Regra da soma de Thomas-Reiche-Kuhn

Murilo Aguiar Silva

Instituto de Física Gleb Wataghin

November 11, 2020

Relembrando

Na aula 10, no problema do campo de radiação clássico chegamos na seção de choque de absorção:

$$\sigma_{abs} = 4\pi^2 \alpha \omega_{ni} |\langle n| x |i\rangle|^2 \delta(\omega - \omega_{ni}), \quad \omega_{ni} = \frac{E_n - E_i}{\hbar} \tag{1}$$

integrando, queremos mostrar que:

$$\int \sigma_{abs} d\omega = \sum_n 4\pi^2 \alpha \omega_{ni} |\langle n| x |i\rangle|^2 = 2\pi^2 \frac{\alpha \hbar}{m} \tag{2}$$

Termo do centro pode ser escrito como:

$$\int \sigma_{abs} d\omega = 2\pi^2 \frac{\alpha \hbar}{m} \sum_n f_{ni} \quad \Rightarrow \quad \sum_n f_{ni} \equiv \sum_n \frac{2m\omega_{ni}}{\hbar} |\langle n| x |i\rangle|^2 = 1 \tag{3}$$

Usando o fato que $\sum_n |n\rangle \langle n| = 1$:

$$\sum_n f_{ni} = \sum_n \frac{2m\omega_{ni}}{\hbar} |\langle n| x |i\rangle|^2 = \sum_n f_{ni} = \sum_n \frac{2m\omega_{ni}}{\hbar} \langle i| x |n\rangle \langle n| x |i\rangle = \frac{2m\omega_{ni}}{\hbar} \langle i| x^2 |i\rangle \tag{4}$$

Lembre, $[p, x] = -i\hbar$, e nesse problema, $H_0 = \frac{p^2}{2m}$. Assim:

$$[H_0, x] = \frac{1}{2m}[p^2, x] = \frac{1}{2m}(p[p, x] + [p, x]p) = \frac{\hbar}{im}p \tag{5}$$

Escrevendo o primeiro, de outra forma:

$$\langle i| [p, x] |i\rangle = \frac{\hbar}{i} = \langle i| px - xp |i\rangle = \sum_n (\langle i| p |n\rangle \langle n| x |i\rangle - \langle i| x |n\rangle \langle n| p |i\rangle). \tag{6}$$

$$\langle i| p |n\rangle = i\frac{m}{\hbar} \langle i| [H_0, x] |n\rangle = i\frac{m}{\hbar}(\langle i| H_0 x |n\rangle - \langle i| x H_0 |n\rangle) \tag{7}$$

$$= i\frac{m}{\hbar}(E_i - E_n) \langle i| x |n\rangle = im\omega_{in} \langle i| x |n\rangle \tag{8}$$

De modo análogo calcula-se $\langle n| p |i\rangle = im\omega_{ni} \langle i| x |n\rangle$. Logo:

$$\frac{\hbar}{i} = im\sum_n \left(\omega_{in}| \langle i| x |n\rangle |^2 - \omega_{ni}| \langle i| x |n\rangle |^2\right) = \tag{9}$$

$$= -2im\sum_n \omega_{ni}| \langle i| x |n\rangle |^2 = -i\hbar\sum_n f_{ni} \tag{10}$$

De onde se concluí:

$$\sum_n f_{ni} = 1 \tag{11}$$