

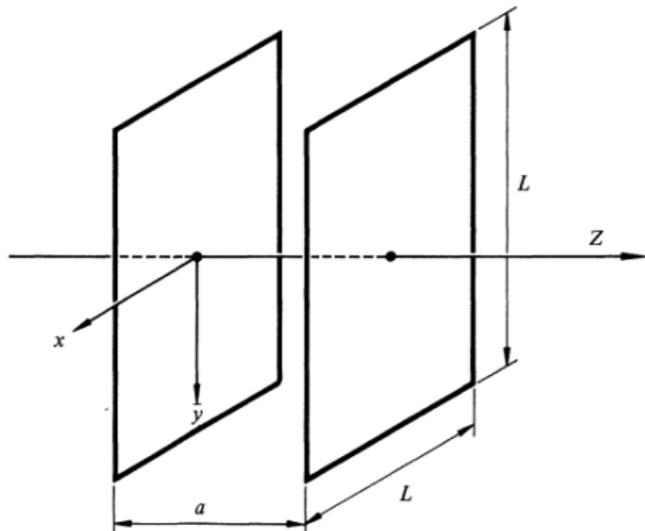
Efeito Casimir

Referências: Sakurai: sec 7.5; Itzykson, Zuber: sec 3-2-4 e Casimir: "On the attraction between two perfectly conducting plates"

- Energia do vácuo "zero-point energy":

$$E = \frac{1}{2} \sum_{\lambda \mathbf{k}} \hbar \omega_{\mathbf{k}} \sim \infty \quad (7.6.22)$$

- No vácuo, o campo eletromagnético não é nulo, mas flutua
- Entre duas placas metálicas essa flutuação exerce uma força atrativa



Começamos com um modelo simples unidimensional

$$H = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \omega_k \left(a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2} \right) \quad (1)$$

A energia do vácuo será:

$$E_0 = \langle 0 | H | 0 \rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\omega_k}{2} \mapsto \infty$$

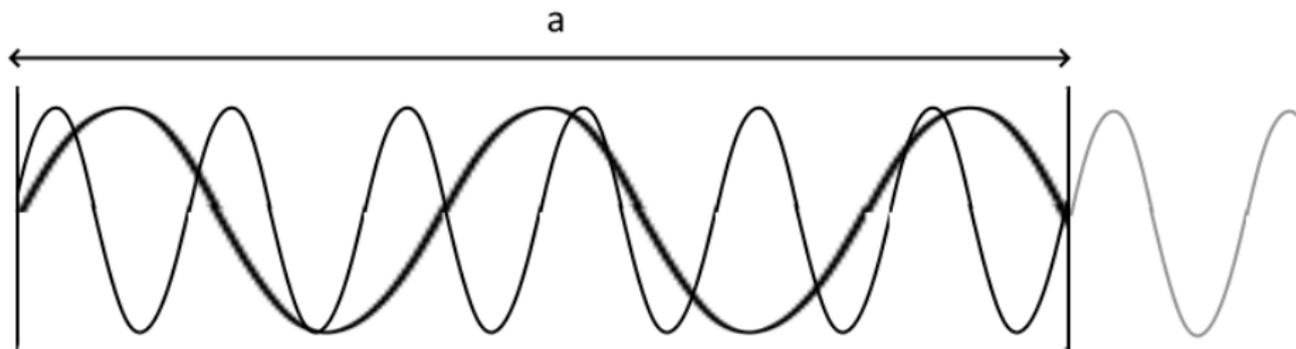
com $\omega_k = |k|$ para uma partícula sem massa.

- A energia do vácuo E_0 é infinita, mas não observável

Efeito Casimir

Num caso mais concreto, considere uma caixa unidimensional de lado "a"
Aqui, teremos $\omega_n = \frac{\pi}{a}n$ será discreta, e então E_0 será dada por:

$$E = \frac{1}{2} \sum_n \omega_n = \frac{1}{2} \sum_n \frac{\pi}{a} n \quad (2)$$



Consideramos a energia necessária para montar o sistema: a diferença de energia numa caixa de volume a , com e sem as placas $U = E - E_0$

A energia livre sem as placas é:

$$\frac{\pi}{2a} \int_{-\infty}^{\infty} k_z dk_z \quad (3)$$

Substituindo:

$$U = E - E_0 = \frac{\pi}{2a} \sum_{k=0}^{\infty} n - \frac{\pi}{2a} \int_{-\infty}^{\infty} k_z dk_z \mapsto \infty \quad (4)$$

Procedendo desta forma concluímos que a energia contida na caixa é infinita

Qual o problema com nossa abordagem?

- Fótons arbitrariamente energéticos parecem contribuir para F .

Repare que ω_k é discreto pois os fótons **interagem com a parede**.
Precisamos incluir um modelo de interação com a caixa.

Se o fóton for muito energético, ele pode atravessar a parede sem dificuldades \implies podemos limitar a soma!

Que modelo considerar? Partimos de considerações físicas:

- Modos de diferentes energias penetram distancias diferentes na parede (Heat Kernel)
- Impor um modo máximo n_{max} limitando a soma (Hard Cutoff)

Regularização Heat Kernel

Introduzimos um parâmetro Λ que descreve o *Damping* de modos energéticos. Podemos pensar em Λ como $\sim \frac{1}{\text{dist. atômicas}}$. Quando $\Lambda \mapsto \infty$ temos o caso original.

Propomos:

$$E = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n \exp \left\{ -\frac{\omega_n}{\pi \Lambda} \right\}$$

neste caso com $\omega_n = \frac{\pi}{a} n$

$$E(a) = \frac{\pi}{2a} \sum_{n=0}^{\infty} n \exp \{ -\epsilon n \} \qquad \epsilon = \frac{1}{a\Lambda} \ll 1$$

Regularização Heat Kernel

Calculamos a soma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n e^{-\epsilon n} = -\frac{d}{d\epsilon} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\epsilon n} = \frac{e^{-\epsilon}}{(1 - e^{-\epsilon})^2} \sim a^2 \Lambda^2 - \frac{1}{12} + O(\Lambda^{-2})$$

Para a energia livre, com $k_z = n \frac{\pi}{a}$:

$$E_0 = \frac{1}{2} \frac{a}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k_z dk_z \exp\left(-\frac{k_z}{\pi\Lambda}\right) = \frac{\pi}{2a} \int_0^{\infty} n \exp\left(-\frac{n}{a\Lambda}\right) dn = \frac{\pi}{2a} (a^2 \Lambda^2)$$

Definimos a força na parede como:

$$F(a) = -\frac{dU}{da} = -\frac{d}{da} \left\{ \frac{\pi}{2a} \left(a^2 \Lambda^2 - \frac{1}{12} + \dots \right) - \frac{\pi}{2a} (a^2 \Lambda^2) \right\}$$

O termo divergente *se anula*, e temos a força:

$$F(a) = -\frac{\pi \hbar c}{24 a^2}$$

Temos um resultado finito mesmo no limite $\Lambda \mapsto \infty$

Podemos impor o segundo modelo, em que a partir de certo ponto nenhum modo mais contribui. Chamamos $n_{max}(a) = \lfloor a\Lambda \rfloor$ e a energia fica:

$$E = \frac{\pi}{2a} \sum_{n=0}^{n_{max}} n = \frac{\pi}{2a} \frac{n_{max}(n_{max} + 1)}{2}$$

Tomando o cuidado apropriado com a função *floor*, temos:

$$F(a) = -\frac{d}{da} \left(-\frac{\pi}{24a} + \dots \right) \implies F(a) = -\frac{\pi \hbar c}{24a^2}$$

O mesmo resultado do outro modelo

Ver: Schwartz, M. Quantum field theory and the standard model, cap 15

Que tal outros modelos? Por exemplo:

$$E(R) = \frac{1}{2} \sum_n \omega_n e^{-(\omega_n/(\pi\Lambda))^2} \quad E(R) = \frac{1}{2} \sum_n \omega_n \left(\frac{\omega_n}{\mu} \right)^{-s}$$

Damping gaussiano e pela função zeta.

O segundo caso é particularmente simples usando:

$$\zeta(s-1) = -\frac{1}{12} - O(s)$$

tem-se diretamente :

$$E = \frac{\pi}{2a} \zeta(s-1) \mapsto -\frac{\pi}{24a} \quad (5)$$

Independência do regulador

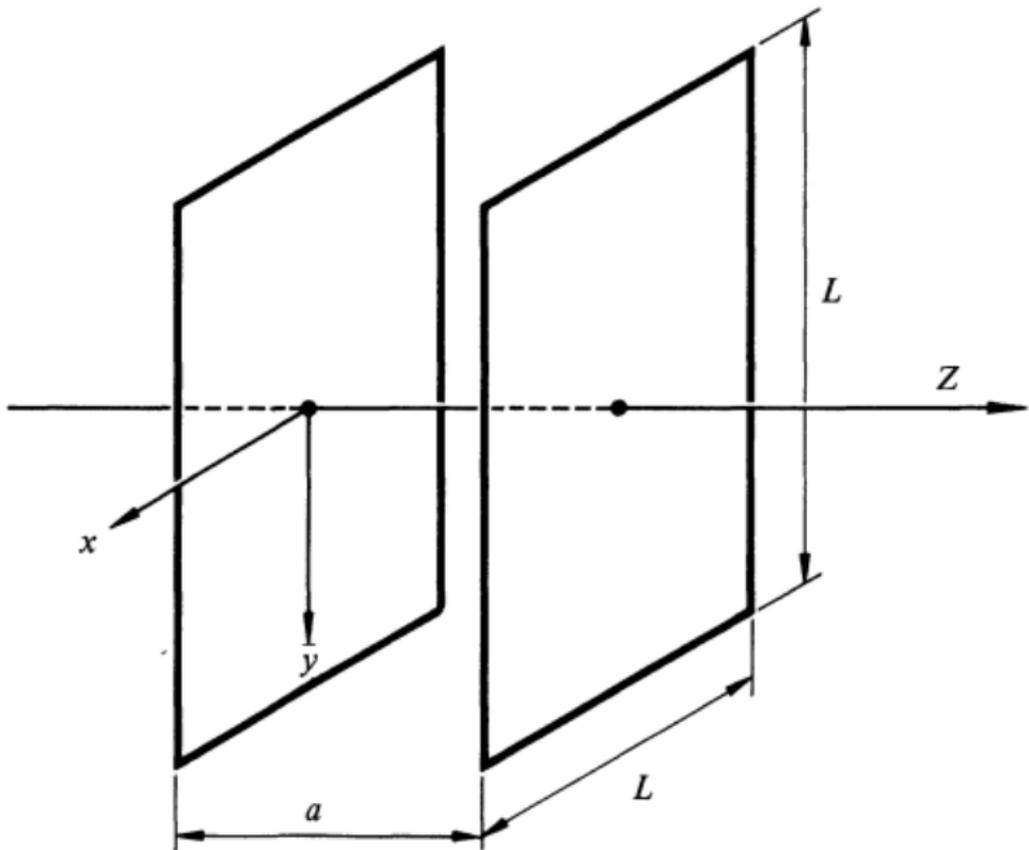
Casimir em 1948 mostrou que em geral, se definirmos:

$$E = \frac{\pi}{2a} \sum_n n f\left(\frac{n}{a\Lambda}\right)$$

Para um "regularizador" $f(x)$ satisfazendo:

$$f(0) = 1 \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} x \frac{d^j}{dx^j} f(x) = 0$$

a força será independente de f . O efeito Casimir é independente do método de regularização. Uma condição similar vale para o caso 3D, que estudamos em seguida.



$$E(a) = \sum_{k_x k_y n} \omega_k = \sum_{k_x k_y n} \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2} \quad (6)$$

Assumindo que o lado da placa L é muito maior que seu comprimento $L \gg a$, obtemos:

$$E = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 \int dk_x dk_y \sum_{n(0)} \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}$$

Para a energia livre, obtemos:

$$E_0 = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 \int dk_x dk_y \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{a}{2\pi}\right) dk_z \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$$

Finalmente em coordenadas $dk_x dk_y = 2\pi\rho d\rho$ e $k_z = n\frac{\pi}{a}$ temos:

$$U = \frac{L^2}{2\pi} \int \rho d\rho \sum_{n(0)} \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2} - \frac{L^2}{2\pi} \int \rho d\rho \int_0^\infty dn \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}$$

Introduzimos o regulador f

$$f\left(\frac{\omega_n}{\pi\Lambda}\right)$$

Nos dando

$$U = \frac{L^2}{2\pi} \int \rho d\rho \sum_{n(0)} \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2} f\left(\frac{1}{\pi\Lambda} \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}\right) - \frac{L^2}{2\pi} \int \rho d\rho \int_0^\infty dn \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2} f\left(\frac{1}{\pi\Lambda} \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}\right)$$

Troca de variáveis: $u = a^2 \rho^2 / \pi^2$

$$U = \frac{L^2}{4\pi} \left(\frac{\pi}{a}\right)^3 \int du \sum_{n(0)} \sqrt{u+n^2} f\left(\frac{1}{a\Lambda} \sqrt{u+n^2}\right) +$$
$$-\frac{L^2}{4\pi} \left(\frac{\pi}{a}\right)^3 \int du \int_0^\infty dn \sqrt{u+n^2} f\left(\frac{1}{a\Lambda} \sqrt{u+n^2}\right)$$

Definimos:

$$F(n) = \int_0^\infty du f\left(\frac{1}{a\Lambda} \sqrt{u+n^2}\right) \sqrt{u+n^2} = \int_{n^2}^\infty \sqrt{wf} \left(\frac{\sqrt{w}}{a\Lambda}\right)$$

Tal que:

$$U = \frac{L^2}{4\pi} \left(\frac{\pi}{a}\right)^3 \left\{ \sum_{n(0)} F(n) - \int_0^\infty F(n) dn \right\}$$

Finalmente aplicamos a fórmula de Euler-Maclaurin:

$$\sum_{n=1}^N F(n) - \int_0^N F(n)dn = \frac{1}{2} (F(0) + F(N)) + \frac{1}{12} (F'(N) - F'(0)) + \dots + \frac{B_j}{j!} (F^{j-1}(N) - F^{j-1}(0)) + \dots$$

Aplicamos para o $F(n)$ dado anteriormente, temos:

$$F'(n) = -2n^2 f\left(\frac{n}{a\Lambda}\right)$$

portanto pelas condições dadas:

$$\sum_{n=1(0)}^N F(n) - \int_0^N F(n)dn = -\frac{1}{12} F'(0) + \frac{1}{720} F'''(0) + \dots = \frac{4}{720}$$

De onde sai a força no limite $\Lambda \mapsto \infty$:

$$F = -\frac{d}{da} \left(-\frac{L^2 \pi^2}{720 a^3} \right) = -\frac{\pi^2 \hbar c}{240 a^4} L^2$$

Podemos resumir o cálculo unidimensional fazendo a substituição:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \iff -\frac{1}{12}$$