

Espalhamento como perturbação dependente do tempo

Para estudar o problema de espalhamento como uma perturbação dependente do tempo, continuamos com

$$H = H_0 + V, \text{ onde } \begin{cases} H_0 = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \rightarrow \text{é a Hamiltoniana da partícula livre} \\ V \rightarrow \text{é o potencial espalhador.} \end{cases}$$

Exceto que agora o potencial é ligado quando a partícula se aproxima e é desligado ao ficar longe o suficiente. Usaremos, como no livro texto, a normalização da caixa

$$H_0|\phi\rangle = E|\phi\rangle \begin{cases} |\phi\rangle = |\mathbf{k}'\rangle \rightarrow \langle \mathbf{r}' | \mathbf{k}' \rangle = \frac{e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}'}}{L^{3/2}} \text{ e } \langle \mathbf{k}'' | \mathbf{k}' \rangle = \delta_{\mathbf{k}'', \mathbf{k}'} \\ E = \frac{\hbar^2 \mathbf{k}'^2}{2m} \end{cases}$$

Do enfoque de interação,

$$U_I(t, t_0) = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t V_I(t') U_I(t', t_0) dt' \begin{cases} U_I(t_0, t_0) = 1 \\ V_I = e^{iH_0 t / \hbar} V e^{-iH_0 t / \hbar} \end{cases}$$

e amplitude de transição do estado $|i\rangle (|\mathbf{k}'\rangle)$ para o estado $|n\rangle (|\mathbf{k}''\rangle)$, dada

$$\text{por } \langle n | U_I(t, t_0) | i \rangle = \delta_{ni} - \frac{i}{\hbar} \sum_m \langle n | V | m \rangle \int e^{i\omega_{nm} t'} \langle m | U_I(t', t_0) | i \rangle$$

Espalhamento como perturbação dependente do tempo

A estratégia para resolver a equação

$$\langle n|U_I(t, t_0)|i\rangle = \delta_{ni} - \frac{i}{\hbar} \sum_m \langle n|V|m\rangle \int e^{i\omega_{nm}t'} \langle m|U_I(t', t_0)|i\rangle$$

- foi: {
- Substituir iterativamente o lado direito em $\langle m|U_I(t', t_0)|i\rangle$. Isto cria uma hierarquia em $\mathcal{O}(V^n)$.
 - Para atender que o potencial começa a ser ligado gradativamente a partir de $t_0 = -\infty$, multiplicávamos V por $e^{\epsilon t}$. No final fazíamos $\epsilon = 0$, o que implicava que o estado inicial mudava a partir de um autoestado de H_0 , sujeito à um potencial constante no tempo.

Agora, no problema de espalhamento, temos que considerar que a condição assintótica deve valer para $t = -\infty$ e $t = +\infty$. Em ambos os tempos, a solução precisa ser solução de H_0 . Assim, repetimos o procedimento de antes, exceto que exigiremos $\epsilon \ll 1/t$, $e^{\epsilon t} \sim 1$ (futuro distante). Ou seja, é preciso primeiro fazer $\epsilon \rightarrow 0$ e depois $t \rightarrow +\infty$. Proporemos uma solução baseada no primeiro termo da série perturbativa, isto é, situação obtida para o caso em que inserimos do lado direito da equação acima a expressão $\langle n|U_I(t, t_0)|i\rangle = \delta_{ni}$ (o $|i\rangle$ evoluído

é ortornormal ao $|n\rangle$): $\langle n|U_I(t, t_0)|i\rangle = \delta_{ni} - \frac{i}{\hbar} \langle n|V|i\rangle \int_{t_0}^t e^{i\omega_{ni}t' + \epsilon t'} dt'$

Espalhamento como perturbação dependente do tempo

Por hipótese, consideraremos que a dependência temporal para o espalhamento deve ter o mesmo formato que o termo de primeira ordem, e com isso trocar V_{ni} por algo mais geral, T_{ni} . Assim, escrevemos:

$$\langle n|U_I(t, t_0)|i\rangle = \delta_{ni} - \frac{i}{\hbar} \langle n|T|i\rangle \int_{t_0}^t e^{i\omega_{ni}t' + \epsilon t'} dt' \quad \text{lousa}$$

Esta amplitude de transição é conhecida por matriz S de espalhamento e fica:

$$\begin{aligned} S_{ni} &\equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \langle n|U_I(t, t_0)|i\rangle \right) = \delta_{ni} - \frac{i}{\hbar} \langle n|T|i\rangle \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega_{ni}t'} dt' = \\ &= \delta_{ni} - 2\pi i \delta(E_n - E_i) T_{ni} \end{aligned}$$

A matriz de espalhamento S tem claramente duas partes, uma na qual o estado final é igual ao estado inicial e outra governada pela matriz T que deve levar em conta o espalhamento.

Taxa de transição e seção de choque. Como fizemos antes, definimos por

taxa de transição a quantidade: $\omega(i \rightarrow n) = \frac{d}{dt} |\langle n|U_I(t, t_0)|i\rangle|^2$. Para $|i\rangle \neq |n\rangle$,

$$\text{temos: } \langle n|U_I(t, -\infty)|i\rangle = -\frac{i}{\hbar} T_{ni} \int_{-\infty}^t e^{i\omega_{ni}t' + \epsilon t'} dt' = -\frac{i}{\hbar} T_{ni} \frac{e^{i\omega_{ni}t + \epsilon t}}{i\omega_{ni} + \epsilon}$$

$$\therefore \omega(i \rightarrow n) = \frac{1}{\hbar^2} |T_{ni}|^2 \frac{2\epsilon e^{2\epsilon t}}{\omega_{ni}^2 + \epsilon^2}, \text{ mas } \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon e^{2\epsilon t}}{\omega_{ni}^2 + \epsilon^2} = \pi \hbar \delta(E_n - E_i)$$

Espalhamento como perturbação dependente do tempo

A expressão $\omega(i \rightarrow n) = \frac{2\pi}{\hbar} |T_{ni}|^2 \delta(E_n - E_i)$ é muito similar à Regra de ouro de Fermi, exceto que T_{ni} aparece no lugar do V_{ni} . Veremos, logo mais, como calcular T_{ni} . Primeiro, vamos ver como ficam as seções de choque dentro deste procedimento. Multiplicando a expressão acima por $\rho(E_n)dE_n$ e integrando

sobre E_n , temos: $\omega(i \rightarrow n) = \frac{mkL^3}{(2\pi)^2 \hbar^3} |T_{ni}|^2 d\Omega$, onde usamos o resultado para

$\rho(E)$, isto é, $\rho = \frac{mk}{\hbar^2} \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 d\Omega$ obtido na aula 10, slide 4. Aplicando a definição de seção de choque da aula passada e lembrando que estamos na normalização

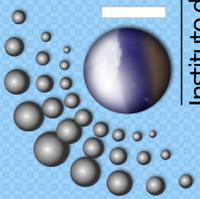
da caixa, temos: $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{mL^3}{2\pi\hbar^2}\right)^2 |T_{ni}|^2$ (note que para obter esse resultado, é

preciso mostrar que o fluxo de probabilidade incidente é $F_i = \frac{\hbar}{m} \frac{k}{L^3} = \frac{v}{L^3}$, onde

$v = \hbar k/m$). Compare isso com o resultado da aula passada $\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\mathbf{k}', \mathbf{k})|^2$ com

$f(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = -\frac{4\pi^2 m}{\hbar^2} \langle \mathbf{k}' | V | \Psi_{\mathbf{k}}^{(+)} \rangle = -\frac{mL^3}{2\pi\hbar^2} \langle \mathbf{k}' | V | \Psi_{\mathbf{k}}^{(+)} \rangle$ (este último com a

normalização da caixa), e conclua: $f(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = \frac{mL^3}{2\pi\hbar^2} T_{ni}$ a menos de fase global.



Vamos agora obter a matriz T , seguindo a estratégia do livro texto. Primeiro, resgate duas equações do 2o.(caixa azul) e 3o.(caixa verde) slides (para $t_0 = -\infty$):

$$1) \langle n|U_I(t, -\infty)|i\rangle = \delta_{ni} - \frac{i}{\hbar} \sum_m V_{nm} \int_{-\infty}^t e^{i\omega_{nm}t' + \epsilon t'} \langle m|U_I(t', -\infty)|i\rangle$$

$$2) \langle n|U_I(t, -\infty)|i\rangle = \delta_{ni} + \frac{1}{\hbar} T_{ni} \frac{e^{i\omega_{ni}t + \epsilon t}}{-\omega_{ni} + i\epsilon}$$

Inclui a dependência temporal do V

Insira a equação 2 (com $n = m$) no lado direito da 1 para obter:

$$\begin{aligned} \langle n|U_I(t, -\infty)|i\rangle &= \delta_{ni} - \frac{i}{\hbar} \sum_m V_{nm} \int_{-\infty}^t e^{i\omega_{nm}t' + \epsilon t'} \left(\delta_{mi} + \frac{1}{\hbar} T_{mi} \frac{e^{i\omega_{mi}t' + \epsilon t'}}{-\omega_{mi} + i\epsilon} \right) = \\ &= \delta_{ni} - \frac{i}{\hbar} V_{ni} \int_{-\infty}^t e^{i\omega_{ni}t' + \epsilon t'} - \frac{i}{\hbar} \frac{1}{\hbar} \sum_m V_{nm} \frac{T_{mi}}{-\omega_{mi} + i\epsilon} \int_{-\infty}^t e^{i\omega_{nm}t' + i\omega_{mi}t' + 2\epsilon t'} = \\ &= \delta_{ni} - \frac{i}{\hbar} V_{ni} \frac{e^{i\omega_{ni}t + \epsilon t}}{+i\omega_{ni} + \epsilon} - \frac{i}{\hbar} \frac{1}{\hbar} \sum_m V_{nm} \frac{T_{mi}}{-\omega_{mi} + i\epsilon} \int_{-\infty}^t e^{i\omega_{ni}t' + 2\epsilon t'} = \\ &= \delta_{ni} + \frac{1}{\hbar} \frac{e^{i\omega_{ni}t + \epsilon t}}{-\omega_{ni} + i\epsilon} \left(V_{ni} + \frac{1}{\hbar} \sum_m V_{nm} \frac{T_{mi} e^{\epsilon t}}{-\omega_{mi} + i2\epsilon} \right). \text{ Tome } e^{\epsilon t} \approx 1 \text{ e compare} \end{aligned}$$

$$\text{com Eq. 2: } T_{ni} = V_{ni} + \frac{1}{\hbar} \sum_m V_{nm} \frac{T_{mi}}{-\omega_{mi} + i2\epsilon} = V_{ni} + \sum_m V_{nm} \frac{T_{mi}}{E_i - E_m + i\hbar\epsilon'}$$

Chame ϵ' de ϵ (note que tanto faz, pois o que importa é que vá a zero).

Espalhamento como perturbação dependente do tempo

Temos com isso uma equação $T_{ni} = V_{ni} + \sum_m V_{nm} \frac{T_{mi}}{E_i - E_m + i\hbar\epsilon}$ para os elementos de matriz de T , em função de elementos de matriz conhecidos, V_{nm} .

Se definirmos $T_{ni} = \langle n|T|i\rangle \equiv \langle n|V|\psi_i^{(+)}\rangle$ podemos re-escrevê-la por:

$$\langle n|V|\psi_i^{(+)}\rangle = \langle n|V|i\rangle + \sum_m \langle n|V|m\rangle \frac{\langle m|V|\psi_i^{(+)}\rangle}{E_i - E_m + i\hbar\epsilon}$$

e re-arranjá-la da seguinte forma:

$$\langle n|V \left(|\psi_i^{(+)}\rangle - |i\rangle - \sum_m \frac{|m\rangle\langle m|}{E_i - E_m + i\hbar\epsilon} V|\psi_i^{(+)}\rangle \right) = 0$$

ou ainda

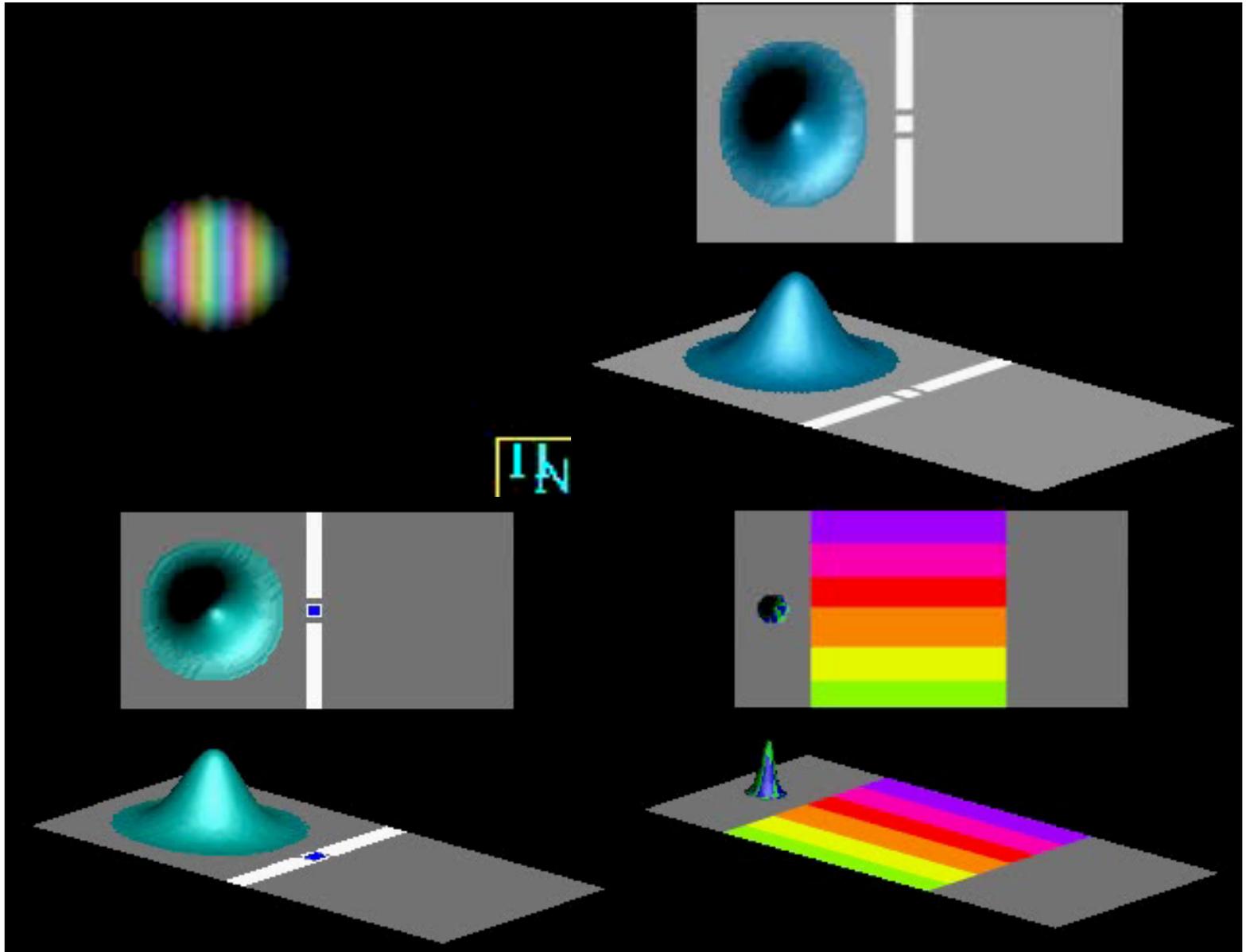
$$\langle n|V \left(|\psi_i^{(+)}\rangle - |i\rangle - \frac{1}{E_i - H_0 + i\hbar\epsilon} V|\psi_i^{(+)}\rangle \right) = 0.$$

Para $\langle n|$ arbitrário, é preciso ter o elemento entre parênteses igual à zero, isto é:

$$|\psi_i^{(+)}\rangle = |i\rangle + \frac{1}{E_i - H_0 + i\hbar\epsilon} V|\psi_i^{(+)}\rangle. \quad \text{Note que} \quad V|\psi_i^{(+)}\rangle = T|i\rangle$$

Esta é a equação de Lippmann-Schwinger obtida na aula anterior.

Espalhamento de um pacote de ondas



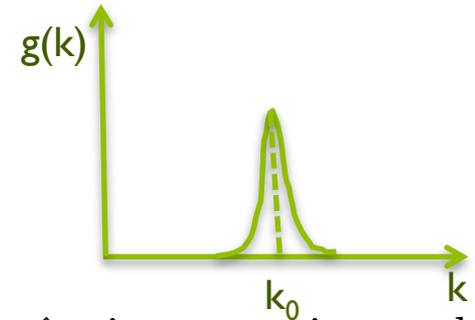
Espalhamento de um pacote de ondas

Evolução do pacote

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \int_0^\infty dk g(k) \psi_k^{(+)}(\mathbf{r}) e^{-i \frac{E_k}{\hbar} t}$$

Para simplificar $g(k)$ real, unidimensional e tem pico em $k = k_0$ e é zero para k longe de k_0 . Para $r \rightarrow \infty$, temos:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \int_0^\infty dk g(k) \underbrace{\left(e^{ikz} + f_k(\theta, \varphi) \frac{e^{ikr}}{r} \right)}_{\lim_{r \rightarrow \infty} \psi_k^{(+)}(\mathbf{r}, t)} e^{-i \frac{E_k}{\hbar} t}$$



Pensando que $g(k)$ está centrado em k_0 , em que circunstâncias que a integral em k contribui para o caso da onda incidente?

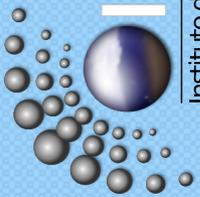
Se $(kz - \frac{E_k}{\hbar} t)$ variar ao redor de k_0 , $e^{i(kz - \frac{E_k}{\hbar} t)}$ vai oscilar muito e “matar” a

integral. Para que isso não ocorra exige que $\frac{d}{dk} (kz - \frac{E_k}{\hbar} t) \Big|_{k=k_0} = 0$ e \therefore

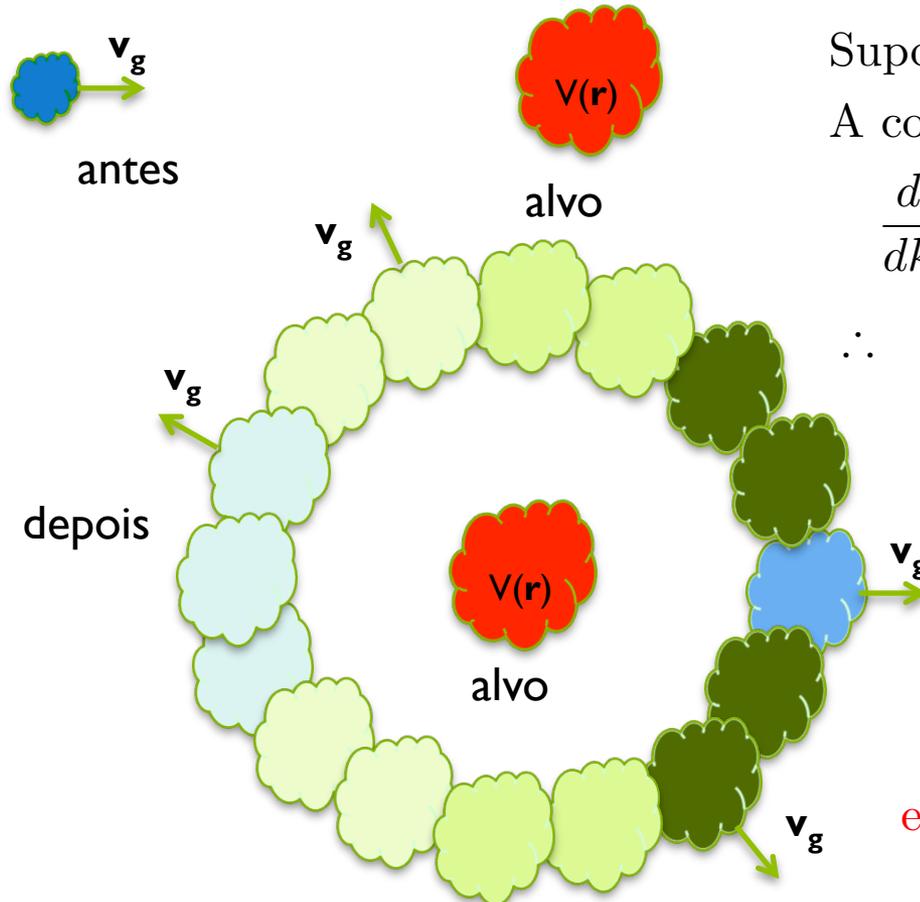
$$z = \frac{1}{\hbar} \frac{dE_k}{dk} \Big|_{k=k_0} t = \frac{1}{\hbar} \frac{d \hbar^2 k^2}{2m} \Big|_{k=k_0} t = \frac{\hbar k_0}{m} t, \text{ ou seja, } z = v_G t = \frac{\hbar k_0}{m} t \text{ e}$$

interprete como: *nas proximidades de z o pacote vai existir e z muda*

linearmente com t , \therefore centro anda com velocidade $v_G = \frac{\hbar k_0}{m}$.



Espalhamento de um pacote de ondas



Suponha $f_k(\theta, \varphi) = e^{-i\alpha_k} |f_k(\theta, \varphi)|$
A condição estacionária é dada por:

$$\frac{d}{dk} \left(kr - \alpha_k - \frac{E_k}{\hbar} t \right) \Big|_{k=k_0} = 0$$

$$\therefore r = \frac{d\alpha_k}{dk} \Big|_{k=k_0} + \frac{\hbar k_0}{m} t$$

região de interferência do
pacote de ondas planas com
pacote de ondas esféricas

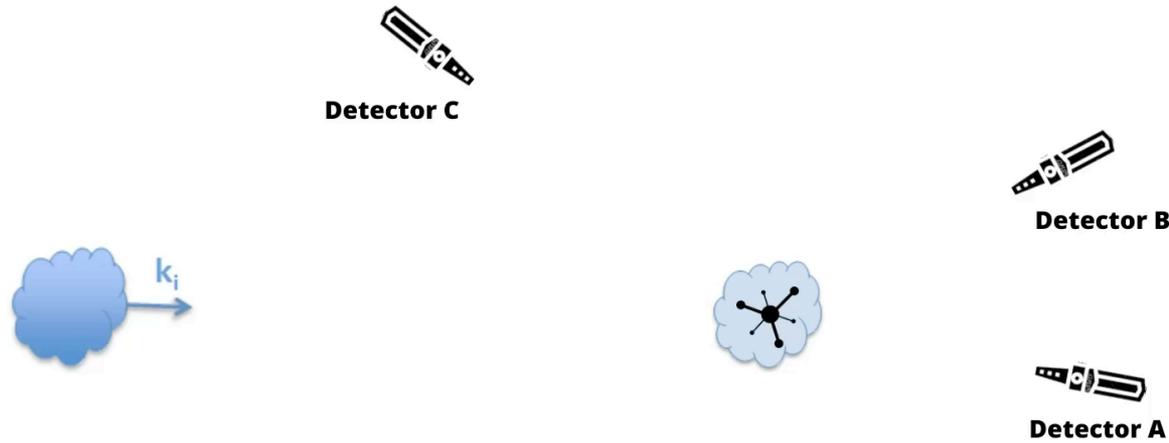
e o pacote de $\psi_{\mathbf{k}}^{(-)}$ → voluntário?

A onda espalhada não é esféricamente simétrica. Ela é modulada por $f(\theta, \varphi)$.

Só que r é sempre positivo. Assim p/ $\begin{cases} t \rightarrow -\infty \nexists \text{ condição estacionária.} \\ t \rightarrow +\infty \exists \text{ condição estacionária.} \end{cases}$

O “centro” do pacote espalhado tb viaja com velocidade $v_G = \frac{\hbar k_0}{m}$.

Espalhamento de um pacote de ondas



A animação é contribuição de Ana Elisa D. Barioni, aluna de FI002 (2020)

Lembre: estamos descrevendo o espalhamento de uma partícula por um potencial (o clique acontece em apenas um local!)

Teorema Ótico (região de interferência da figura do slide 9)

Vamos mostrar que $\text{Im} f_k(\theta = 0, \varphi) = \text{Im} f(\mathbf{k}, \mathbf{k}) = \frac{k\sigma_{tot}}{4\pi}$, ou seja que o ângulo zero carrega a informação sobre as partículas que foram “retiradas” do feixe incidente pelo potencial e está relacionada à definição de seção de choque total: “todas que saíram, foram espalhadas”.

Da equação de Lippmann-Schwinger $|\psi_i^{(+)}\rangle = |i\rangle + \frac{1}{E_i - H_0 + i\hbar\epsilon} V |\psi_i^{(+)}\rangle$, podemos, tomando o adjunto Hermiteano, escrever uma equação para o bra:

$\langle \psi_i^{(+)} | = \langle i | + \langle \psi_i^{(+)} | V \frac{1}{E_i - H_0 - i\hbar\epsilon}$. Isso permite re-escrever a amplitude de

espalhamento $f(\mathbf{k}, \mathbf{k}) = -\frac{mL^3}{2\pi\hbar^2} \langle \mathbf{k} | V | \Psi_{\mathbf{k}}^{(+)} \rangle = -\frac{m4\pi^2}{\hbar^2} \langle \mathbf{k} | V | \Psi_{\mathbf{k}}^{(+)} \rangle$ apenas usando

$\langle i | = \langle \mathbf{k} |$ nesta expressão do bra. E assim obter:

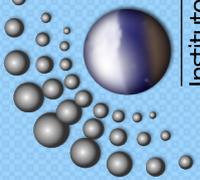
$$\langle \mathbf{k} | V | \Psi_{\mathbf{k}}^{(+)} \rangle = \left(\langle \Psi_{\mathbf{k}}^{(+)} | - \langle \Psi_{\mathbf{k}}^{(+)} | V \frac{1}{E_i - H_0 - i\hbar\epsilon} \right) V | \Psi_{\mathbf{k}}^{(+)} \rangle \text{ e}$$

$$\text{Im} \langle \mathbf{k} | V | \Psi_{\mathbf{k}}^{(+)} \rangle = \text{Im} \underbrace{\langle \Psi_{\mathbf{k}}^{(+)} | V | \Psi_{\mathbf{k}}^{(+)} \rangle}_{0 \rightarrow \text{pois é um número real}} - \text{Im} \langle \Psi_{\mathbf{k}}^{(+)} | V \frac{1}{E_i - H_0 - i\hbar\epsilon} V | \Psi_{\mathbf{k}}^{(+)} \rangle$$

$$\text{Im} \langle \mathbf{k} | V | \Psi_{\mathbf{k}}^{(+)} \rangle = -\text{Im} \langle \Psi_{\mathbf{k}}^{(+)} | V \frac{1}{E_i - H_0 - i\hbar\epsilon} V | \Psi_{\mathbf{k}}^{(+)} \rangle$$

Normalização da caixa

Normalização de Dirac



Teorema Ótico

Lembre que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x - x_0} dx = \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x - x_0} dx + \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$ onde,

$f(z)$ é uma função complexa com $z = x + iy$. O valor principal é definido

por $\mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x - x_0} dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{x_0 - \delta} \frac{f(x)}{x - x_0} dx + \int_{x_0 + \delta}^{+\infty} \frac{f(x)}{x - x_0} dx \right)$ e o

resíduo por $\int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{-\delta}^{+\delta} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{-\pi}^0 \frac{f(x_0)}{\delta e^{i\phi}} (i\delta e^{i\phi} d\phi) = +i\pi f(x_0)$



Com isso, podemos calcular $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{E - H_0 - i\hbar\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\delta(E' - E)}{E' - H_0 - i\hbar\epsilon} dE'$

onde apenas usamos que a integração em E' de qualquer função multiplicada por $\delta(E' - E)$ fornece a função calculada em E . A função em questão é:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{E' - H_0 - i\hbar\epsilon} \cdot \text{Assim, temos } \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\delta(E' - E)}{E' - H_0 - i\hbar\epsilon} dE' = i\pi \delta(E - H_0)$$

Defina $x = E' - E$; $x_0 = H_0 - E$

$\xrightarrow{x-x_0}$ $\xrightarrow{f(x)}$ $\xrightarrow{f(-x_0)=f(x_0)}$

(apenas o resíduo pois o valor principal é real). Usaremos esse resultado,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{E - H_0 - i\hbar\epsilon} = i\pi \delta(E - H_0),$$

na última expressão do slide 10.

Teorema Ótico (normalização de Dirac)

$$\begin{aligned} \text{Isso é } \text{Im}\langle \mathbf{k} | V | \Psi_{\mathbf{k}}^{(+)} \rangle &= -\text{Im}\langle \Psi_{\mathbf{k}}^{(+)} | V \frac{1}{E_i - H_0 - i\hbar\epsilon} V | \Psi_{\mathbf{k}}^{(+)} \rangle = \\ &= -\text{Im}\langle \Psi_{\mathbf{k}}^{(+)} | V i\pi\delta(E - H_0) V | \Psi_{\mathbf{k}}^{(+)} \rangle = \\ &= -\pi\langle \Psi_{\mathbf{k}}^{(+)} | V \delta(E - H_0) V | \Psi_{\mathbf{k}}^{(+)} \rangle = -\pi\langle \mathbf{k} | T^\dagger \delta(E - H_0) T | \mathbf{k} \rangle \end{aligned}$$

onde nesta última passagem, usamos que $T|\mathbf{k}\rangle = V|\Psi_{\mathbf{k}}^{(+)}\rangle$. Assim,

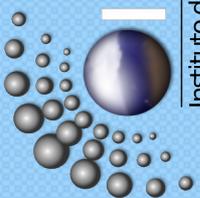
$$\text{Im}f(\mathbf{k}, \mathbf{k}) = -\frac{4\pi^2 m}{\hbar^2} \text{Im}\langle \mathbf{k} | V | \Psi_{\mathbf{k}}^{(+)} \rangle = \frac{4\pi^3 m}{\hbar^2} \int d^3 k' \langle \mathbf{k} | T^\dagger \delta(E - H_0) | \mathbf{k}' \rangle \langle \mathbf{k}' | T | \mathbf{k} \rangle$$

$$\text{E finalmente } \text{Im}f(\mathbf{k}, \mathbf{k}) = \frac{4\pi^3 m}{\hbar^2} \int d^3 k' |\langle \mathbf{k}' | T | \mathbf{k} \rangle|^2 \delta\left(E - \frac{\hbar^2 k'^2}{2m}\right) \text{ com } E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

$$\text{Lembrando que } f(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = -\frac{4\pi^2 m}{\hbar^2} \langle \mathbf{k}' | V | \Psi_{\mathbf{k}}^{(+)} \rangle = -\frac{4\pi^2 m}{\hbar^2} \langle \mathbf{k}' | T | \mathbf{k} \rangle, \text{ podemos}$$

$$\begin{aligned} \text{escrever } \text{Im}f(\mathbf{k}, \mathbf{k}) &= \frac{4\pi^3 m}{\hbar^2} \left(\frac{\hbar^2}{4\pi^2 m}\right)^2 \int d^3 k' |f(\mathbf{k}', \mathbf{k})|^2 \delta\left(E - \frac{\hbar^2 k'^2}{2m}\right) = \left(\frac{\hbar^2}{4\pi m}\right) \times \\ &\times \int d^3 k' |f(\mathbf{k}', \mathbf{k})|^2 \delta\left(E - \frac{\hbar^2 k'^2}{2m}\right) = \left(\frac{\hbar^2}{4\pi m}\right) \int dE \rho(E) d\Omega_{\mathbf{k}'} |f(\mathbf{k}', \mathbf{k})|^2 \delta\left(E - \frac{\hbar^2 k'^2}{2m}\right) \\ &= \left(\frac{\hbar^2}{4\pi m}\right) \underbrace{\frac{mk}{\hbar^2}}_{\rho(E) \text{ para } |\mathbf{k}'| = |\mathbf{k}|} \int d\Omega_{\mathbf{k}'} |f(\mathbf{k}', \mathbf{k})|^2 = \frac{k\sigma_{tot}}{4\pi} \quad \boxed{\text{c.q.d.}} \end{aligned}$$

$\rho(E)$ para $|\mathbf{k}'| = |\mathbf{k}|$



Teorema Ótico (normalização da caixa)

$$\begin{aligned}
 \text{Isso é } \text{Im}\langle \mathbf{k} | V | \Psi_{\mathbf{k}}^{(+)} \rangle &= -\text{Im}\langle \Psi_{\mathbf{k}}^{(+)} | V \frac{1}{E_i - H_0 - i\hbar\epsilon} V | \Psi_{\mathbf{k}}^{(+)} \rangle = \\
 &= -\text{Im}\langle \Psi_{\mathbf{k}}^{(+)} | V i\pi\delta(E - H_0) V | \Psi_{\mathbf{k}}^{(+)} \rangle = \\
 &= -\pi\langle \Psi_{\mathbf{k}}^{(+)} | V \delta(E - H_0) V | \Psi_{\mathbf{k}}^{(+)} \rangle = -\pi\langle \mathbf{k} | T^\dagger \delta(E - H_0) T | \mathbf{k} \rangle
 \end{aligned}$$

onde nesta última passagem, usamos que $T|\mathbf{k}\rangle = V|\Psi_{\mathbf{k}}^{(+)}\rangle$

$$\text{Assim } \text{Im}f(\mathbf{k}, \mathbf{k}) = -\frac{mL^3}{2\pi\hbar^2} \text{Im}\langle \mathbf{k} | V | \Psi_{\mathbf{k}}^{(+)} \rangle = \frac{mL^3}{2\hbar^2} \sum_{\mathbf{k}'} \langle \mathbf{k} | T^\dagger \delta(E - H_0) | \mathbf{k}' \rangle \langle \mathbf{k}' | T | \mathbf{k} \rangle$$

$$\text{E finalmente } \text{Im}f(\mathbf{k}, \mathbf{k}) = \frac{mL^3}{2\hbar^2} \sum_{\mathbf{k}'} |\langle \mathbf{k}' | T | \mathbf{k} \rangle|^2 \delta_{E, \frac{\hbar^2 k'^2}{2m}} \text{ com } E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

$$\text{Lembrando que } f(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = -\frac{mL^3}{2\pi\hbar^2} \langle \mathbf{k}' | V | \Psi_{\mathbf{k}}^{(+)} \rangle = -\frac{mL^3}{2\pi\hbar^2} \langle \mathbf{k}' | T | \mathbf{k} \rangle, \text{ podemos}$$

$$\text{escrever } \text{Im}f(\mathbf{k}, \mathbf{k}) = \frac{mL^3}{2\hbar^2} \left(\frac{2\pi\hbar^2}{mL^3}\right)^2 \sum_{\mathbf{k}'} |f(\mathbf{k}', \mathbf{k})|^2 \delta_{E, \frac{\hbar^2 k'^2}{2m}} = \left(\frac{2\pi^2\hbar^2}{mL^3}\right) \times$$

$$\times \sum_{\mathbf{k}'} |f(\mathbf{k}', \mathbf{k})|^2 \delta_{E, \frac{\hbar^2 k'^2}{2m}} = \left(\frac{2\pi^2\hbar^2}{mL^3}\right) \int dE \rho(E) d\Omega_{\mathbf{k}'} |f(\mathbf{k}', \mathbf{k})|^2 \delta\left(E - \frac{\hbar^2 k'^2}{2m}\right)$$

$$= \left(\frac{2\pi^2\hbar^2}{mL^3}\right) \underbrace{\frac{mk}{\hbar^2} \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3}_{\rho(E) \text{ para } |\mathbf{k}'| = |\mathbf{k}|} \int d\Omega_{\mathbf{k}'} |f(\mathbf{k}', \mathbf{k})|^2 = \frac{k\sigma_{tot}}{4\pi} \quad \boxed{\text{c.q.d.}}$$

$\rho(E)$ para $|\mathbf{k}'| = |\mathbf{k}|$

Finalmente, temos

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \int dE_n \rho(E_n) |c_n^{(1)}|^2 &= \frac{2\pi t}{\hbar} \int dE_n \rho(E_n) \overline{|V_{ni}|^2} \delta(E_n - E_i) = \\ &= \frac{2\pi t}{\hbar} \overline{|V_{ni}|^2} \rho(E_n) \Big|_{E_n = E_i} \end{aligned}$$

O valor médio de $|V_{ni}|^2$ é necessário, pois pressupomos um quase contínuo de estados com autovalores ao redor de E_n . Nem sempre os V_{ni} são iguais para $|n\rangle$'s diferentes, mesmo tendo o mesmo E_n . Daí a média. Observe também que esta quantidade é linear em t . Isto é consequência do que vimos nas figuras que o pico de $f(\omega)$ vai com t^2 e a largura com $1/t$.

Taxa de transição total, definida por $\frac{d}{dt} \left(\sum_n |c_n^{(1)}|^2 \right) \equiv w_{i \rightarrow [n]}$

Em primeira ordem, temos $w_{i \rightarrow [n]} = \frac{2\pi}{\hbar} \overline{|V_{ni}|^2} \rho(E_n) \Big|_{E_n = E_i} \Rightarrow$ esta é a chamada *Regra de Ouro de Fermi*.

As vezes a escrevemos como $w_{i \rightarrow [n]} = \frac{2\pi}{\hbar} \overline{|V_{ni}|^2} \delta(E_n - E_i)$ onde fica subentendido que é preciso integrar em $\int dE_n \rho(E_n)$.

Lousa: slide da aula 9 Teoria de Perturbação dependente do tempo: potencial constante

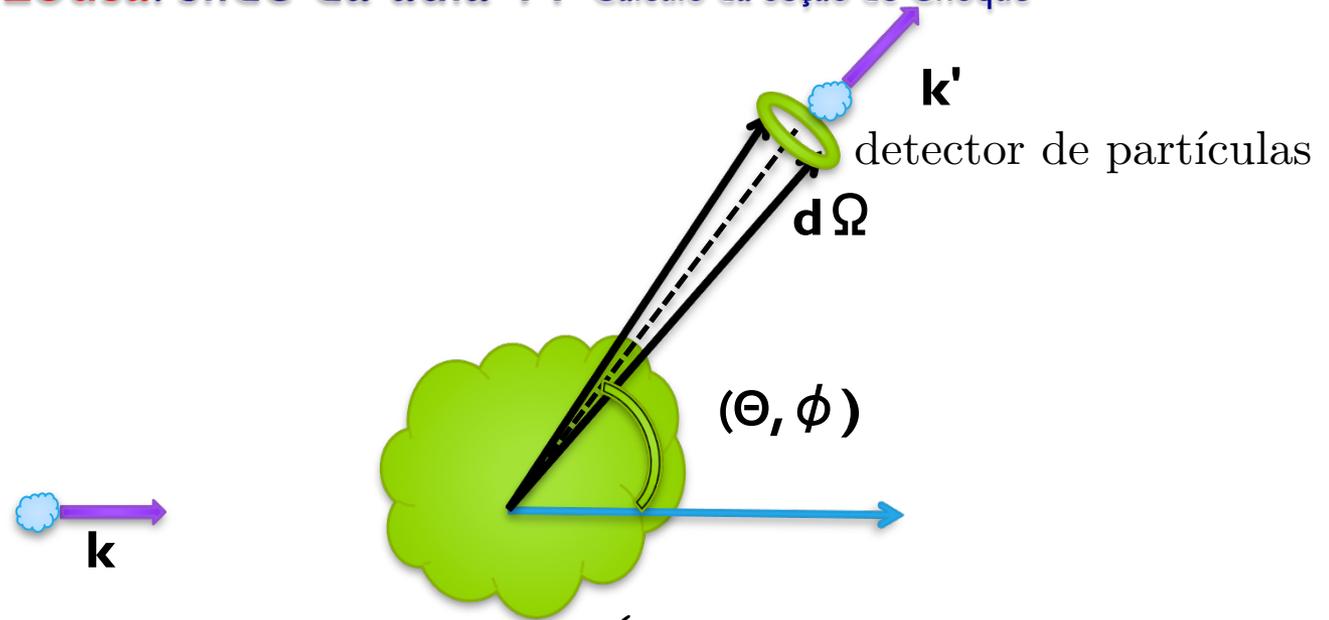
O primeiro termo tem a mesma dependência que encontramos em $c_n^{(1)}$ e o segundo termo pode ser desprezado (o resultado não crescerá linearmente com t), pois depende de ω_{nm} , o que faz a exponencial oscilar muito, e isso contribui destrutivamente na integração. Assim, conseguimos escrever:

[slide 3](#)

$$w_{i \rightarrow [n]} = \frac{2\pi}{\hbar} \overline{\left| V_{ni} + \sum_m \frac{V_{nm} V_{mi}}{E_i - E_m} \right|^2} \rho(E_n) \Big|_{E_n = E_i}$$

Note que a inclusão do termo de segunda ordem, manteve o formato. Esperamos que isso continue valendo para ordens superiores - aqui reside a proposta de T . Que ele carregue todas as potências de V .

slide 4



$$dn \equiv \frac{\text{número de partículas detectadas}}{\text{unidade de tempo}} \propto \begin{cases} \text{fluxo de partículas incidentes } F_i \\ \text{ângulo sólido } d\Omega \end{cases}$$

A constante de proporcionalidade é a chamada seção de choque diferencial:

$$dn = \sigma(\theta, \varphi) F_i d\Omega \Rightarrow \sigma(\theta, \varphi) = \frac{dn}{F_i d\Omega}$$

Diagram illustrating the differential cross-section equation. The equation is $dn = \sigma(\theta, \varphi) F_i d\Omega \Rightarrow \sigma(\theta, \varphi) = \frac{dn}{F_i d\Omega}$. Green arrows point from the terms in the equation to their definitions:

- dn is defined as $\frac{\# \text{ partículas}}{\text{tempo}}$.
- F_i is defined as $\frac{\# \text{ partículas}}{\text{tempo} \times \text{área}}$.
- $d\Omega$ is defined as $\frac{\text{área}}{\text{ângulo sólido}}$.