

Teoria de Espalhamento

Para estudar o problema de espalhamento de uma partícula por um potencial, obteremos a forma integral da Equação de Schrödinger, conhecida por Equação de Lippmann-Schwinger. Para tanto, comece definindo:

$$H = H_0 + V, \text{ onde } \begin{cases} H_0 = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \rightarrow \text{é a Hamiltoniana da partícula livre} \\ V \rightarrow \text{é o potencial espalhador.} \end{cases}$$

Conhecemos as soluções na ausência de V

$$H_0|\phi\rangle = E|\phi\rangle \begin{cases} |\phi\rangle = |\mathbf{k}'\rangle \rightarrow \langle \mathbf{r}' | \mathbf{k}' \rangle = \frac{e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}'}}{(2\pi)^{3/2}} \text{ e } \langle \mathbf{k}'' | \mathbf{k}' \rangle = \delta(\mathbf{k}'' - \mathbf{k}') \\ E = \frac{\hbar^2 \mathbf{k}'^2}{2m} \rightarrow \text{note degenerescência infinita} \end{cases}$$

Quando $V \neq 0$, queremos a solução de $(H_0 + V)|\Psi\rangle = \underbrace{E}_{\text{mesma energia}} |\Psi\rangle$

mesma energia

Usaremos estratégia já utilizada em teoria de perturbação de inverter $(E - H_0)$ e obter uma equação para $|\Psi\rangle$ que tenha a condição de contorno embutida nela. Para tanto, primeiro escrevemos:

$$(E - H_0)|\Psi\rangle = V|\Psi\rangle \text{ que quando invertida fornece } |\Psi\rangle = \frac{1}{E - H_0} V|\Psi\rangle$$

Como na teoria de perturbação, falta algo, pois se $V = 0 \Rightarrow |\Psi\rangle = 0$.

Teoria de Espalhamento

Antes de inverter, precisamos “somar” a solução da partícula livre em $|\Psi\rangle$, isto é $(E - H_0)(|\Psi\rangle - |\phi\rangle) = V|\Psi\rangle$. Isso vale, pois $|\phi\rangle$ é solução de

$$(E - H_0)|\phi\rangle = 0. \text{ Com isso, a inversão fornece } |\Psi\rangle = |\phi\rangle + \frac{1}{E - H_0}V|\Psi\rangle.$$

Agora, quando $V = 0$, temos $|\Psi\rangle = |\phi\rangle$ e isso pode ser entendido como a condição de contorno do problema: na ausência de V a partícula é livre e é descrita por uma onda plana com momento linear $\mathbf{p}' = \hbar\mathbf{k}'$.

Ainda temos um problema: como a energia E é a mesma, com e sem potencial, temos um infinito devido ao zero no denominador. Para ser removido, é preciso utilizar estratégia semelhante a que usamos em teoria de perturbação dependente do tempo (onde obtivemos $i\epsilon$, com ϵ real, somado ao denominador). Feito isso, a equação de Lippmann-Schwinger fica:

$$|\Psi\rangle = |\phi\rangle + \frac{1}{E - H_0 \pm i\epsilon}V|\Psi\rangle$$

Veremos, em seguida, que a presença de ϵ , além de remover o infinito, permitirá definir as condições assintóticas adequadas do problema de espalhamento.

Na representação das coordenadas a equação de Lippmann-Schwinger fica:

$$\langle \mathbf{x} | \Psi \rangle = \langle \mathbf{x} | \phi \rangle + \int d^3 x' \langle \mathbf{x} | \frac{1}{E - H_0 \pm i\epsilon} | \mathbf{x}' \rangle \langle \mathbf{x}' | V | \Psi \rangle, \text{ com } \langle \mathbf{x} | \phi \rangle = \langle \mathbf{x}' | \mathbf{k}' \rangle = \frac{e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}'}}{(2\pi)^{3/2}}.$$

O livro texto usa a normalização da caixa (aresta L) e define $\langle \mathbf{x}' | \mathbf{k}' \rangle = \frac{e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}'}}{L^{3/2}}$

Nossa tarefa nesta aula é obter $G_{\pm}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{\hbar^2}{2m} \langle \mathbf{x} | \frac{1}{E - H_0 \pm i\epsilon} | \mathbf{x}' \rangle$, que pode ser re-escrito com auxílio do operador unidade, como:

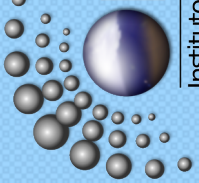
$$G_{\pm}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{\hbar^2}{2m} \int d^3 k' \int d^3 k'' \langle \mathbf{x} | \mathbf{k}' \rangle \langle \mathbf{k}' | \frac{1}{E - H_0 \pm i\epsilon} | \mathbf{k}'' \rangle \langle \mathbf{k}'' | \mathbf{x}' \rangle. \text{ Usando que}$$

$$\langle \mathbf{k}' | \frac{1}{E - H_0 \pm i\epsilon} | \mathbf{k}'' \rangle = \frac{1}{E - \frac{\hbar^2 \mathbf{k}'^2}{2m} \pm i\epsilon} \langle \mathbf{k}' | \mathbf{k}'' \rangle = \frac{\delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k}'')}{E - \frac{\hbar^2 \mathbf{k}'^2}{2m} \pm i\epsilon}, \text{ escrevemos:}$$

$$G_{\pm}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{\hbar^2}{2m} \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{k}' \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}}{E - \frac{\hbar^2 \mathbf{k}'^2}{2m} \pm i\epsilon}. \text{ Se usarmos } E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \text{ e } \mathbf{k}' \equiv \mathbf{q}, \text{ temos:}$$

$$G_{\pm}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 q \frac{e^{i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}}{k^2 - q^2 \pm i\epsilon} \text{ onde } \epsilon \text{ foi redefinido. Para fazer esta}$$

integral, escolhemos $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$ na direção $\hat{\mathbf{z}}$ e tomamos $d^3 q = q^2 \sin \theta d\theta d\varphi dq$.



Teoria de Espalhamento

E assim:
$$G_{\pm}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{\infty} dq q^2 \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} \underbrace{\int_0^{\pi} d\theta \sin \theta}_{\int_1^{-1} -d(\cos \theta) \rightarrow \int_{-1}^1 d(\cos \theta)} \frac{e^{i|\mathbf{q}||(\mathbf{x}-\mathbf{x}')| \cos \theta}}{k^2 - q^2 \pm i\epsilon}$$

$$\begin{aligned} G_{\pm}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{\infty} dq \frac{q^2}{k^2 - q^2 \pm i\epsilon} \int_{-1}^1 d\zeta e^{iq|(\mathbf{x}-\mathbf{x}')|\zeta} \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{\infty} dq \frac{q^2}{k^2 - q^2 \pm i\epsilon} \left. \frac{e^{iq|(\mathbf{x}-\mathbf{x}')|\zeta}}{iq|(\mathbf{x}-\mathbf{x}')|} \right|_{-1}^{+1} \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{i|(\mathbf{x}-\mathbf{x}')|} \int_0^{\infty} dq \underbrace{\frac{q}{k^2 - q^2 \pm i\epsilon}}_{\text{ímpar em } q} \underbrace{\left(e^{iq|(\mathbf{x}-\mathbf{x}')|} - e^{-iq|(\mathbf{x}-\mathbf{x}')|} \right)}_{\text{ímpar em } q} \end{aligned}$$

O integrando é par em q , pois: *ímpar em q* e *ímpar em q*

e assim podemos trocar a \int_0^{∞} por $\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty}$ e com isso obter:

$$G_{\pm}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\frac{1}{8\pi^2} \frac{1}{i|(\mathbf{x}-\mathbf{x}')|} \int_{-\infty}^{+\infty} dq \underbrace{\frac{q}{q^2 - k^2 \mp i\epsilon}}_{\text{mudei de ordem}} \left(e^{+iq|(\mathbf{x}-\mathbf{x}')|} - e^{-iq|(\mathbf{x}-\mathbf{x}')|} \right)$$

mudei de ordem

Estamos prontos para integração no plano complexo. Note os polos.

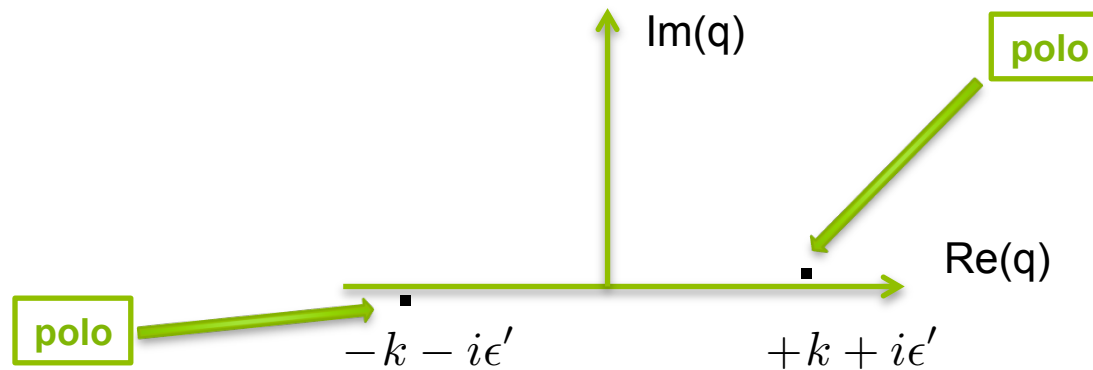
Teoria de Espalhamento

Os polos do integrando são definidos por $q^2 - k^2 \mp i\epsilon = 0 \Rightarrow q^2 = k^2 \pm i\epsilon$ ou

melhor $q = \pm \sqrt{k^2 \pm i\epsilon} = \pm k \sqrt{1 \pm i \frac{\epsilon}{k^2}} = \pm(k \pm i\epsilon')$. Onde $\epsilon' = \frac{\epsilon}{2k^2}$. Note

que o $+i\epsilon$ original corresponde à $\begin{cases} +k + i\epsilon' \\ -k - i\epsilon' \end{cases}$ e o $-i\epsilon$ à $\begin{cases} +k - i\epsilon' \\ -k + i\epsilon' \end{cases}$

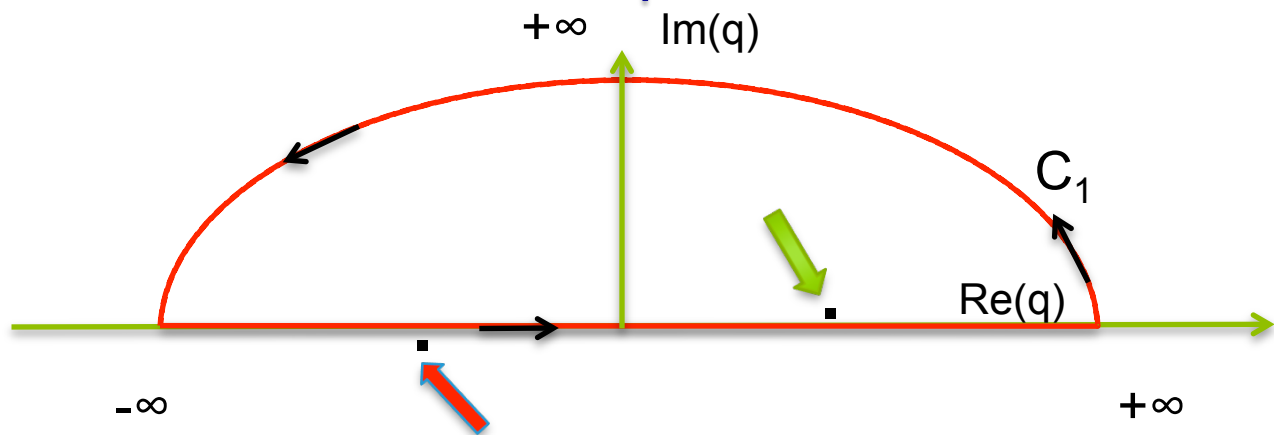
Os pontos negros na figura abaixo representam os polos no caso $+i\epsilon$



A integral $e^{+iq|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} = e^{+iRe(q)|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \cdot e^{-Im(q)|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}$ deve ser fechada por cima, pois a exponencial com $Im(q)$ garante contribuição zero e isso permite fechar o circuito e obter a mesma integral que antes. Argumento semelhante sugere que $e^{-iq|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} = e^{-iRe(q)|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \cdot e^{+Im(q)|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}$ deve ser fechada por

baixo. $\frac{q}{q^2 - k^2 \mp i\epsilon}$ fornece integrando zero para $Re(q) = \pm\infty$.

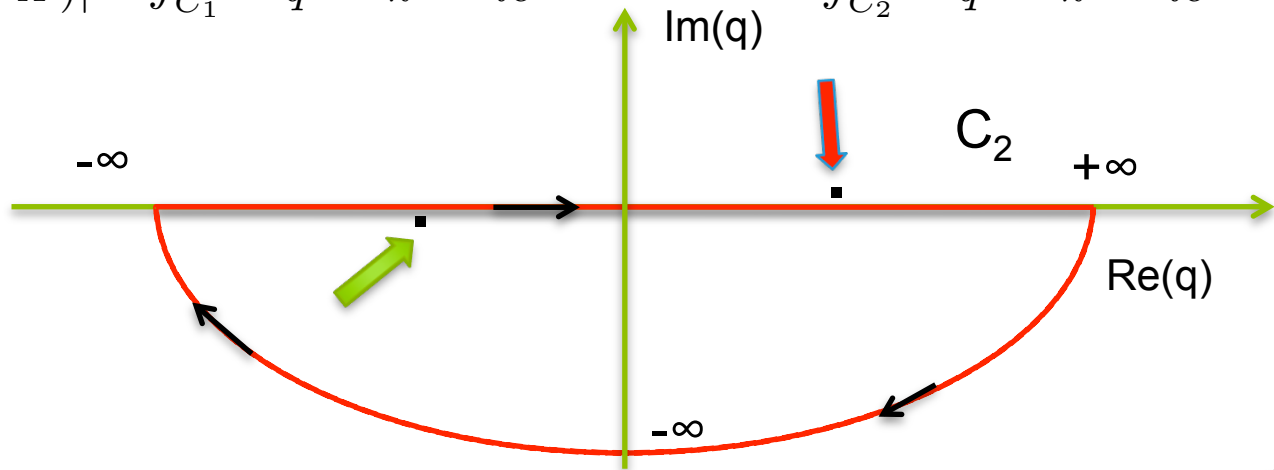
Teoria de Espalhamento



o sinal + é para lembrar que estamos analisando o caso $+i\epsilon$ original.

$$G_+(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{-1}{8\pi^2} \frac{1}{i|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \int_{-\infty}^{+\infty} dq \frac{q}{q^2 - k^2 - i\epsilon} \left(e^{+iq|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} - e^{-iq|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) =$$

$$\frac{-1}{8\pi^2} \frac{1}{i|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \left(\oint_{C_1} dq \frac{q}{q^2 - k^2 - i\epsilon} e^{+iq|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} - \oint_{C_2} dq \frac{q}{q^2 - k^2 - i\epsilon} e^{-iq|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right)$$



Teoria de Espalhamento

Para aplicar o Teorema de Cauchy (cálculo IV): $\oint \frac{f(z)}{z - z_i} dz = 2\pi i f(z_i)$,

onde z_i é um polo no plano complexo e a integração fechada (que circula z_i) corre no sentido anti-horário do circuito, precisamos fazer uma modificação na expressão de G .

Usaremos que $\frac{1}{q^2 - k^2} = \frac{1}{(q - k)(q + k)} = \left(\frac{1}{q - k} + \frac{1}{q + k}\right) \frac{1}{2q}$ para escrever

$$\begin{aligned}
 G_+(\mathbf{x}, \mathbf{x}') &= -\frac{1}{8\pi^2} \frac{1}{i|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \oint_{C_1} dq \frac{q}{q^2 - k^2 - i\epsilon} e^{+iq|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \\
 &+ \frac{1}{8\pi^2} \frac{1}{i|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \oint_{C_2} dq \frac{q}{q^2 - k^2 - i\epsilon} e^{-iq|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \\
 &= -\frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{i|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \left(\underbrace{\oint_{C_1} dq \frac{e^{+iq|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}}{q - k}}_{\text{contribui}} + \underbrace{\oint_{C_1} dq \frac{e^{+iq|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}}{q + k}}_{\text{não contribui}} \right) + \\
 &+ \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{i|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \left(\underbrace{\oint_{C_2} dq \frac{e^{-iq|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}}{q - k}}_{\text{não contribui}} + \underbrace{\oint_{C_2} dq \frac{e^{-iq|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}}{q + k}}_{\text{contribui}} \right)
 \end{aligned}$$

Teoria de Espalhamento

Assim, G (uma função de Green) para o caso $+i\epsilon$ (original) fica:

$$G_+(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{+ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}$$

Se repetíssemos todo o procedimento para $-i\epsilon$, obteríamos

$$\underbrace{G_-}_{o -}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{-ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \quad \text{faça a conta}$$

o - é para lembrar que é o caso $-i\epsilon$.

Assim, a equação de Lippman-Schwinger pode ser escrita por:

$$\langle \mathbf{x} | \Psi^{(\pm)} \rangle = \langle \mathbf{x} | \phi \rangle - \frac{2m}{\hbar^2} \int d^3x' \frac{1}{4\pi} \frac{e^{\pm ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \langle \mathbf{x}' | V | \Psi^{(\pm)} \rangle$$

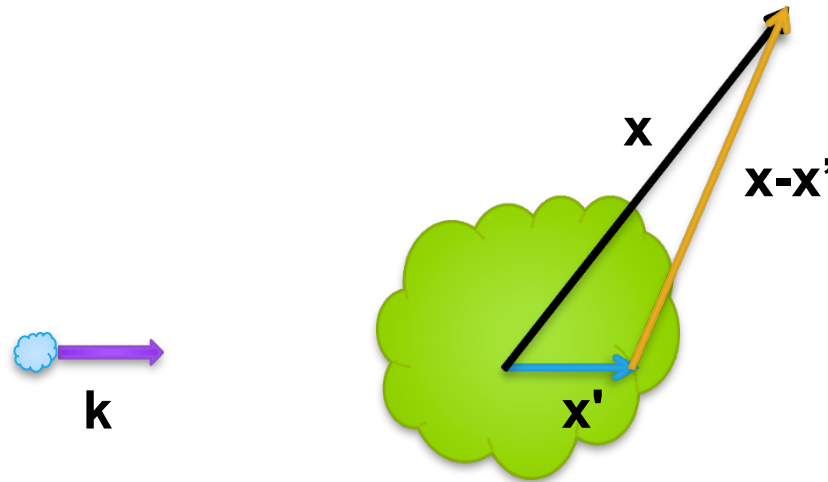
Se $\langle \mathbf{x}' | V | \mathbf{x}'' \rangle = V(\mathbf{x}') \delta^{(3)}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'')$ (potencial local), temos:

$$\langle \mathbf{x} | \Psi^{(\pm)} \rangle = \langle \mathbf{x} | \phi \rangle - \frac{2m}{\hbar^2} \int d^3x' \frac{1}{4\pi} \frac{e^{\pm ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} V(\mathbf{x}') \langle \mathbf{x}' | \Psi^{(\pm)} \rangle$$

Será que esta equação fornece a condição assintótica adequada?

Amplitude de Espalhamento

Suponha um observador longe do alvo. Como é a função de onda lá, em \mathbf{x} ?



a região verde é a região onde $V(\mathbf{x}') \neq 0$. Note que a equação de Lippman-

Schwinger
$$\langle \mathbf{x} | \Psi^{(\pm)} \rangle = \langle \mathbf{x} | \phi \rangle - \frac{2m}{\hbar^2} \int d^3x' \frac{1}{4\pi} \frac{e^{\pm ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} V(\mathbf{x}') \langle \mathbf{x}' | \Psi^{(\pm)} \rangle$$

nos ensina que só esta região interessa na integração. Se o observador estiver longe o suficiente, temos $|\mathbf{x}| \gg |\mathbf{x}'|$ e podemos expandir $|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|$ da seguinte

forma
$$|\mathbf{x}-\mathbf{x}'| = \sqrt{(\mathbf{x}-\mathbf{x}')^2} = \sqrt{\mathbf{x}^2 - 2\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}' + \mathbf{x}'^2} = x \sqrt{1 - 2\hat{\mathbf{x}}\cdot\left(\frac{\mathbf{x}'}{x}\right) + \left(\frac{x'}{x}\right)^2}$$

$$\approx x \left(1 - \hat{\mathbf{x}}\cdot\left(\frac{\mathbf{x}'}{x}\right)\right). \text{ Usaremos } \begin{cases} e^{\pm ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \approx e^{\pm ikx} e^{\mp ik\hat{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{x}'} \\ |\mathbf{x}-\mathbf{x}'| \approx x \text{ (no denominador)} \end{cases}$$

Aponta na direção do observador

Amplitude de Espalhamento

Definindo $\mathbf{k}' = k\hat{\mathbf{x}}$ a equação de Lippman-Schwinger fica (caso +)

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x} | \Psi^{(+)} \rangle &\xrightarrow{x \rightarrow \infty} \langle \mathbf{x} | \phi \rangle - \frac{2m}{\hbar^2} \frac{e^{+ikx}}{4\pi x} (2\pi)^{3/2} \int d^3x' \frac{e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}'}}{(2\pi)^{3/2}} V(\mathbf{x}') \langle \mathbf{x}' | \Psi^{(+)} \rangle \\ &= \frac{e^{+i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}}{(2\pi)^{3/2}} - \frac{2m}{\hbar^2} \frac{e^{+ikx}}{4\pi x} (2\pi)^{3/2} \int d^3x' \frac{e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}'}}{(2\pi)^{3/2}} V(\mathbf{x}') \langle \mathbf{x}' | \Psi^{(+)} \rangle = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left(e^{+i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} - \frac{2m}{\hbar^2} \frac{e^{+ikx}}{4\pi x} (2\pi)^3 \int d^3x' \frac{e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}'}}{(2\pi)^{3/2}} V(\mathbf{x}') \langle \mathbf{x}' | \Psi^{(+)} \rangle \right) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left(e^{+i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} + \frac{e^{+ikx}}{x} \left(-\frac{4\pi^2 m}{\hbar^2} \int d^3x' \frac{e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}'}}{(2\pi)^{3/2}} V(\mathbf{x}') \langle \mathbf{x}' | \Psi^{(+)} \rangle \right) \right) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left(e^{+i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} + f(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \frac{e^{+ikx}}{x} \right) \text{ com} \end{aligned}$$

$$f(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \equiv -\frac{4\pi^2 m}{\hbar^2} \int d^3x' \frac{e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}'}}{(2\pi)^{3/2}} V(\mathbf{x}') \langle \mathbf{x}' | \Psi^{(+)} \rangle = -\frac{4\pi^2 m}{\hbar^2} \langle \mathbf{k}' | V | \underbrace{\Psi_{\mathbf{k}}^{(+)}} \rangle$$

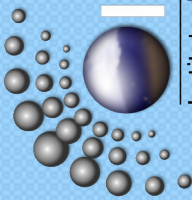
mudança de notação para lembrar que a partícula chega com momento $\hbar\mathbf{k}$.

Note que $\langle \mathbf{k}' |$ é o bra do ket $|\mathbf{k}'\rangle = |\phi_{\mathbf{k}'}\rangle$ (onda plana na direção \mathbf{k}' , que “leva” a partícula até o observador). A matemática nos trouxe até aqui.

saí com \mathbf{k}'

chega com \mathbf{k}

Qual o significado físico de $f(\mathbf{k}', \mathbf{k})$?



Outras formas de escrever a Amplitude de Espalhamento

Antes é importante notar que a amplitude de espalhamento pode ser escrita de outras formas. Para ver isso, considere a equação de Lippmann-Schwinger na sua forma geral

$$|\Psi_{\mathbf{k}}^{(\pm)}\rangle = |\mathbf{k}\rangle + G^{(\pm)}V|\Psi_{\mathbf{k}}^{(\pm)}\rangle$$

[ver slide 2](#)

Multiplique a equação para $|\Psi_{\mathbf{k}}^{(-)}\rangle$ por V e tome o adjunto Hermiteano

$$(V|\Psi_{\mathbf{k}}^{(-)}\rangle)^{\dagger} = (V|\mathbf{k}\rangle + VG^{(-)}V|\Psi_{\mathbf{k}}^{(-)}\rangle)^{\dagger}$$

$$\langle\Psi_{\mathbf{k}}^{(-)}|V = \langle\mathbf{k}|V + \langle\Psi_{\mathbf{k}}^{(-)}|VG^{(+)}V$$

$$\langle\mathbf{k}|V = \langle\Psi_{\mathbf{k}}^{(-)}|(V - VG^{(+)}V)$$

Isto permite re-escrever a amplitude

$$f(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = -\frac{4\pi^2 m}{\hbar^2} \langle\mathbf{k}'|V|\Psi_{\mathbf{k}}^{(+)}\rangle = -\frac{4\pi^2 m}{\hbar^2} \langle\Psi_{\mathbf{k}'}^{(-)}|(V - VG^{(+)}V)|\Psi_{\mathbf{k}}^{(+)}\rangle$$

Mas $(V - VG^{(+)}V)|\Psi_{\mathbf{k}}^{(+)}\rangle = V|\mathbf{k}\rangle \therefore f(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = -\frac{4\pi^2 m}{\hbar^2} \langle\Psi_{\mathbf{k}'}^{(-)}|V|\mathbf{k}\rangle$

Amplitude de Espalhamento

Algumas observações importantes:

- Se $V = 0 \implies f(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = -\frac{4\pi^2 m}{\hbar^2} \langle \mathbf{k}' | V | \Psi_{\mathbf{k}}^{(+)} \rangle = 0$. Dependendo do ângulo que você olha (um observador distante), f pode dar um resultado diferente. Trata-se da amplitude de probabilidade da partícula entrar na direção \mathbf{k} e, devido ao potencial, sair na direção \mathbf{k}' , com $|\mathbf{k}'| = |\mathbf{k}|$.

- A solução assintótica $\langle \mathbf{x} | \Psi^{(+)} \rangle \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left(e^{+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + f(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \frac{e^{+ikx}}{x} \right)$ é solução da equação de Schrödinger na região onde a partícula é livre, $V(\mathbf{x}') = 0$.
- A onda livre deve estar associada a tempos “infinitamente” negativos (antes da colisão) e “infinitamente” positivos (depois da colisão). A onda esférica só para tempos “infinitamente” positivos (depois da colisão).

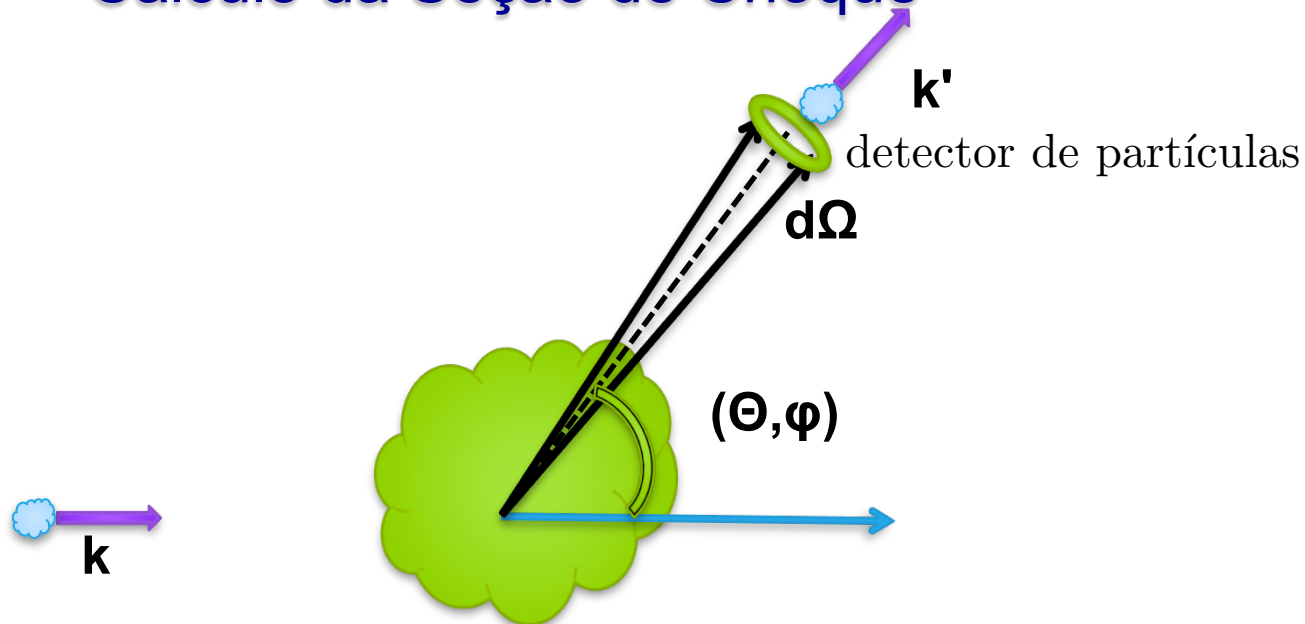
Mostre!

faça?

Em seguida, para desenvolver intuição

- Vamos definir seção de choque
- Olharemos o espalhamento como uma perturbação dependente do tempo
- E vamos analisar o espalhamento de um pacote de ondas dependente no tempo.

Cálculo da Seção de Choque



$$dn \equiv \frac{\text{número de partículas detectadas}}{\text{unidade de tempo}} \propto \begin{cases} \text{fluxo de partículas incidentes } F_i \\ \text{ângulo sólido } d\Omega \end{cases}$$

A constante de proporcionalidade é a chamada seção de choque diferencial:

$$dn = \sigma(\theta, \varphi) F_i d\Omega$$

Diagram illustrating the components of the differential cross-section equation:

- $\frac{\# \text{ partículas}}{\text{tempo}}$ is proportional to dn .
- $\frac{\# \text{ partículas}}{\text{tempo} \times \text{área}}$ is proportional to $\sigma(\theta, \varphi)$.
- $\hat{\text{ângulo sólido}}$ is proportional to $d\Omega$.

Cálculo da Seção de Choque

A Seção de choque pode ser escrita por: $\sigma(\theta, \varphi) = \frac{dn}{F_i d\Omega}$

onde $\begin{cases} F_i \propto J_i \text{ (fluxo de probabilidade)} \\ dn = \mathbf{F}_f \cdot d\mathbf{S} \propto \mathbf{J}_f \cdot d\mathbf{S} \end{cases}$

$$\sigma(\theta, \varphi) = \frac{\mathbf{F}_f \cdot d\mathbf{S}}{F_i d\Omega} = \frac{J_f r^2 d\Omega}{J_i d\Omega} = \frac{J_f r^2}{J_i}$$

Vimos (FI001) que $\mathbf{J} = \frac{1}{m} \text{Re}[\Psi^* \frac{\hbar}{i} \nabla \Psi]$. Para obter $\begin{cases} J_i \text{ use } \Psi = e^{ikz} \\ J_f \text{ use } \Psi = f(\theta, \varphi) \frac{e^{ikr}}{r} \end{cases}$

Assim $\mathbf{J}_i = \frac{1}{m} [e^{-ikz} \frac{\hbar}{i} ik \hat{\mathbf{z}} e^{ikz}] = \frac{\hbar k}{m} \hat{\mathbf{z}}$ e \mathbf{J}_f é obtido, usando ∇ em coordenadas esféricas $\nabla = \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{\theta}} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\boldsymbol{\varphi}} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}$. **Faça isso em casa** e obtenha as

componentes de \mathbf{J}_f $\begin{cases} (J_f)_r = \frac{\hbar k}{m} \frac{1}{r^2} |f(\theta, \varphi)|^2; \\ (J_f)_\theta = \frac{\hbar}{m} \frac{1}{r^3} \text{Re}[\frac{1}{i} f^*(\theta, \varphi) \frac{\partial}{\partial \theta} f(\theta, \varphi)]; \\ (J_f)_\varphi = \frac{\hbar}{m} \frac{1}{r^3 \sin \theta} \text{Re}[\frac{1}{i} f^*(\theta, \varphi) \frac{\partial}{\partial \varphi} f(\theta, \varphi)] \end{cases}$

Note que $r \rightarrow \infty \Rightarrow (J_f)_r \gg (J_f)_\theta$ e $(J_f)_\varphi$ e isso permite obter

$$\sigma(\theta, \varphi) = |f(\theta, \varphi)|^2$$

Partícula chega na direção z e sai na direção (θ, φ) .