Fórmula de Rabi

João Paulo Picchetti

FI002 - IFGW - Universidade Estadual de Campinas

07/10/2020

O problema geral

Sob a ação de uma hamiltoniana da forma $H = H_0 + V(t)$, com $H_0|n\rangle = E_n|n\rangle$, a evolução temporal de um ket qualquer é dada da maneira usual, mas agora os c_n's dependem do tempo:

$$|\alpha\rangle = \sum_n c_n(t) e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t}|n\rangle$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}c_n(t) = \sum_m V_{nm}e^{i\omega_{nm}t}c_m(t), \quad \omega_{nm} \equiv \frac{E_n - E_m}{\hbar}$$

$$i\hbar\begin{pmatrix} \dot{c}_1 \\ \dot{c}_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12}e^{i\omega_{12}t} & \cdots \\ V_{21}e^{i\omega_{21}t} & V_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

A probabilidade de encontrar o sistema no estado $|n\rangle$ no instante t é dada por $|c_n(t)|^2$.

Sistema de dois níveis

Suponha que temos um sistema de dois níveis para o qual conhecemos a solução exata:

$$H_0|1\rangle = E_1|1\rangle, \quad H_0|2\rangle = E_2|2\rangle, \quad E_2 > E_1$$

e adicionamos um potencial dependente do tempo:

$$V(t) = \gamma e^{i\omega t}|1\rangle\langle 2| + \gamma e^{-i\omega t}|2\rangle\langle 1|$$

$$V(t) = \begin{pmatrix} 0 & \gamma e^{i\omega t} \\ \gamma e^{-i\omega t} & 0 \end{pmatrix}$$

Dado que o sistema se encontra no estado $|1\rangle$ em $t = 0$, qual a probabilidade de encontrarmos o sistema no estado $|2\rangle$ em algum momento $t > 0$ na presença do potencial $V(t)$?

Equações diferenciais para $c_1(t)$ e $c_2(t)$

A probabilidade de encontrar o sistema no estado $|2\rangle$ no instante t é dada por $|c_2(t)|^2$. Precisamos resolver:

$$i\hbar \begin{pmatrix} \dot{c}_1 \\ \dot{c}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma e^{i\omega t} e^{-i\omega_{21} t} \\ \gamma e^{-i\omega t} e^{i\omega_{21} t} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

com $\omega_{21} = (E_2 - E_1)/\hbar$ e com condições iniciais:

$$\begin{cases} c_1(0) = 1 \\ c_2(0) = 0 \end{cases}$$

e respeitando $|c_1(t)|^2 + |c_2(t)|^2 = 1$. De (1) obtemos:

$$i\hbar \dot{c}_1 = \gamma e^{i(\omega - \omega_{21})t} c_2$$

$$i\hbar \dot{c}_2 = \gamma e^{-i(\omega - \omega_{21})t} c_1$$

As equações estão acopladas:

$$i\hbar\dot{c}_1 = \gamma e^{i(\omega-\omega_{21})t} c_2 \tag{2}$$

$$i\hbar\dot{c}_2 = \gamma e^{-i(\omega-\omega_{21})t} c_1, \tag{3}$$

Para desacoplar a segunda equação, a derivamos em relação ao tempo:

$$i\hbar\ddot{c}_2 = \gamma \left(\dot{c}_1 - i\left(\omega - \omega_{21}\right) c_1\right) e^{-i(\omega-\omega_{21})t} \tag{4}$$

e usamos (2) e (3) em (4):

$$i\hbar\ddot{c}_2 = \gamma \left(-\frac{i}{\hbar}\gamma e^{i(\omega-\omega_{21})t} c_2 - i\left(\omega - \omega_{21}\right) \frac{i\hbar}{\gamma} e^{i(\omega-\omega_{21})t} \dot{c}_2\right) e^{-i(\omega-\omega_{21})t}$$

$$i\hbar\ddot{c}_2 = -i\frac{\gamma^2}{\hbar}c_2 + \hbar\left(\omega - \omega_{21}\right)\dot{c}_2$$

$$\ddot{c}_2 - i\left(\omega_{21} - \omega\right)\dot{c}_2 + \frac{\gamma^2}{\hbar^2}c_2 = 0 \tag{5}$$

Analogamente, para c_1 obtemos:

$$\ddot{c}_1 + i\left(\omega_{21} - \omega\right)\dot{c}_1 + \frac{\gamma^2}{\hbar^2}c_1 = 0$$

Substituindo uma tentativa de solução da forma $c_2(t) = e^{rt}$ em (5), chegamos à equação característica:

$$r^2e^{rt} - i(\omega_{21} - \omega)re^{rt} + \frac{\gamma^2}{\hbar^2}e^{rt} = 0$$

$$r^2 - i(\omega_{21} - \omega)r + \frac{\gamma^2}{\hbar^2} = 0$$

Solução da equação característica

$$r^2 - i(\omega_{21} - \omega)r + \frac{\gamma^2}{\hbar^2} = 0$$

$$r = \frac{i\left(\omega_{21} - \omega\right) \pm \sqrt{-\left(\omega_{21} - \omega\right)^2 - 4\gamma^2/\hbar^2}}{2}$$

$$r = i\frac{(\omega_{21} - \omega)}{2} \pm i\Omega, \quad \Omega = \sqrt{\gamma^2/\hbar^2 + \left(\omega_{21} - \omega\right)^2/4}$$

Logo:

$$c_2(t) = e^{i\frac{(\omega_{21} - \omega)t}{2}}(A\cos\Omega t + B\sin\Omega t)$$

A condição inicial $c_2(0) = 0$ implica que $A = 0$, e portanto:

$$c_2(t) = Be^{i\frac{(\omega_{21} - \omega)t}{2}}\sin\Omega t$$

De (3) sabemos que:

$$c_1 = i\frac{\hbar}{\gamma}e^{-i(\omega_{21}-\omega)t}\dot{c}_2.$$

Calculando a partir do slide anterior:

$$\dot{c}_2 = Be^{i\frac{(\omega_{21}-\omega)t}{2}}\left(i\frac{(\omega_{21}-\omega)}{2}\sin\Omega t + \Omega\cos\Omega t\right)$$

Substituindo:

$$c_1(t) = i\frac{\hbar}{\gamma}e^{-i(\omega_{21}-\omega)t}Be^{i\frac{(\omega_{21}-\omega)t}{2}}\left(i\frac{(\omega_{21}-\omega)}{2}\sin\Omega t + \Omega\cos\Omega t\right)$$

Agora usando a condição inicial $c_1(0) = 1$, encontramos:

$$1 = i\frac{\hbar}{\gamma}B\Omega \rightarrow B = -\frac{i\gamma}{\hbar\Omega}$$

Fórmula de Rabi

Finalmente:

$$c_2(t) = -\frac{i\gamma}{\hbar\Omega} e^{i\frac{(\omega_{21}-\omega)t}{2}} \sin \Omega t,$$

e portanto a probabilidade de encontrarmos o sistema no estado $|2\rangle$ no instante t é dada por:

$$|c_2(t)|^2 = \frac{\gamma^2}{\hbar^2\Omega^2} \sin^2 \Omega t$$

$$|c_2(t)|^2 = \frac{\gamma^2/\hbar^2}{\gamma^2/\hbar^2 + (\omega-\omega_{21})^2/4} \sin^2 \left(\sqrt{\frac{\gamma^2}{\hbar^2} + \frac{(\omega-\omega_{21})^2}{4}} t \right)$$

Referências

[1] Notas de Aula - Mecânica Quântica II - Profa. Marina Nielsen - IFUSP