

Campo de Radiação Clássico: Aproximação de dipolo elétrico

Na aula passada obtivemos a seção de choque de transição do nível $|i\rangle$ para o nível $|n\rangle$ devido a interação de um campo clássico com um átomo. A expressão obtida foi:

$$\sigma_{\text{abs}} = \frac{4\pi^2 \hbar}{m_e^2 \omega} \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right) |\langle n | e^{i \frac{\omega}{c} \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x}} \hat{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{p} | i \rangle|^2 \delta(E_n - E_i - \hbar \omega)$$

Hoje, vamos estudar a chamada aproximação de dipolo elétrico.

A base da aproximação: $\lambda_{\text{luz incidente}} \gg$ dimensões atômicas na região de valores de x que interessa!

$$\frac{\omega}{c} = 2\pi \frac{\nu}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow e^{i(\omega/c)\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x}} = 1 + i \frac{\omega}{c} \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x} + \dots \approx 1 \begin{cases} \frac{\omega}{c} \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x} = \frac{\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x}}{\lambda} \approx 0 \text{ é} \\ \text{a aproximação} \end{cases}$$

Explorando um pouco mais as limitações da aproximação.

lousa

Para as transições eletrônicas, quanto vale $\hbar\omega$? Deve ser da ordem do

espaçamento entre níveis atômicos. Que tal $\hbar\omega \sim \frac{Ze^2}{R_{\text{atom}}} \therefore \omega \sim \frac{Ze^2}{\hbar R_{\text{atom}}}$

mas então, $\lambda = \frac{c}{\omega} = \frac{\hbar c}{Ze^2} R_{\text{atom}} = \frac{137}{Z} R_{\text{atom}} \Rightarrow \lambda \gg R_{\text{atom}}$

Campo de Radiação Clássico: Aproximação de dipolo elétrico

Quando calculamos o elemento de matriz $\langle n | e^{i\frac{\omega}{c}\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{x}} \hat{\mathbf{e}}\cdot\mathbf{p} | i \rangle$, na representação das coordenadas, $|\langle \mathbf{x}' | i \rangle| \approx 0$ se $|\mathbf{x}'| > R_{\text{atom}}$. Assim, se $\frac{\omega}{c}\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{x} \approx 0$ para $|\mathbf{x}| \approx R_{\text{atom}}$ a condição de aproximação de dipolo elétrico estará satisfeita. Portanto, basta ter $\frac{\omega}{c}|\mathbf{x}| \Big|_{\text{região com } |\langle \mathbf{x}' | i \rangle| \neq 0} \ll 1$. O caso extremo é para $|\mathbf{r}| = |R_{\text{atom}}|$. Assim, podemos escrever $\frac{|\mathbf{x}|}{\lambda} \Big|_{|\mathbf{x}|=R_{\text{atom}}} = \frac{R_{\text{atom}}}{\lambda} \approx \frac{Z}{137} \ll 1$ (para $\omega \sim \frac{Ze^2}{\hbar R_{\text{atom}}}$).

A aproximação de dipolo permite simplificar $\langle n | e^{i\frac{\omega}{c}\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{x}} \hat{\mathbf{e}}\cdot\mathbf{p} | i \rangle \approx \hat{\mathbf{e}}\cdot\langle n | \mathbf{p} | i \rangle$

Tomando $\hat{\mathbf{e}}$ ao longo de $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{z}}$, e lembrando que $[x, H_0] = \frac{i\hbar p_x}{m}$ temos:

$$\langle n | p_x | i \rangle = \frac{m}{i\hbar} \langle n | [x, H_0] | i \rangle = \frac{m}{i\hbar} (E_i - E_n) \langle n | x | i \rangle = im\omega_{ni} \underbrace{\langle n | x | i \rangle}$$

operador de dipolo que dá origem ao nome aproximação de dipolo elétrico.

[lousa](#)

Nesta aproximação, a seção de choque de absorção é dada por:

$$\sigma_{\text{abs}} = 4\pi^2 \alpha \omega_{ni} |\langle n | x | i \rangle|^2 \delta(\omega - \omega_{ni})$$

Campo de Radiação Clássico

Se integrarmos (e somarmos sobre todos os estados finais), temos

$$\int \sigma_{\text{abs}} d\omega = \sum_n 4\pi^2 \alpha \omega_{ni} |\langle n|x|i\rangle|^2$$

Força de oscilador

Ao definir $f_{ni} = \frac{2m\omega_{ni}}{\hbar} |\langle n|x|i\rangle|^2$ é possível mostrar que $\sum_n f_{ni} = 1$.

Para isso, calcule $\langle i|[x, [x, H_0]]|i\rangle$, utilizando a relação $\mathbb{1} = \sum_n |n\rangle\langle n|$

em $[x, [x, H_0]] = [x, \frac{i\hbar}{m} p_x] = \frac{i\hbar}{m} [x, p_x] = \frac{i\hbar}{m} i\hbar = -\frac{\hbar^2}{m}$ e conclua faça a conta

$$\int \sigma_{\text{abs}} d\omega = 4\pi^2 \alpha \left(\sum_n \frac{2m\omega_{ni}}{\hbar} |\langle n|x|i\rangle|^2 \right) \frac{\hbar}{2m} = 2\pi^2 \frac{\alpha \hbar}{m} = 2\pi^2 c \left(\frac{e^2}{mc^2} \right) \left\{ \begin{array}{l} \text{resultado} \\ \text{clássico} \end{array} \right.$$

Efeito fotoelétrico

Basicamente, trata-se da transição, devido à um campo de radiação, de um elétron em um estado ligado $|i\rangle$ do átomo para um estado do contínuo $|n\rangle = |\mathbf{k}_f\rangle$ de energia positiva. O estado final pode ser descrito por uma onda plana se o elétron sair rapidamente de perto do átomo. Para aplicar a fórmula obtida para σ_{abs} , precisamos definir a densidade de estados finais e integrar com $\delta(\omega_{ni} - \omega)$. Para obter a densidade de estados, usamos condições periódicas de contorno da caixa, de aresta L , como fizemos em FI001 e resumiremos a seguir.

Condições periódicas de contorno da caixa, de aresta L , fornece $\langle \mathbf{x} | \mathbf{k}_f \rangle = \frac{e^{i\mathbf{k}_f \cdot \mathbf{x}}}{L^{3/2}}$

com $k_{f_{i=x,y,z}} = \frac{2\pi}{L} n_i$, e n_i inteiro positivo ou negativo. A energia de uma partícula nesta caixa é

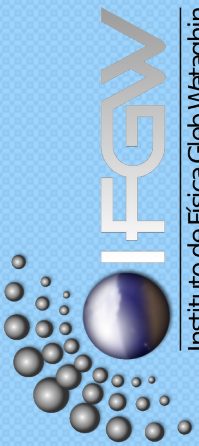
$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2 (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{(2\pi)^2}{L^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) = \frac{\hbar^2 n^2}{2m} \frac{(2\pi)^2}{L^2}$$

Para calcular $\rho(E)dE$ (número de estados com energia entre E e $E + dE$), podemos imaginar uma folha esférica de raio n e espessura dn . O número de estados nesta folha espessa é: $4\pi n^2 dn$. Se quiséssemos apenas o número de estados em um pequeno volume desta casca esférica, definido pelo ângulo sólido $d\Omega$, bastaria trocar 4π por $d\Omega$, isto é $d\Omega n^2 dn$. Com isso, $\rho(E)dE$ pode ser escrito na forma $\rho(E)dE = d\Omega n^2 dn$ e assim, obtemos

$$\rho(E) = d\Omega n^2 \frac{dn}{dE} = d\Omega n^2 \frac{1}{\frac{dE}{dn}} = d\Omega \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 \frac{m}{\hbar^2} \frac{n^2}{n} = \frac{mn}{\hbar^2} \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 d\Omega = \frac{mk}{\hbar^2} \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 d\Omega$$

Pense em dE como a energia total dentro do elemento de “volume” $d\Omega n^2 dn$ que contém estados com energia entre E e $E + dE$. A dedução da seção de choque diferencial do efeito fotoelétrico para elétrons emitidos na direção $\hat{\mathbf{k}}_f$, dentro do ângulo sólido $d\Omega$, definida por $\frac{d\sigma}{d\Omega}$, fica para casa.

faça a conta



Deslocamento de energia e largura de decaimento

Até aqui estudamos a probabilidade de haver mudança, $n \neq i$. É interessante analisar o caso onde o estado final é igual ao estado inicial, ou seja ver o que acontece com $c_i(t)$. Para evitar mudanças bruscas na Hamiltoniana, propomos aumentar a intensidade da perturbação gradualmente. No passado remoto, $t \rightarrow -\infty \Rightarrow V(t) = 0$, com o passar do tempo, $V(t)$ vai surgindo até que em $t \sim 0$ tem o valor desejado. A proposta é $V(t) = e^{\eta t} V$ com V independente do tempo e η positivo e pequeno. No fim faremos $\eta \rightarrow 0$ (potencial constante o tempo todo), e faremos ligação deste assunto com teoria de perturbação independente do tempo. O que será possível pois $V(t) \rightarrow V$ quando $\eta \rightarrow 0$. Como fica $c_n(t)$ (ainda para $n \neq i$)? Para $t_0 = -\infty$, temos:

$c_n^{(0)} = \delta_{ni} = 0$ (não depende do tempo e informa que o estado i é o inicial)

$$c_n^{(1)} = -\frac{i}{\hbar} V_{ni} \int_{-\infty}^t e^{\eta t'} e^{i\omega_{ni} t'} dt' = -\frac{i}{\hbar} V_{ni} \frac{e^{(\eta+i\omega_{ni})t'}}{n+i\omega_{ni}} \Big|_{-\infty}^t = -\frac{i}{\hbar} V_{ni} \frac{e^{(\eta+i\omega_{ni})t}}{\eta+i\omega_{ni}}$$

$$\therefore |c_n(t)|^2 \approx |c_n^{(1)}(t)|^2 = \frac{|V_{ni}|^2}{\hbar^2} \frac{e^{2\eta t}}{\eta^2 + \omega_{ni}^2} \text{ e nestas condições:}$$

$$\frac{d}{dt} |c_n(t)|^2 = 2 \frac{|V_{ni}|^2}{\hbar^2} \left(\frac{\eta e^{2\eta t}}{\eta^2 + \omega_{ni}^2} \right).$$

Em seguida, tomaremos o limite $\eta \rightarrow 0$.

Deslocamento de energia e largura de decaimento

Lembrando que $\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\eta}{\eta^2 + \omega_{ni}^2} = \pi \delta(\omega_{ni})$,

temos $\frac{d}{dt} |c_n(t)|^2 = \frac{2\pi |V_{ni}|^2}{\hbar^2} \delta(\omega_{ni}) = \frac{2\pi |V_{ni}|^2}{\hbar^2} \underbrace{\hbar \delta(E_n - E_i)}_{\delta\left(\frac{E_n - E_i}{\hbar}\right)}$. Ou ainda,

$$\omega_{i \rightarrow n} = \frac{d}{dt} |c_n(t)|^2 = \frac{2\pi}{\hbar} |V_{ni}|^2 \delta(E_n - E_i) \Rightarrow \text{já deduzida Golden Rule}$$

Animados com o resultado, vejamos quanto dá $c_i^{(0)}$, $c_i^{(1)}$, e $c_i^{(2)}$, ou seja $n = i$.

- $c_i^{(0)} = \delta_{ii} = 1$

- $c_i^{(1)} = -\frac{i}{\hbar} V_{ii} \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \int_{t_0}^t e^{\eta t'} dt' = -\frac{i}{\hbar \eta} V_{ii} e^{\eta t}$

- $c_i^{(2)} = \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{-\infty}^t dt' \int_{-\infty}^{t'} dt'' \langle i | V_I(t') V_I(t'') | i \rangle =$
 $= \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \sum_m \int_{-\infty}^t dt' \int_{-\infty}^{t'} dt'' e^{i\omega_{im}t'} V_{im}(t') e^{i\omega_{mi}t''} V_{mi}(t'')$
 $= \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \sum_m |V_{mi}|^2 \int_{-\infty}^t dt' \int_{-\infty}^{t'} dt'' e^{(\eta+i\omega_{im})t'} e^{(\eta+i\omega_{mi})t''}$

Deslocamento de energia e largura de decaimento

$$\begin{aligned}
 c_i^{(2)} &= \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \sum_m |V_{mi}|^2 \int_{-\infty}^t dt' \int_{-\infty}^{t'} dt'' e^{(\eta+i\omega_{im})t'} e^{(\eta+i\omega_{mi})t''} \\
 &= \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \sum_m |V_{mi}|^2 \int_{-\infty}^t dt' e^{(\eta+i\omega_{im})t'} \frac{e^{(\eta+i\omega_{mi})t'}}{\eta+i\omega_{mi}} \Big|_{-\infty}^{t'} = \\
 &= \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \sum_m \frac{|V_{mi}|^2}{\eta+i\omega_{mi}} \int_{-\infty}^t dt' e^{2\eta t'} = \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \sum_m \frac{|V_{mi}|^2}{\eta+i\omega_{mi}} \frac{e^{2\eta t}}{2\eta} \Big|_{-\infty}^t = \\
 &= \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \sum_m \frac{|V_{mi}|^2}{\eta+i\omega_{mi}} \frac{e^{2\eta t}}{2\eta} = \\
 &= \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 |V_{ii}|^2 \frac{e^{2\eta t}}{2\eta^2} + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \sum_{m \neq i} \frac{|V_{mi}|^2}{\eta+i\omega_{mi}} \frac{e^{2\eta t}}{2\eta} = \\
 &= \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 |V_{ii}|^2 \frac{e^{2\eta t}}{2\eta^2} + \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \sum_{m \neq i} \frac{|V_{mi}|^2}{i\hbar(\eta+i\frac{(E_n-E_i)}{\hbar})} \frac{e^{2\eta t}}{2\eta} = \\
 &= \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 |V_{ii}|^2 \frac{e^{2\eta t}}{2\eta^2} + \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \sum_{m \neq i} \frac{|V_{mi}|^2 e^{2\eta t}}{2\eta(E_i - E_n + i\hbar\eta)}
 \end{aligned}$$

Juntando tudo em $c_i(t) = c_i^{(0)} + c_i^{(1)} + c_i^{(2)}$, teremos:

$$c_i(t) = 1 - \frac{i}{\hbar\eta} V_{ii} e^{\eta t} + \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^2 |V_{ii}|^2 \frac{e^{2\eta t}}{2\eta^2} + \left(\frac{-i}{\hbar}\right) \sum_{m \neq i} \frac{|V_{mi}|^2 e^{2\eta t}}{2\eta(E_i - E_n + i\hbar\eta)}$$

Deslocamento de energia e largura de decaimento

A partir de

$$c_i(t) = 1 - \frac{i}{\hbar\eta} V_{ii} e^{\eta t} + \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^2 |V_{ii}|^2 \frac{e^{2\eta t}}{2\eta^2} + \left(\frac{-i}{\hbar}\right) \sum_{m \neq i} \frac{|V_{mi}|^2 e^{2\eta t}}{2\eta(E_i - E_n + i\hbar\eta)},$$

calcularemos $\dot{c}_i(t)$ e a razão $\frac{\dot{c}_i(t)}{c_i(t)}$ (isso permitirá definir tempo de vida).

$$\dot{c}_i(t) = \frac{dc_i}{dt} = -\frac{i}{\hbar} V_{ii} e^{\eta t} + \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^2 |V_{ii}|^2 \frac{e^{2\eta t}}{\eta} + \left(\frac{-i}{\hbar}\right) \sum_{m \neq i} \frac{|V_{mi}|^2 e^{2\eta t}}{(E_i - E_n + i\hbar\eta)} \text{ com isso}$$

$$\frac{\dot{c}_i(t)}{c_i(t)} \approx \frac{\dot{c}_i(t)}{1 - \frac{i}{\hbar\eta} V_{ii}} \text{ jogamos fora termos } \mathcal{O}(V^3) \text{ e ordens superiores, além de}$$

considerar $e^{\eta t} \approx 1$. Supondo a perturbação, V , pequena, podemos escrever:

$$\frac{\dot{c}_i(t)}{c_i(t)} = \dot{c}_i(t) \left(1 + \frac{i}{\hbar\eta} V_{ii}\right). \text{ Substituindo a expressão de } \dot{c}_i(t), \text{ tomando } e^{2\eta t} \approx 1$$

e mantendo os termos até 2a. ordem em V , temos:

$$\frac{\dot{c}_i(t)}{c_i(t)} = -\frac{i}{\hbar} V_{ii} + \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^2 \frac{|V_{ii}|^2}{\eta} + \left(\frac{-i}{\hbar}\right) \sum_{m \neq i} \frac{|V_{mi}|^2}{(E_i - E_n + i\hbar\eta)} - \frac{i}{\hbar} V_{ii} \frac{i}{\hbar\eta} V_{ii} + \mathcal{O}(V^3)$$

$$\therefore \frac{\dot{c}_i(t)}{c_i(t)} = -\frac{i}{\hbar} V_{ii} + \left(\frac{-i}{\hbar}\right) \sum_{m \neq i} \frac{|V_{mi}|^2}{(E_i - E_n + i\hbar\eta)} \text{ (correta até 2a ordem)}$$

Deslocamento de energia e largura de decaimento

Supondo que o lado direito de $\frac{\dot{c}_i(t)}{c_i(t)} = -\frac{i}{\hbar}V_{ii} + \left(\frac{-i}{\hbar}\right) \sum_{m \neq i} \frac{|V_{mi}|^2}{(E_i - E_n + i\hbar\eta)}$

não depende do tempo, a solução da equação deve ser do tipo $c_i(t) = e^{-i\Delta_i t/\hbar}$

com $\Delta_i = V_{ii} + \sum_{m \neq i} \frac{|V_{mi}|^2}{(E_i - E_n + i\hbar\eta)}$, independente do tempo, mas um número

complexo (denominador do 2o. termo). Para entender fisicamente, o significado de Δ_i , considere o estado inicial no enfoque de interação $|i\rangle_I \xrightarrow{t} \left(\underbrace{e^{-i\Delta_i t/\hbar}}_{\substack{\downarrow \\ \text{evolui conforme } c_i(t)}}} |i\rangle_I \right)$

Sabendo que $|\alpha, t_0; t\rangle_I = e^{+iH_0 t/\hbar} |\alpha, t_0; t\rangle_S$, podemos escrever:

$$|\alpha, t_0; t\rangle_S = e^{-iH_0 t/\hbar} |\alpha, t_0; t\rangle_I \rightarrow \left(e^{-iH_0 t/\hbar} e^{-i\Delta_i t/\hbar} |i\rangle_I \right) \implies e^{-i\Delta_i t/\hbar} e^{-iH_0 t/\hbar} |i\rangle$$

$$|i\rangle_I(0) = |i\rangle_S = |i\rangle$$

assim, o ket de Schrödinger evolui como $e^{-i\Delta_i t/\hbar} e^{-iH_0 t/\hbar} |i\rangle = e^{-i\Delta_i t/\hbar} e^{-iE_i t/\hbar} |i\rangle$

e como deveria ser $e^{-iEt/\hbar} |i\rangle$ reconhecemos o nosso Δ_i da teoria de perturbação

independente do tempo com $E = E_i + \Delta_i$ e $\Delta_i = \Delta_i^{(1)} + \Delta_i^{(2)}$ (caixa azul)

Deslocamento de energia e largura de decaimento

Tem uma diferença com a teoria de perturbação independente do tempo que é

o aparecimento de uma componente complexa em $\Delta_i^{(2)} = \sum_{m \neq i} \frac{|V_{mi}|^2}{(E_i - E_m + i\hbar\eta)}$.

Isto tem a ver com o fato que não exigimos que E_i fosse não-degenerado.

Considerando que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{x + i\epsilon} = Pr \frac{1}{x} - i\pi\delta(x)$, podemos escrever $\Delta_i^{(2)}$ como

$$\Delta_i^{(2)} = Pr \sum_{m \neq i} \frac{|V_{mi}|^2}{(E_i - E_m)} + i \left(-\pi \sum_{m \neq i} |V_{mi}|^2 \delta(E_i - E_m) \right)$$

A parte real evita

a degenerescência e a parte imaginária lembra a Golden Rule, pois

$$\sum_{m \neq i} \omega_{i \rightarrow m} = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{m \neq i} |V_{mi}|^2 \delta(E_i - E_m) = -\frac{2}{\hbar} Im[\Delta_i^{(2)}]$$

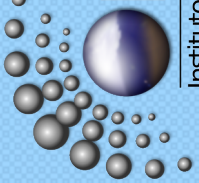
Assim, $c_i(t) = e^{-\frac{i}{\hbar} \Delta_i t} = e^{-\frac{i}{\hbar} Re[\Delta_i]t + \frac{1}{\hbar} Im[\Delta_i]t}$. Se definirmos $\frac{\Gamma_i}{\hbar} = \frac{-2}{\hbar} Im[\Delta_i]$,

podemos escrever $c_i(t) = e^{-\frac{i}{\hbar} Re[\Delta_i]t - \frac{\Gamma_i}{2\hbar} t}$ e $\therefore |c_i(t)|^2 = e^{-\frac{\Gamma_i}{\hbar} t}$, ou seja, Γ_i diz

a taxa que $|c_i(t)|^2$ desaparece e $\tau \equiv \frac{\hbar}{\Gamma_i}$ é o “tempo de vida” de $|i\rangle$. Note que

$$|c_i(t)|^2 + \sum_{m \neq i} |c_m(t)|^2 = \underbrace{1 - \frac{\Gamma_i}{\hbar} t}_{\text{Isso vale para } t \text{ pequeno!}} + \sum_{m \neq i} \omega_{i \rightarrow m} t = 1 - \frac{\Gamma_i}{\hbar} t + \frac{\Gamma_i}{\hbar} t = 1$$

Isso vale para t pequeno!



Deslocamento de energia e largura de decaimento

A quantidade $\Gamma_i = \frac{-2}{\hbar} \text{Im}[\Delta_i]$ é chamada de “largura” de decaimento. Para entender a razão disto, considere uma distribuição de energia $f(E)$, tal que

$$\int dE f(E) e^{-\frac{i}{\hbar} E t} = e^{-i \frac{(E_i + \text{Re}[\Delta_i])}{\hbar} t - \frac{\Gamma_i}{2\hbar} t} \Theta(t) \quad \text{onde } \Theta(t) \begin{cases} 0 & \text{p/ } t \leq 0 \\ 1 & \text{p/ } t > 0 \end{cases}$$

Tome a transformada de Fourier, ou seja multiplique por $e^{+\frac{i}{\hbar} E' t}$ e integre em t de $-\infty$ a ∞ .

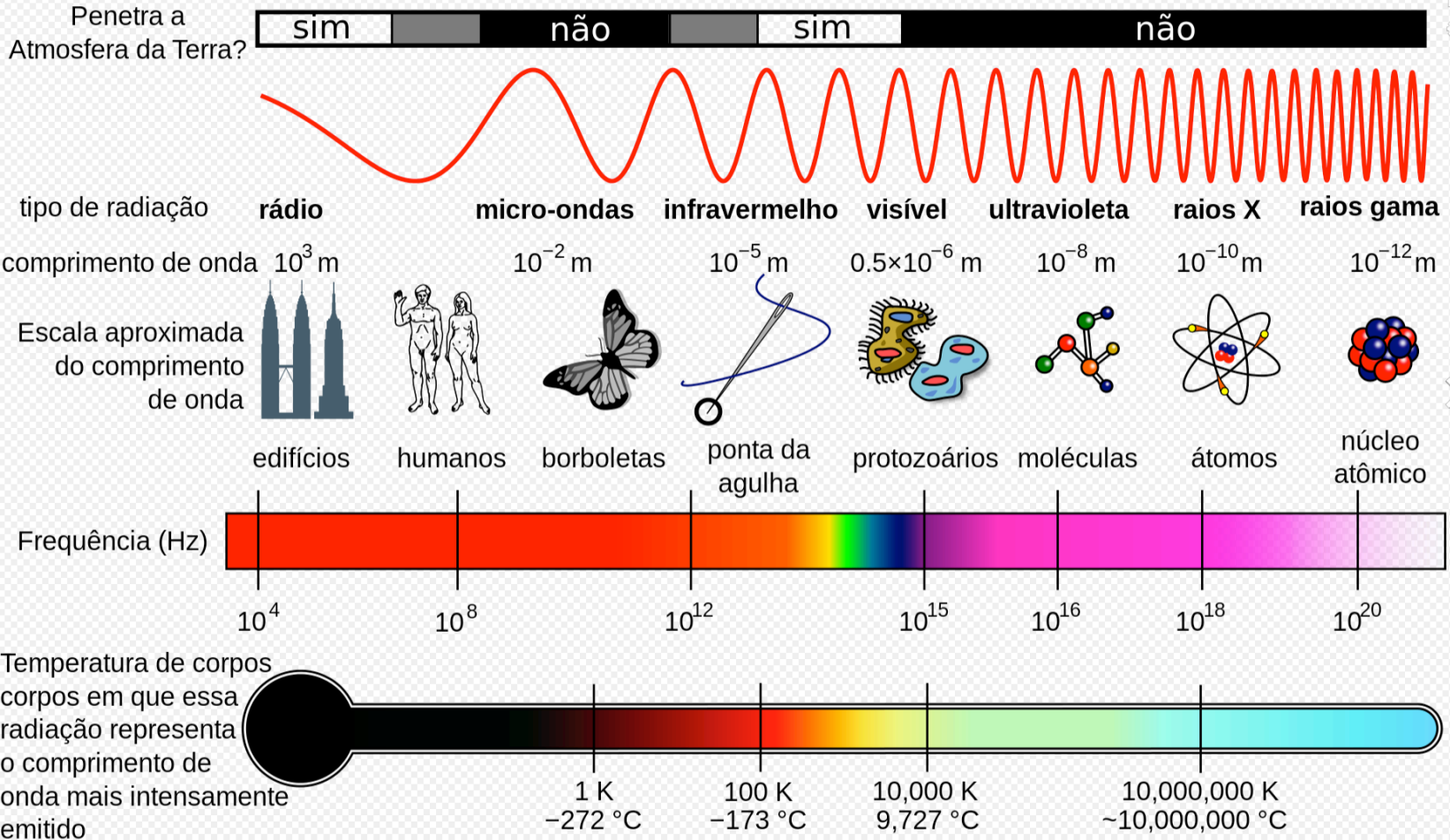
$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{+\frac{i}{\hbar} E' t} \int dE f(E) e^{-\frac{i}{\hbar} E t} = \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{+\frac{i}{\hbar} E' t} e^{-i \frac{(E_i + \text{Re}[\Delta_i])}{\hbar} t - \frac{\Gamma_i}{2\hbar} t} \Theta(t)$$

$$\int dE f(E) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-\frac{i}{\hbar} (E - E') t}}_{\propto \delta(E - E')} = \underbrace{\int_0^{+\infty} dt e^{+\frac{i}{\hbar} E' t} e^{-i \frac{(E_i + \text{Re}[\Delta_i])}{\hbar} t - \frac{\Gamma_i}{2\hbar} t}}_{\frac{-\hbar/i}{E' - (E_i + \text{Re}[\Delta_i]) + i \frac{\Gamma_i}{2}}}$$

$$f(E') \propto \frac{1}{E' - (E_i + \text{Re}[\Delta_i]) + i \frac{\Gamma_i}{2}} \Rightarrow |f(E')|^2 \propto \frac{1}{(E' - (E_i + \text{Re}[\Delta_i]))^2 + \frac{\Gamma_i^2}{4}}$$

Distribuição de energia centrada em $E' = E_i + \text{Re}[\Delta_i]$ com largura $\frac{\Gamma_i}{2}$.

Mostre que $|f(E')|^2 = \frac{1}{2} |f(E'_{\text{max}})|^2$ para $E' = E_i + \text{Re}[\Delta_i] \pm \frac{\Gamma_i}{2}$



Espectro Eletromagnético

Khemis - Obra do próprio

Espectro eletromagnético

Sobre esta interface | Discussão | Ajuda

Mais detalhes

CC BY-SA 4.0

File: Espectro EM pt.svg

Criação: 12 de julho de 2015

slide 10

- $\tau \equiv \frac{\hbar}{\Gamma_i}$ expressa uma relação de incerteza $\Delta E \Delta t = \hbar$

A origem do termo aproximação de dipolo elétrico pode ser visto na chamada expansão multipolar de um potencial devido a uma densidade de carga $\rho(\mathbf{x}')$

$$\Phi(\mathbf{x}) = \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 x' \quad \text{com} \quad \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = 4\pi \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{1}{2\ell+1} \frac{r_{<}^{\ell}}{r_{>}^{\ell+1}} Y_{\ell m}^*(\theta', \phi') Y_{\ell m}(\theta, \phi)$$

comparado com

$$\Phi(\mathbf{x}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{4\pi}{2\ell+1} q_{\ell m} \frac{Y_{\ell m}(\theta, \phi)}{r^{\ell+1}} \Rightarrow q_{\ell m} = \int Y_{\ell m}^*(\theta', \phi') r'^{\ell} \rho(\mathbf{x}') d^3 x'$$

Os $q_{\ell m}$ são chamados de momentos multipolares:

$$1) \text{ monopolo elétrico - carga } (q) \rightarrow q_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int \rho(\mathbf{x}') d^3 x' = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} q$$

$$2) \text{ dipolo elétrico } (p) \rightarrow \begin{cases} q_{11} = -\frac{3}{\sqrt{8\pi}} \int (x' - iy') \rho(\mathbf{x}') d^3 x' = -\frac{3}{\sqrt{8\pi}} (p_x - ip_y) \\ q_{10} = \frac{3}{\sqrt{4\pi}} \int z' \rho(\mathbf{x}') d^3 x' = \frac{3}{\sqrt{4\pi}} p_z \end{cases}$$

$$3) \text{ quadrupolo elétrico } (Q) \begin{cases} q_{20} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \int (3z'^2 - r'^2) \rho(\mathbf{x}') d^3 x' = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} Q_{33} \\ \dots \end{cases}$$

Veja Jackson pag. 136.