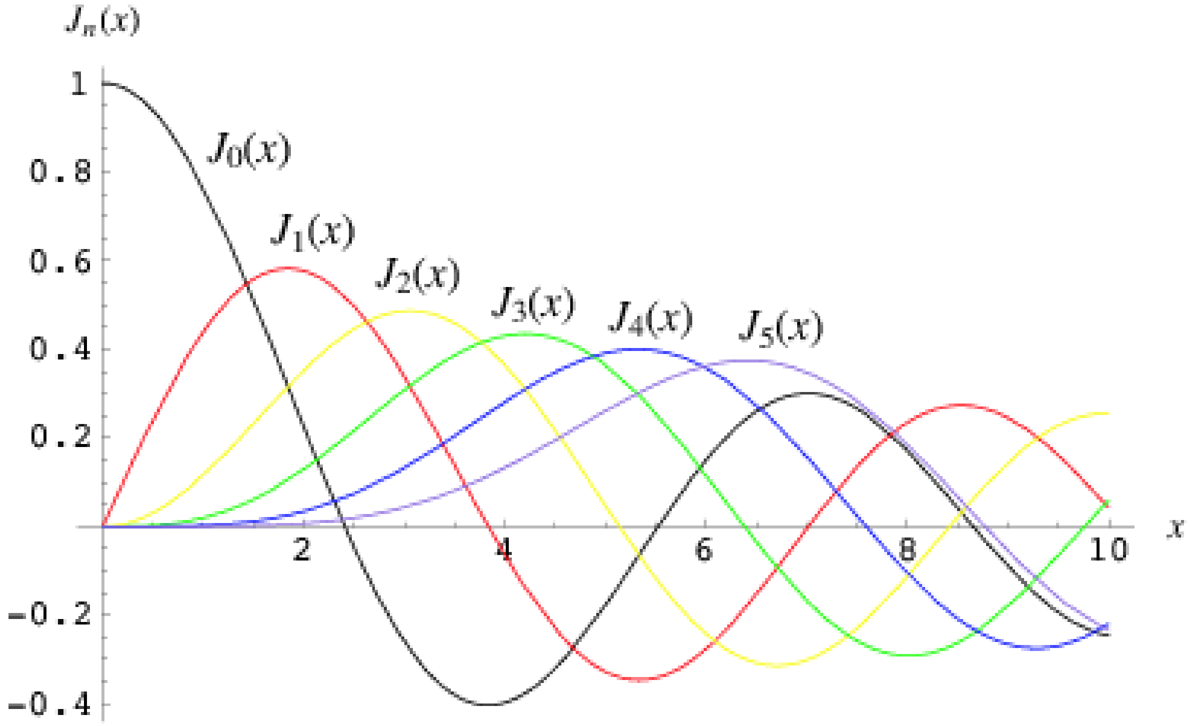
$$j_l(kr) \approx \frac{(kr)^l}{(2l+1)!!}$$

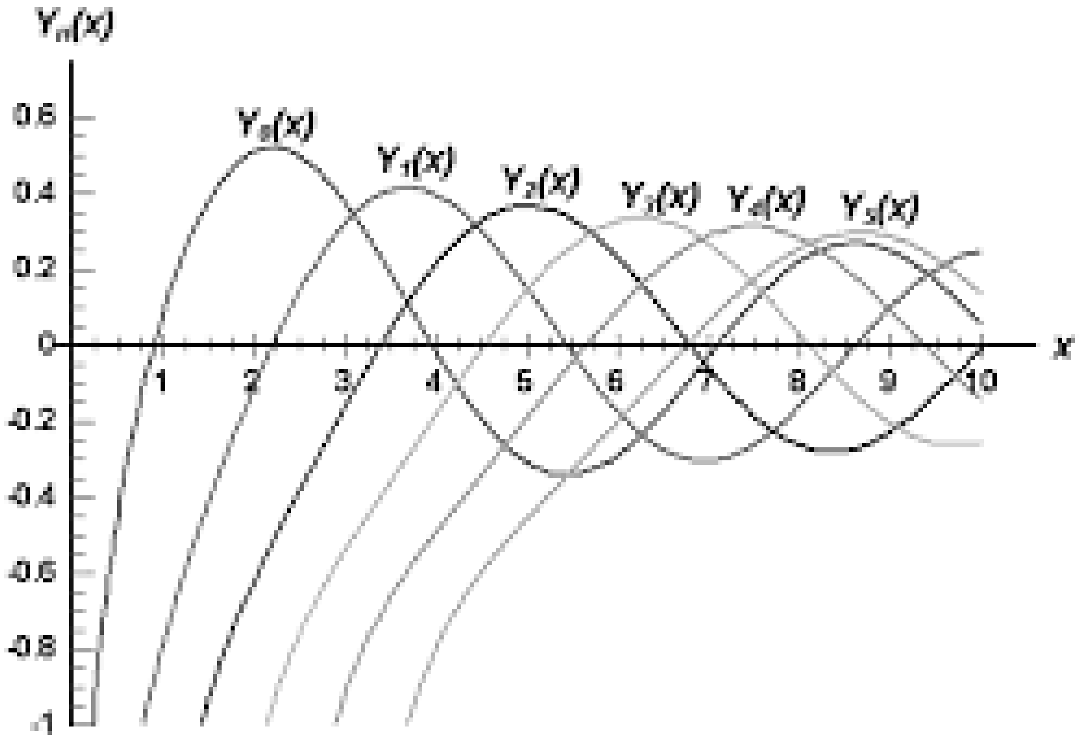
$$\eta_l(kr) \approx -\frac{(2l-1)!!}{(kr)^{l+1}}$$

Por outro lado, se $kr \gg l(l+1)$, assintoticamente, temos

$$j_l(kr) \approx \frac{\sin(kr - \frac{l\pi}{2})}{kr}$$

$$\eta_l(kr) \approx -\frac{cos(kr - \frac{l\pi}{2})}{kr}$$





Funções Bessel

Referências

Métodos Mathemáticos Volume 1 – Jayme Vaz

Apêndice C - C.J. Joachain - Quantum Collision