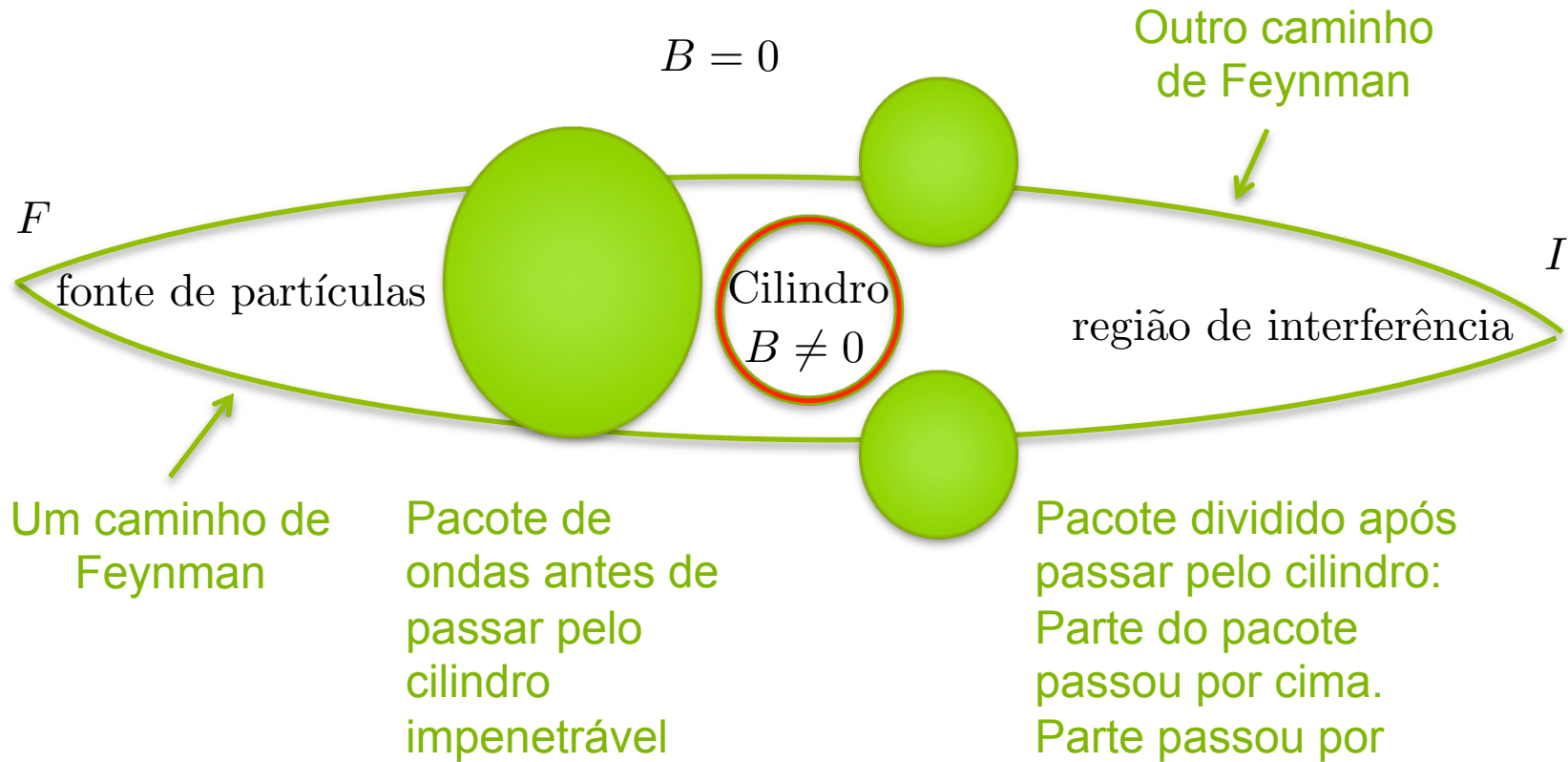


Revisitando o efeito Aharonov-Bohm com fases de Berry



Em FI001, estudamos como a probabilidade de encontrar a partícula na região de interferência I depende do fluxo magnético. O estudo foi feito com integrais de Feynman. A partícula não pode penetrar no cilindro, onde $\mathbf{B} \neq 0$ ($\mathbf{B} = 0$ fora do cilindro) mas ela percebe o potencial vetor que difere de zero fora do cilindro. A interferência resultante dependia do fluxo do campo magnético dentro do cilindro.

Partícula livre e partícula sujeita a um potencial vetor \mathbf{A}

O livro apresenta a Eq.5.6.43, $\langle \mathbf{r} | n(\mathbf{R}) \rangle = \exp \left(\frac{ie}{\hbar c} \int_{\mathbf{R}}^{\mathbf{r}} \mathbf{A}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' \right) \psi_n(\mathbf{r} - \mathbf{R})$

A solução do problema de uma partícula na caixa pode ser obtida de

$\frac{\mathbf{p}^2}{2m} \psi = E \psi$, com condições periódicas de contorno. Uma forma mais

simples é resolver a equação $\mathbf{p} | \mathbf{p}' \rangle = \mathbf{p}' | \mathbf{p}' \rangle$ na representação das coordenadas.

Lembre que $[\mathbf{p}, \frac{\mathbf{p}^2}{2m}] = 0$ e os autokets de \mathbf{p} também são autokets de $\frac{\mathbf{p}^2}{2m}$.

Assim, $\langle \mathbf{r}' | \mathbf{p} | \mathbf{p}' \rangle = \mathbf{p}' \langle \mathbf{r}' | \mathbf{p}' \rangle \Rightarrow \frac{\hbar}{i} \nabla \psi_n(\mathbf{r}') = \mathbf{p}'_{(n)} \psi_n(\mathbf{r}')$. O que muda se a caixa

estivesse sujeita a um potencial vetor? Troque \mathbf{p} por $\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A}$ para obter:

$\left(\frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \psi_n^B(\mathbf{r}') = \mathbf{p}'_{(n)} \psi_n^B(\mathbf{r}')$ cujo espectro é o mesmo $\mathbf{p}'_n^B = \mathbf{p}'_{(n)}$ com

$\psi_n^B(\mathbf{r}') = \exp \left(\frac{ie}{\hbar c} \int^{\mathbf{r}'} \mathbf{A}(\mathbf{r}'') \cdot d\mathbf{r}'' \right) \psi_n(\mathbf{r}')$ (verifique, inserindo-a na equação

diferencial acima). Para escrever a solução com respeito à uma nova origem \mathbf{R} , faça simplesmente a troca : $\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r} - \mathbf{R}$, e obtenha

$\psi_n^B(\mathbf{r} - \mathbf{R}) = \exp \left(\frac{ie}{\hbar c} \int_{\mathbf{R}}^{\mathbf{r}} \mathbf{A}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' \right) \psi_n(\mathbf{r} - \mathbf{R})$

Solução com o potencial vetor \mathbf{A} difere de zero só dentro da caixa

Solução sem o potencial vetor \mathbf{A}

mostre

figura no próximo slide

Solução sem o potencial vetor \mathbf{A}

Vimos na aula passada que a dependência da Hamiltoniana pode ser representada por um “vetor” de parâmetros $\mathbf{R}(t)$.

Desta forma, temos
$$\begin{cases} E_n(t) = E_n(\mathbf{R}(t)) \\ |n; t\rangle = |n(\mathbf{R}(t))\rangle \end{cases} \implies$$

$$\langle n; t | \left(\frac{\partial}{\partial t} |n; t\rangle \right) = \langle n; t | \left(\nabla_{\mathbf{R}} |n; t\rangle \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t}$$

onde $\nabla_{\mathbf{R}}$ é simplesmente o operador gradiente no espaço e direção de \mathbf{R} . A fase geométrica

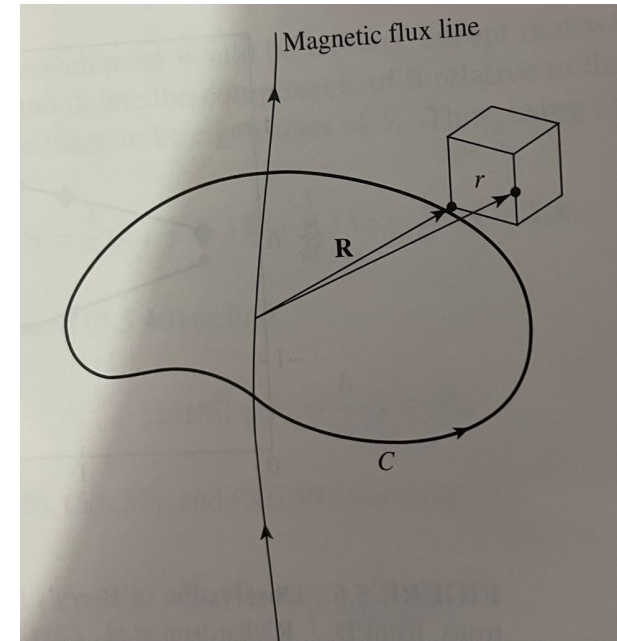
$$\gamma_n(T) \equiv i \int_0^T \langle n, t | \left(\frac{\partial}{\partial t} |n; t\rangle \right) dt, \text{ fica:}$$

$$\gamma_n(T) = i \int_0^T \langle n; t | \left(\nabla_{\mathbf{R}} |n; t\rangle \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} dt = i \int_{\mathbf{R}(0)}^{\mathbf{R}(T)} \langle n; t | \left(\nabla_{\mathbf{R}} |n; t\rangle \right) \cdot d\mathbf{R}.$$

No caso em que T representa um período de um ciclo $\mathbf{R}(T) = \mathbf{R}(0)$ sobre a

$$\text{curva } C \Rightarrow \gamma_n(C) = i \oint \langle n; t | \left(\nabla_{\mathbf{R}} |n; t\rangle \right) \cdot d\mathbf{R} = i \oint \langle n(\mathbf{R}) | \left(\nabla_{\mathbf{R}} |n(\mathbf{R})\rangle \right) \cdot d\mathbf{R}$$

$$\begin{aligned} \langle n(\mathbf{R}) | \left(\nabla_{\mathbf{R}} |n(\mathbf{R})\rangle \right) &= \int d^3x \psi_n^*(\mathbf{r}-\mathbf{R}) \left(-\frac{ie}{\hbar c} \mathbf{A}(\mathbf{R}) \psi_n(\mathbf{r}-\mathbf{R}) + \nabla_{\mathbf{R}} \psi_n(\mathbf{r}-\mathbf{R}) \right) = \\ &= -\frac{ie}{\hbar c} \mathbf{A}(\mathbf{R}) \therefore \gamma_n(C) = \frac{e}{\hbar c} \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{R} = \frac{e}{\hbar c} \int_{S(C)} \mathbf{B}(\mathbf{R}) \cdot d\mathbf{S} = \frac{e}{\hbar c} \Phi_B \end{aligned}$$



Teoria de Perturbação dependente do tempo

Estratégia de Dirac (1927). A proposta de Dirac é familiar. Defina:

$$c_n(t) = \underbrace{c_n^{(0)}}_{0^a} + \underbrace{c_n^{(1)}}_{1^a} + \underbrace{c_n^{(2)}}_{2^a\text{-ordem}} + \dots \text{ e suponha que inicialmente só } |i\rangle \text{ está populado.}$$

[lousa](#)

ou seja, $c_n^{(0)} = \delta_{ni}$. A equação dos $c_n(t)$ foi obtida na aula 6, e escrita na forma matricial por:

$$i\hbar \begin{pmatrix} \dot{c}_1 \\ \dot{c}_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12}e^{i\omega_{12}t} & \dots \\ V_{21}e^{i\omega_{21}t} & V_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \text{ com } \omega_{21} = -\omega_{12}$$

Como V carrega um λ^1 , igualar termos de mesma ordem em λ , implica em comparar uma ordem superior de \dot{c}_j (especificamente $\dot{c}_j^{(k+1)}$) com uma ordem inferior de c_ℓ (especificamente $c_\ell^{(k)}$). Comece com $c_n^{(0)}$ e retire uma expressão para $\dot{c}_n^{(1)}$. Faça de novo e obtenha $c_n^{(2)}$, e assim por diante.

Teoria de Perturbação dependente do tempo

Estratégia de Dyson. No formalismo de Dyson utilizamos o operador de evolução temporal $\mathcal{U}_I(t, t_0)$ do enfoque de interação. Para isso, vamos encontrar uma expansão perturbativa para $\mathcal{U}_I(t, t_0)$ e no final, relacionar seus elementos de matriz com os c'_n s. Embora pareça que estamos construindo uma ferramenta muito sofisticada, ela será útil em problemas complexos, envolvendo teoria quântica de campos e teoria de muitos corpos.

Começamos por: $\underbrace{|\alpha, t_0; t\rangle_I = \mathcal{U}_I(t, t_0)|\alpha, t_0; t_0\rangle_I}$

o operador foi construído para ter esta propriedade

Vimos que $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\alpha, t_0; t\rangle_I = V_I |\alpha, t_0; t\rangle_I$ e isso permite escrever:

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{U}_I(t, t_0) \right) \underbrace{|\alpha, t_0; t_0\rangle_I}_{\text{independente do tempo}} = V_I \mathcal{U}_I(t, t_0) \underbrace{|\alpha, t_0; t_0\rangle_I}_{\text{independente do tempo}}$$

Como isso tem que valer para $\forall |\alpha, t_0; t_0\rangle_I \Rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{U}_I(t, t_0) = V_I \mathcal{U}_I(t, t_0)$

Precisamos resolver esta equação com a condição de contorno: $\mathcal{U}_I(t, t_0)|_{t=t_0} = 1$

Teoria de Perturbação dependente do tempo

Integrando, de $t = t_0$ até t , a equação diferencial que define $\mathcal{U}_I(t, t_0)$, temos:

$$i\hbar \int_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{U}_I(t, t_0) = \int_{t_0}^t V_I(t') \mathcal{U}_I(t', t_0) dt'$$

$$[\mathcal{U}_I(t, t_0) - \mathcal{U}_I(t_0, t_0)] = \frac{-i}{\hbar} \int_{t_0}^t V_I(t') \mathcal{U}_I(t', t_0) dt'$$

que com a condição de contorno: $\mathcal{U}_I(t, t_0)|_{t=t_0} = 1$, permite escrever:

$$\mathcal{U}_I(t, t_0) = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t V_I(t') \mathcal{U}_I(t', t_0) dt' \quad \text{lousa}$$

O problema está resolvido? Não. $\mathcal{U}_I(t, t_0)$ aparece nos dois lados. Proposta de solução iterativa:

$$\mathcal{U}_I(t, t_0) = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t V_I(t') \underbrace{\left(1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t'} V_I(t'') \mathcal{U}_I(t'', t_0) dt'' \right)}_{\mathcal{U}_I(t', t_0)} dt'$$

$$= 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t V_I(t') + \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^2 \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' V_I(t') V_I(t'') + \dots +$$

$$+ \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^n \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' \dots \int_{t_0}^{t^{(n-1)}} dt^{(n)} V_I(t') V_I(t'') \dots V_I(t^{(n)}) \Rightarrow \text{Série de Dyson}$$

Note série de potências em $V \Rightarrow$ lógica da teoria de perturbação.

Teoria de Perturbação dependente do tempo

Probabilidade de Transição. O conhecimento de $\mathcal{U}_I(t, t_0)$ nos leva à

$$|i, t_0 = 0; t\rangle_I = \mathcal{U}_I(t, 0)|i\rangle = \sum_n |n\rangle \underbrace{\langle n|\mathcal{U}_I(t, 0)|i\rangle}_{c_n(t)} \Rightarrow \text{vamos explorar isso}$$

Primeiro a conexão entre $\mathcal{U}_I(t, t_0)$ e $\mathcal{U}(t, t_0)$. Tínhamos definido $|\alpha, t_0; t\rangle_I$,

$$\begin{aligned} \text{tal que } |\alpha, t_0; t\rangle_I &= e^{i\frac{H_0 t}{\hbar}} |\alpha, t_0; t\rangle_S = e^{i\frac{H_0 t}{\hbar}} \mathcal{U}(t, t_0) |\alpha, t_0; t_0\rangle_S = \\ &= e^{i\frac{H_0 t}{\hbar}} \mathcal{U}(t, t_0) \underbrace{e^{-i\frac{H_0 t}{\hbar}} |\alpha, t_0; t_0\rangle_I}_{\text{o inverso de } |\alpha, t_0; t_0\rangle_I} \end{aligned}$$

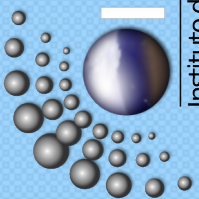
$$\text{o inverso de } |\alpha, t_0; t_0\rangle_I = e^{i\frac{H_0 t}{\hbar}} |\alpha, t_0; t_0\rangle_S$$

Comparando com $|\alpha, t_0; t\rangle_I = \mathcal{U}_I(t, t_0) |\alpha, t_0; t_0\rangle_I$, temos:

$$\mathcal{U}_I(t, t_0) = e^{i\frac{H_0 t}{\hbar}} \mathcal{U}(t, t_0) e^{-i\frac{H_0 t}{\hbar}} \text{ e assim}$$

$$c_n(t) = \langle n|\mathcal{U}_I(t, t_0)|i\rangle = e^{i\frac{(E_n t - E_i t)}{\hbar}} \langle n|\mathcal{U}(t, t_0)|i\rangle$$

onde $\langle n|\mathcal{U}(t, t_0)|i\rangle$ foi definida em FI001 como amplitude de transição



Teoria de Perturbação dependente do tempo

Assim, $\langle n | \mathcal{U}_I(t, t_0) | i \rangle$ não é bem a amplitude de transição, mas vale:

$$|\langle n | \mathcal{U}_I(t, t_0) | i \rangle|^2 = |\langle n | \mathcal{U}(t, t_0) | i \rangle|^2$$

Se o elemento de matriz for com kets que não são autokets de H_0 , temos, em

$$\text{geral: } |\langle b' | \mathcal{U}_I(t, t_0) | a' \rangle| \neq |\langle b' | \mathcal{U}(t, t_0) | a' \rangle| \Rightarrow \begin{cases} A | a' \rangle = a' | a' \rangle \\ B | b' \rangle = b' | b' \rangle \end{cases} \quad \text{mas } \begin{cases} [A, H_0] \neq 0 \\ [B, H_0] \neq 0 \end{cases}$$

Caso, precise do elemento envolvendo $| a' \rangle$ e $| b' \rangle$, basta expandir eles na base de autokets de H_0 e utilizar as expressões anteriores.

Retornando à $\langle n | \mathcal{U}_I(t, t_0) | i \rangle$. Normalmente, tomamos $| i, t_0; t_0 \rangle_S = | i \rangle$. com isso,

$$| i, t_0; t_0 \rangle_I = e^{i \frac{H_0 t_0}{\hbar}} | i, t_0; t_0 \rangle_S = e^{i \frac{E_i t_0}{\hbar}} | i, t_0; t_0 \rangle_S.$$

Quando trabalhamos no enfoque de interação, é conveniente tomar:

$| i, t_0; t_0 \rangle_S = e^{-i \frac{E_i t_0}{\hbar}} | i \rangle$ pois, assim $| i, t_0; t_0 \rangle_I = | i \rangle$. Feito isso, temos:

$$| i, t_0; t \rangle_I = \mathcal{U}_I(t, t_0) | i \rangle = \sum_n | n \rangle \underbrace{\langle n | \mathcal{U}_I(t, t_0) | i \rangle}_{c_n(t)}, \text{ conforme definimos no slide 7.}$$

Série de Dyson

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_I(t, t_0) = & 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t V_I(t') + \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^2 \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} V_I(t') V_I(t'') + \dots + \\ & + \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^n \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' \dots \int_{t_0}^{t^{(n-1)}} dt^{(n)} V_I(t') V_I(t'') \dots V_I(t^{(n)}) \end{aligned}$$

[lousa](#)

podemos obter por comparação com $c_n(t) = c_n^{(0)} + c_n^{(1)} + c_n^{(2)} + \dots$ os seguintes

resultados

$$\left\{ \begin{aligned} c_n^{(0)} &= \delta_{ni} \\ c_n^{(1)} &= -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \langle n | \underbrace{V_I(t')}_{e^{i\frac{H_0}{\hbar}t'} V(t') e^{-i\frac{H_0}{\hbar}t'}} | i \rangle dt' = -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t e^{i\frac{(E_n - E_i)}{\hbar}t'} \langle n | V(t') | i \rangle dt' \\ &= -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t e^{i\omega_{ni}t'} V_{ni}(t') dt', \text{ onde usamos } \frac{(E_n - E_i)}{\hbar} = \omega_{ni} \\ c_n^{(2)} &= \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^2 \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' \langle n | V_I(t') V_I(t'') | i \rangle = \\ &= \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^2 \sum_m \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' e^{i\omega_{nm}t'} V_{nm}(t') e^{i\omega_{mi}t''} V_{mi}(t'') \end{aligned} \right.$$

A probabilidade de transição é então obtida por:

$$P(i \rightarrow n) = |c_n^{(1)}(t) + c_n^{(2)}(t) + \dots|^2 \quad (\text{para } i \neq n)$$

Teoria de Perturbação dependente do tempo: potencial constante

$$V(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ V & \text{se } t \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V \text{ é independente de } t, \text{ mas pode depender} \\ \text{de } \mathbf{x} \text{ e } \mathbf{p}. \end{cases}$$

Se em $t = 0$ o sistema estiver em $|i\rangle$, podemos escrever:

$$c_n^{(0)} = c_n^{(0)}(0) = \delta_{in}$$

$$\begin{aligned} c_n^{(1)} &= -\frac{i}{\hbar} V_{ni} \int_0^t e^{i\omega_{ni}t'} dt' = -\frac{i}{\hbar} V_{ni} \frac{1}{i\omega_{ni}} e^{i\omega_{ni}t'} \Big|_0^t = -\frac{V_{ni}}{\hbar\omega_{ni}} (e^{i\omega_{ni}t} - 1) \\ &= -\frac{V_{ni}}{\hbar\omega_{ni}} e^{\frac{i\omega_{ni}t}{2}} \cdot (2i) \left(\frac{e^{\frac{i\omega_{ni}t}{2}} - e^{-\frac{i\omega_{ni}t}{2}}}{2i} \right) = -\frac{2ie^{\frac{i\omega_{ni}t}{2}} V_{ni}}{\hbar\omega_{ni}} \sin \frac{\omega_{ni}t}{2} \end{aligned}$$

$$\text{e } \therefore P(i \rightarrow n) = |c_n^{(1)}(t)|^2 = \frac{4|V_{ni}|^2}{|E_n - E_i|^2} \sin^2 \frac{\omega_{ni}t}{2}$$

Suponha que existam muitos estados finais \rightarrow praticamente um contínuo de

energias $\omega \equiv \frac{E_n - E_i}{\hbar}$ com ω variando continuamente. Vamos plotar $\frac{|c_n^{(1)}(t)|^2}{|V_{ni}|^2}$

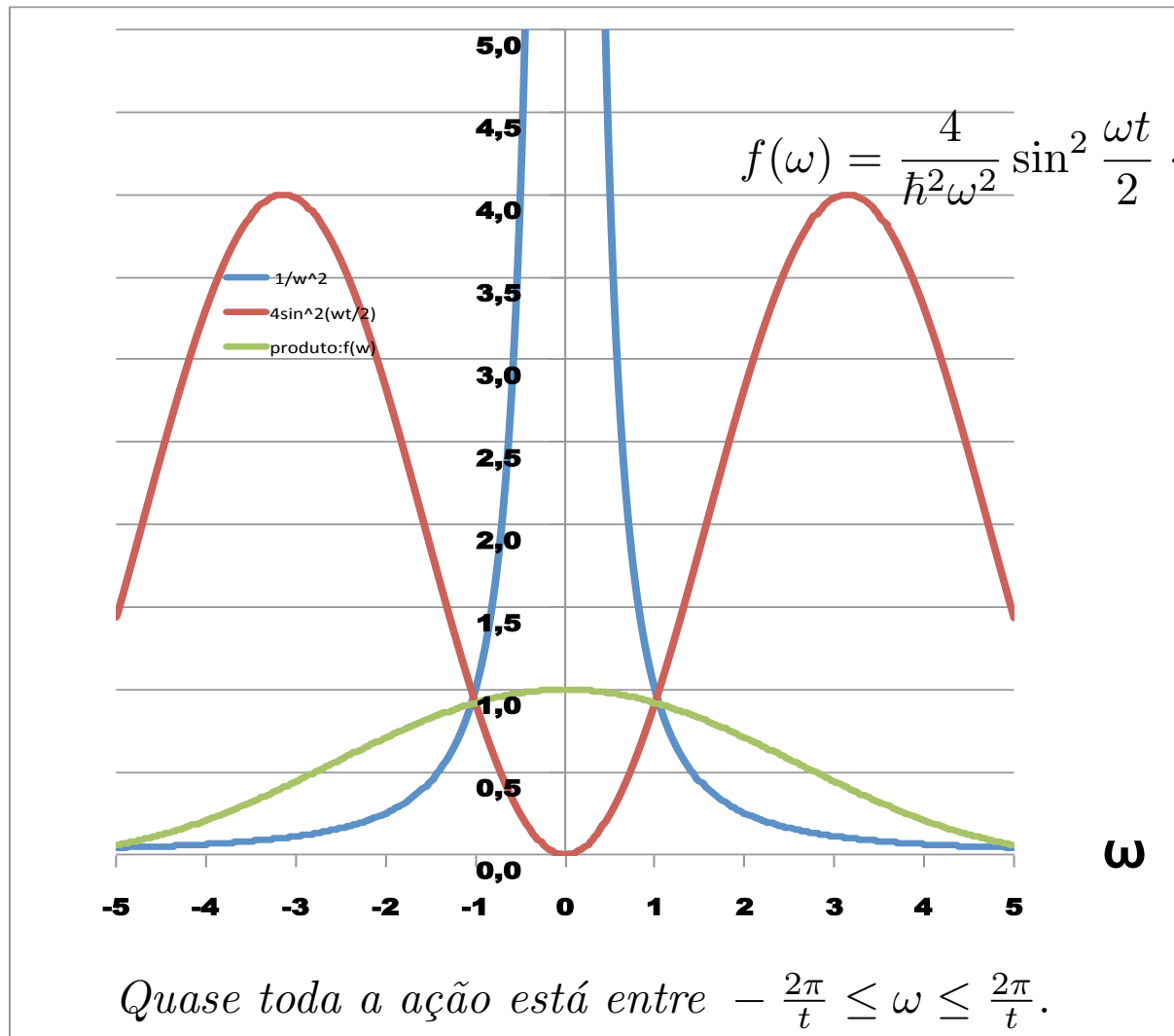
como função de ω para um dado t . Isto é, no slide seguinte apresentamos uma

figura de $f(\omega) = \frac{|c_n^{(1)}(t)|^2}{|V_{ni}|^2} = \frac{4}{\hbar^2\omega^2} \sin^2 \frac{\omega t}{2}$. Note: $\lim_{\omega \rightarrow 0} f(\omega) = \frac{4}{\hbar^2\omega^2} \left(\frac{\omega t}{2}\right)^2 = \frac{t^2}{\hbar^2}$

A amplitude cresce quadraticamente no tempo se $\omega \approx 0$.

↳ Estranho! Porque?

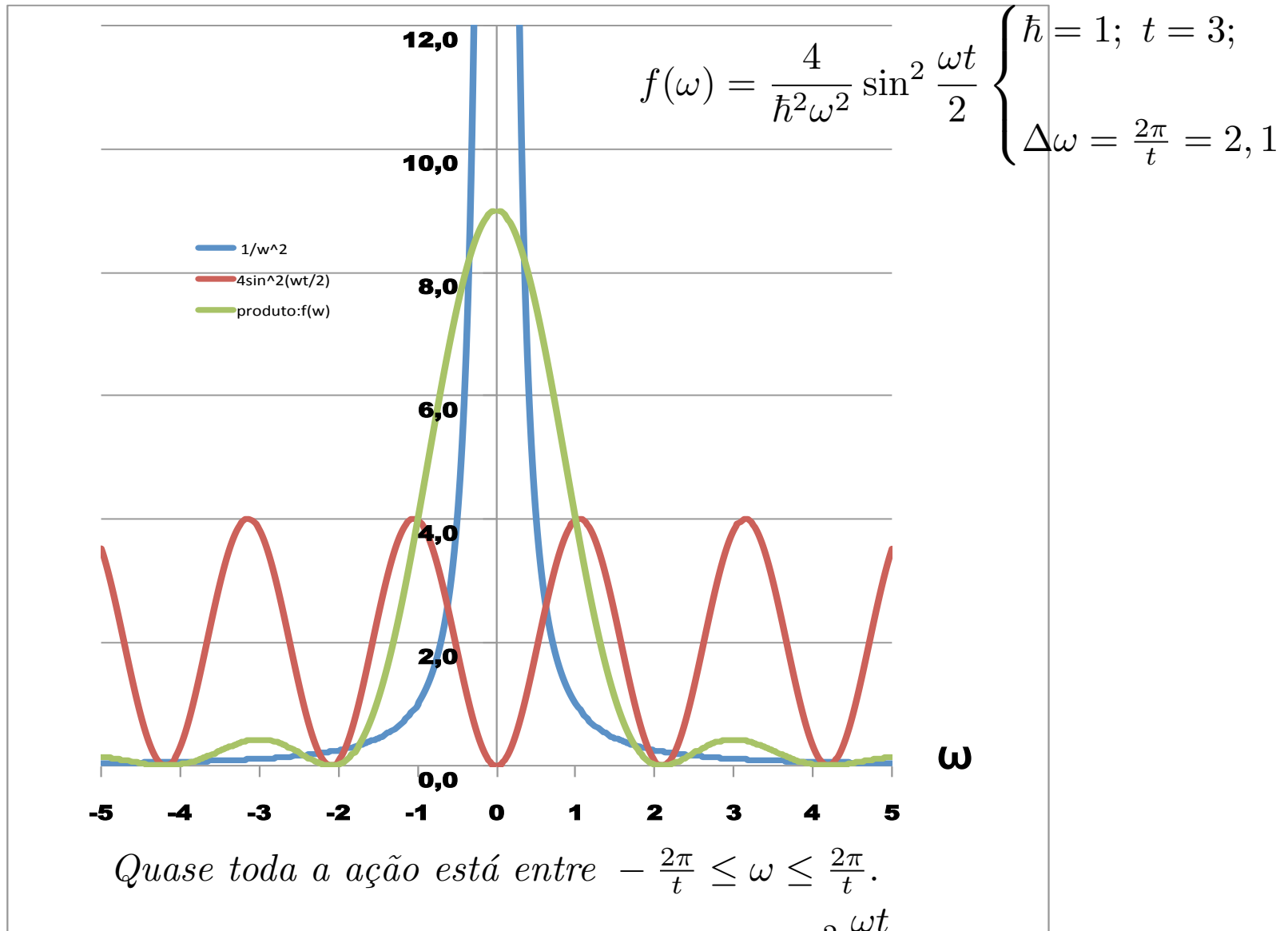
Teoria de Perturbação dependente do tempo: potencial constante



Quase toda a ação está entre $-\frac{2\pi}{t} \leq \omega \leq \frac{2\pi}{t}$.

Isso ocorre entre os primeiros zeros do $\sin^2 \frac{\omega t}{2}$.

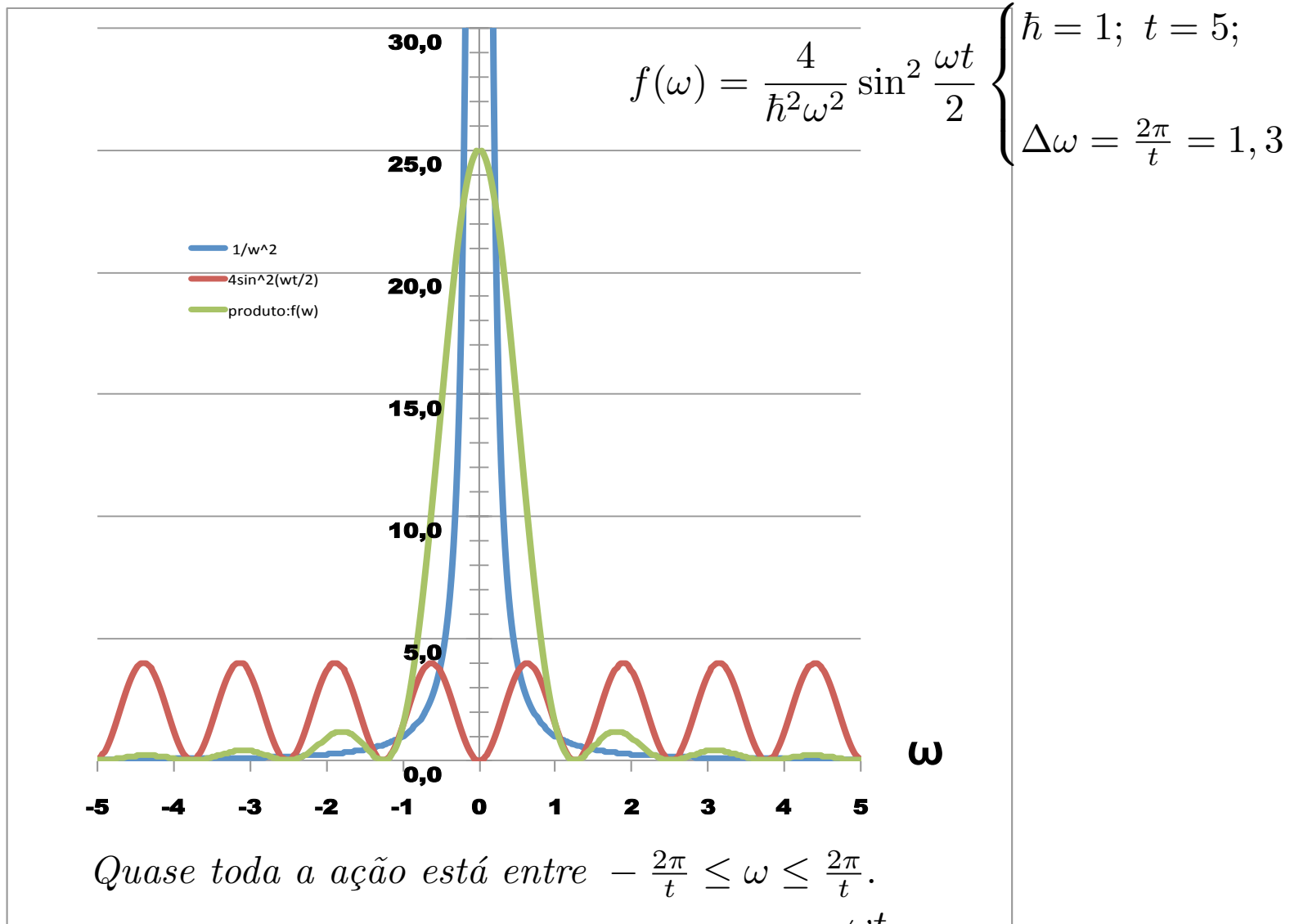
Teoria de Perturbação dependente do tempo: potencial constante



Quase toda a ação está entre $-\frac{2\pi}{t} \leq \omega \leq \frac{2\pi}{t}$.

Isso ocorre entre os primeiros zeros do $\sin^2 \frac{\omega t}{2}$.

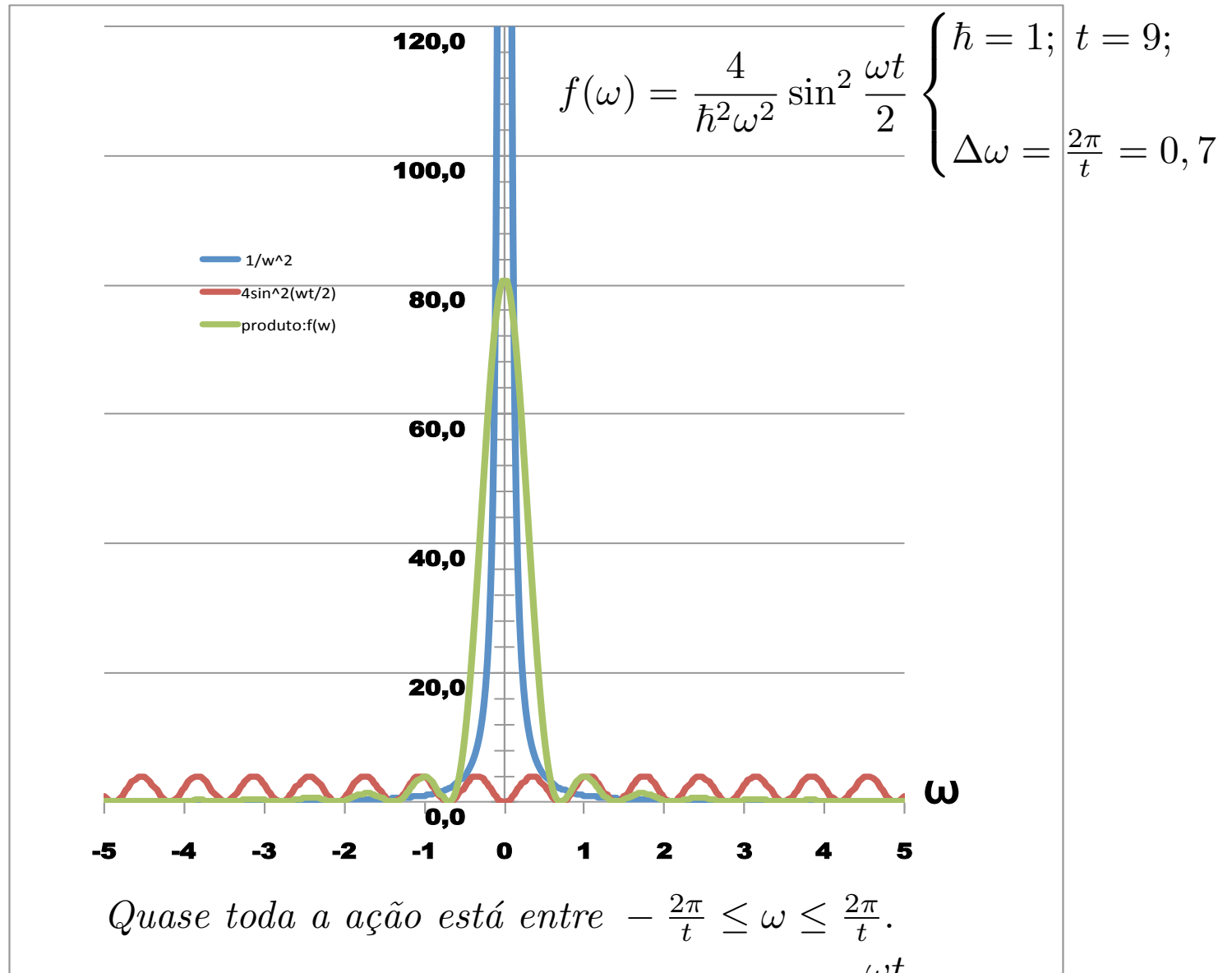
Teoria de Perturbação dependente do tempo: potencial constante



Quase toda a ação está entre $-\frac{2\pi}{t} \leq \omega \leq \frac{2\pi}{t}$.

Isso ocorre entre os primeiros zeros do $\sin^2 \frac{\omega t}{2}$.

Teoria de Perturbação dependente do tempo: potencial constante



Quase toda a ação está entre $-\frac{2\pi}{t} \leq \omega \leq \frac{2\pi}{t}$.

Isso ocorre entre os primeiros zeros do $\sin^2 \frac{\omega t}{2}$.

Teoria de Perturbação dependente do tempo: potencial constante

Conclusões:

- Quando t cresce, $f(\omega)$ fica apreciável no intervalo $0 \leq |\omega| \leq \frac{2\pi}{t}$. Isso permite escrever a largura em energia dos estados finais possíveis (estados que podem ser excitados por terem amplitudes de probabilidade relevantes). Para isso, tome $|\omega|_{max} = \frac{E_n^{max} - E_i}{\hbar} = \frac{\Delta E}{\hbar} \sim \frac{2\pi}{t} = \frac{2\pi}{\Delta t}$, onde $\Delta t = t$ é o tempo de potencial ligado. Pode-se expressar isso na forma conhecida: $\underbrace{\Delta E}_{\text{largura em energia envolvida no processo}} \Delta t \sim 2\pi\hbar = h$.

largura em energia envolvida no processo

∴ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Se } \Delta t \text{ pequeno: a largura em energia é grande} \\ \text{Se } \Delta t \text{ grande: a largura em energia é pequena} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{transições podem violar} \\ \text{a conservação de energia} \\ \text{transições respeitam} \\ \text{a conservação de energia} \end{array} \right.$

- Para transições “finas”, com $E_n = E_i$, temos $|c_n(t)|^2 = \frac{|V_{ni}|^2 t^2}{\hbar^2}$, ou seja, a probabilidade de haver mudança é quadrática em t . Precisamos discutir o significado disso. Antes dessa discussão, na próxima aula, apresentaremos dois exemplos de transições sem perda de energia (para $\Delta E = 0$.)

Pense em

$$c_n(t) = c_n^{(0)} + c_n^{(1)} + c_n^{(2)} + \dots = c_n^{(0)}\lambda^0 + c_n^{(1)}\lambda^1 + c_n^{(2)}\lambda^2 + \dots \text{ com } \lambda = 1$$

[slide 6](#)

Sabemos que

$$\mathcal{U}_I(t, t_0) = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t V_I(t') \mathcal{U}_I(t', t_0) dt'$$

Troque t' por t'' e t por t'

$$\mathcal{U}_I(t', t_0) = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t'} V_I(t'') \mathcal{U}_I(t'', t_0) dt''$$

e substitua no lado direito da primeira equação para obter

$$\mathcal{U}_I(t, t_0) = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t V_I(t') \left(1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t'} V_I(t'') \mathcal{U}_I(t'', t_0) dt'' \right) dt'$$

Sabemos que $c_n(t) = \langle n|U_I(t, t_0)|i\rangle$ e que a Série de Dyson

$$\mathcal{U}_I(t, t_0) = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t V_I(t') + \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^2 \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} V_I(t') V_I(t'') + \dots +$$

$$+ \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^n \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' \dots \int_{t_0}^{t^{(n-1)}} dt^{(n)} V_I(t') V_I(t'') \dots V_I(t^{(n)}) \text{ e assim}$$

$$c_n(t) = \langle n|i\rangle - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \langle n|V_I(t')|i\rangle + \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^2 \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} \langle n|V_I(t') V_I(t'')|i\rangle + \dots$$

Os resultados do slide 9 são obtidos por comparação com

$$c_n(t) = c_n^{(0)} + c_n^{(1)} + c_n^{(2)} + \dots \text{ onde } \begin{cases} c_n^{(0)} \text{ corresponde à "V}^0\text{"} \\ c_n^{(1)} \text{ corresponde à "V}^1\text{"} \\ \vdots \\ c_n^{(k)} \text{ corresponde à "V}^k\text{"} \\ \vdots \end{cases}$$

Coloquei V^k entre aspas para indicar que k é o número de vezes que V aparece em $c_n^{(k)}$ no slide 9.