A equação de Klein-Gordon com interações eletromagnéticas

Mecânica Quântica II – Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Física Gleb Wataghin (IFGW)

Luiza Lober

A equação de Klein Gordon

Podemos começar a aplicar a relatividade restrita à mecânica quântica com

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$$

Aplicando os operadores momento e energia, teremos então [1]

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi - \nabla^2\psi + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\psi = 0$$

Tomando $\hbar = \text{c} = 1$ [2], $$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2\right]\Psi(\boldsymbol{x}, t) = 0$$

Notação de Einstein - Resumo

$$y = \sum_{i=0}^{3} c_i x^i = c_0 x^0 + c_1 x^1 + c_2 x^2 + c_3 x^3$$

Também vale que: $x^i = (ct, \boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} = u_i v^i$, $u^i = A^i_j v^j$

Vetores covariantes: $a'^{\alpha} = \dfrac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} a^{\beta}$ Vetores contravariantes: $a'_{\alpha} = \dfrac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} a_{\beta}$

Notação de Einstein - Resumo

Métrica Lorentziana

$$\boxed{g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Redefinindo a equação de Klein-Gordon

Desta forma, a equação de Klein-Gordon se torna

$$\left[\partial_\mu \partial^\mu + m^2\right]\Psi(\boldsymbol{x}, t) = 0$$

Também podemos usar a derivada covariante de gauge [6]

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + ieA_\mu, \quad A^\mu = (\Phi, \boldsymbol{A}) \; e \; \partial_\mu A^\mu = 0$$

para incluir o efeito do potencial vetor. Disto,

$$\left[D_\mu D^\mu + m^2\right]\Psi(\boldsymbol{x}, t) = 0$$

Redefinindo a equação de Klein-Gordon

Agora, queremos duas funções tais que possa se usar

$$\phi(\boldsymbol{x},t)\,\Big|_{t=0} \qquad\qquad \chi(\boldsymbol{x},t)\,\Big|_{t=0}$$

ou seja, retirar a condição de contorno em ∂t: $\left.\dfrac{\partial\Psi}{\partial t}\right|_{t=0}$ e $\Psi(\boldsymbol{x},t)\,\Big|_{t=0}$

Vamos tomar: $\phi(\boldsymbol{x},t)=\dfrac{1}{2}\left[\Psi(\boldsymbol{x},t)+\dfrac{i}{m}D_t\Psi(\boldsymbol{x},t)\right]$ $\quad \chi(\boldsymbol{x},t)=\dfrac{1}{2}\left[\Psi(\boldsymbol{x},t)-\dfrac{i}{m}D_t\Psi(\boldsymbol{x},t)\right]$

Redefinindo a equação de Klein-Gordon

O que acontece se fizermos $iD_t\phi$ e $iD_t\chi$? Note que: $D_\mu D^\mu = D_t^2 - \boldsymbol{D}^2$

$$\boxed{iD_t\phi} = \frac{i}{2}D_t\Psi - \frac{1}{2m}D_t^2\Psi = \frac{1}{2}D_t\Psi - \frac{1}{2m}\boldsymbol{D}^2\Psi + \frac{m}{2}\Psi =$$

$$= -\frac{1}{2m}\boldsymbol{D}^2\Psi + \frac{m}{2}\left[\Psi + \frac{1}{m}D_t\Psi\right] = \boxed{-\frac{1}{2m}\boldsymbol{D}^2\Psi + m\phi}$$

$$\boxed{iD_t\chi} = \frac{i}{2}D_t\Psi + \frac{1}{2m}D_t^2\Psi = \frac{1}{2}D_t\Psi + \frac{1}{2m}\boldsymbol{D}^2\Psi - \frac{m}{2}\Psi =$$

$$= +\frac{1}{2m}\boldsymbol{D}^2\Psi - \frac{m}{2}\left[\Psi - \frac{1}{m}D_t\Psi\right] = \boxed{\frac{1}{2m}\boldsymbol{D}^2\Psi - m\phi}$$

Lembra a equação de Schrodinger não relativística!

Redefinindo a equação de Klein-Gordon

Note que podemos reduzir essas duas equações em uma usando as matrizes

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$iD_t \begin{Bmatrix} \phi(\boldsymbol{x}, t) \\ \chi(\boldsymbol{x}, t) \end{Bmatrix} = \left[-\frac{1}{2m} \boldsymbol{D}^2 (\tau_3 + i\tau_2) + m\tau_3 \right] \begin{Bmatrix} \phi(\boldsymbol{x}, t) \\ \chi(\boldsymbol{x}, t) \end{Bmatrix}$$

Observe que: $\tau_3 + i\tau 2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

Redefinindo a equação de Klein-Gordon

Usando uma função vetor coluna, $\Upsilon \equiv \begin{bmatrix} \phi(\boldsymbol{x}, t) \\ \chi(\boldsymbol{x}, t) \end{bmatrix}$

$$\boxed{iD_t\Upsilon = \left[-\frac{1}{2m}\boldsymbol{D}^2(\tau_3 + i\tau_2) + m\tau_3\right]\Upsilon}$$

Referências

[1] Dedução da equação de Klein-Gordon: The Klein-Gordon equation (en);
[2] Unidades naturais: Introduction to Elementary Particle Physics – Note 01 (en);
[3] Notação de Einstein: Artigo na Wikipedia (en);
[4] Notação de Einstein: Resumo na Wolfram MathWorld;
[5] R Wittig, Introduction to Relativistic Quantum Mechanics;
[6] Derivada covariante: Construction of the covariant derivative through gauge covariance requirement;
[7] FI008 – Eletromagnetismo I: Notas de aula.