

A equação de Klein-Gordon: uma interpretação para $E < 0$

Primeiro, consideremos a partícula livre, onde $D_\mu = \partial_\mu$ e para o qual $\Upsilon(\mathbf{r}, t) \propto \exp[-i(Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})]$. Inserindo (ver problema 8.6) isso em

$$iD_t \Upsilon = \left[-\frac{1}{2m} \mathbf{D}^2 (\tau_3 + i\tau_2) + m\tau_3 \right] \Upsilon$$

obtemos

$$\begin{cases} \Upsilon(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2(mE_p)^{1/2}} \begin{pmatrix} E_p + m \\ m - E_p \end{pmatrix} e^{-iE_p t + i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \rightarrow E = +E_p \\ \Upsilon(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2(mE_p)^{1/2}} \begin{pmatrix} m - E_p \\ E_p + m \end{pmatrix} e^{+iE_p t + i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \rightarrow E = -E_p \end{cases}$$

[lousa](#)

Ao resolver o problema 8.6, note que a normalização foi imposta para que a densidade de carga seja $\rho = \pm 1$ para $E = \pm E_p$.

Observações

- Para uma partícula em “repouso”, $E_p = m$ e a solução com energia positiva tem apenas a componente $\phi(\chi = 0)$, enquanto que a solução com energia negativa tem apenas a componente $\chi(\phi = 0)$.
- Isso se mantém para casos não relativísticos onde $p \ll E_p$, e a solução com energia positiva é dominada por ϕ e a de energia negativa por χ .

Usamos isso para introduzir efeitos relativísticos “leves” na equação de Schrödinger

A equação de Klein-Gordon: uma interpretação para $E < 0$

Para obter mais intuição sobre o assunto, vamos calcular a densidade de corrente de probabilidade \mathbf{j} . Lembrando que as matrizes de Pauli respeitam regras de

comutação e anti-comutação $\begin{cases} [\tau_i, \tau_j] = 2i\epsilon_{ijk}\tau_k \\ \{\tau_i, \tau_j\} = 2\delta_{ij} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tau_i^2 = 1 \\ \tau_i\tau_j = i\epsilon_{ijk}\tau_k \quad (i \neq j) \end{cases}$

e, com auxílio de $iD_t\Upsilon = \left[-\frac{1}{2m}\mathbf{D}^2(\tau_3 + i\tau_2) + m\tau_3 \right]\Upsilon$ podemos escrever

lousa

$$\partial_t\rho = \partial_t(\Upsilon^\dagger\tau_3\Upsilon) = (\partial_t\Upsilon^\dagger)\tau_3\Upsilon + \Upsilon^\dagger\tau_3(\partial_t\Upsilon) = -\frac{1}{2im} \left[\overset{\text{vem do } \dagger}{-\nabla^2\Upsilon^\dagger}(\tau_3 - i\tau_2)\tau_3\Upsilon + \right. \\ \left. + \Upsilon^\dagger\tau_3(\tau_3 + i\tau_2)\nabla^2\Upsilon \right] = \frac{1}{2im} \left[\nabla^2\Upsilon^\dagger(1 + \tau_1)\Upsilon - \Upsilon^\dagger(1 + \tau_1)\nabla^2\Upsilon \right] = -\nabla \cdot \mathbf{j}$$

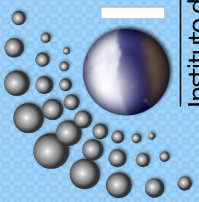
Para achar o \mathbf{j} , re-escreva $\partial_t\rho = -\frac{1}{2im}\nabla \cdot \left(\nabla\Upsilon^\dagger(1 + \tau_1)\Upsilon - \Upsilon^\dagger(1 + \tau_1)\nabla\Upsilon \right)$

lousa e perceba que $\mathbf{j} = \frac{1}{2im} \left(\Upsilon^\dagger(1 + \tau_1)\nabla\Upsilon - \nabla\Upsilon^\dagger(1 + \tau_1)\Upsilon \right)$ que pode ser re-

escrito como: $\mathbf{j} = \frac{1}{2m} \left(\Upsilon^\dagger(1 + \tau_1)\left(\frac{1}{i}\nabla\right)\Upsilon + \left(\frac{1}{i}\nabla\Upsilon\right)^\dagger(1 + \tau_1)\Upsilon \right)$ ou ainda

$$\mathbf{j} = \frac{1}{2m} \left(\Upsilon^\dagger(1 + \tau_1)\mathbf{p}\Upsilon + (\mathbf{p}\Upsilon)^\dagger(1 + \tau_1)\Upsilon \right) = \frac{1}{m}\overset{\text{autovalor}}{\mathbf{p}} \left(\Upsilon^\dagger(1 + \tau_1)\Upsilon \right) \overset{\text{próximo slide}}{=} \frac{\mathbf{p}}{E_p}$$

partícula livre



Usando as soluções do slide 1, temos:

Caso $E = +E_p$ ($\rho = +1$)

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= \frac{1}{m} \mathbf{p} \Upsilon^\dagger (1 + \tau_1) \Upsilon = \frac{1}{m} \mathbf{p} \frac{1}{4mE_p} \begin{pmatrix} E_p + m & m - E_p \\ m - E_p & E_p + m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_p + m \\ m - E_p \end{pmatrix} \\ &= \frac{\mathbf{p}}{4m^2E_p} \begin{pmatrix} E_p + m & m - E_p \\ m - E_p & E_p + m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2m \\ 2m \end{pmatrix} = \frac{\mathbf{p}}{E_p} \end{aligned}$$

Caso $E = -E_p$ ($\rho = -1$)

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= \frac{1}{m} \mathbf{p} \Upsilon^\dagger (1 + \tau_1) \Upsilon = \frac{1}{m} \mathbf{p} \frac{1}{4mE_p} \begin{pmatrix} m - E_p & E_p + m \\ E_p + m & m - E_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m - E_p \\ E_p + m \end{pmatrix} \\ &= \frac{\mathbf{p}}{4m^2E_p} \begin{pmatrix} m - E_p & E_p + m \\ E_p + m & m - E_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2m \\ 2m \end{pmatrix} = \frac{\mathbf{p}}{E_p} \end{aligned}$$

Quando trocamos o sinal de ρ , o que esperamos que ocorra com \mathbf{j} que respeita:

$\partial_t \rho = -\nabla \cdot \mathbf{j}$? Deveria trocar de sinal, mas não é o resultado que encontramos acima (ambos os casos têm mesmo valor).

Duas formas de corrigir isso:

- troque o sinal de \mathbf{p} para a solução com energia negativa (ver slide 1).
- troque o sinal de t , tempo corre ao contrário (o que muda o sinal de \mathbf{p} e permite a energia ser tratada como positiva)

Partículas e anti-partículas

Tivemos o primeiro contato com o que popularmente é conhecido como partícula e anti-partícula. Podemos, em princípio associar a solução com energia positiva $\Psi_{E>0}(\mathbf{x}, t)$ da equação de Klein-Gordon com a “partícula” e o seu complexo conjugado com a “anti-partícula”. Isso permite escrever:

$$\left[(\partial_\mu + ieA_\mu)(\partial^\mu + ieA^\mu) + m^2 \right] \Psi_{\text{partícula}}(\mathbf{x}, t) = 0 \Rightarrow \text{para } e$$

$$\left[(\partial_\mu - ieA_\mu)(\partial^\mu - ieA^\mu) + m^2 \right] \Psi_{\text{anti-partícula}}(\mathbf{x}, t) = 0 \Rightarrow \text{para } -e$$

É possível ir além e resolver a equação de Klein-Gordon para um sistema atômico. Quando fazemos isso (ver problema 8.7) o resultado compara bem com a experiência se a partícula carregada não tiver spin. No caso do átomo de hidrogênio (elétron tem spin) o resultado não bate com a experiência e isso prejudicou muito a reputação da equação de Klein-Gordon. Como na época ninguém havia observado anti-partículas, era preciso corrigí-la (ou obter outra equação invariante mediante transformação de Lorentz) para obter pelo menos o espectro do átomo de H correto. Surge, então, a idéia de Dirac de voltar um passo atrás e propor uma equação linear em \mathbf{p} .

Problema 8.7: ver, na nossa página, a contribuição da Ana Elisa (2020). Em seguida, um resumo

Átomo de Hidrogênio com a Equação de Klein-Gordon

O problema 8.7 pede a solução da equação de Klein-Gordon para o potencial colombiano $V(r) = -Ze^2/r$ em um estado estacionário de energia total $E \leq m$.

(a) Assuma que a função de onda $\Psi(\mathbf{r}, t)$ é separável e pode ser escrita na forma $e^{-iEt}[u_\ell(r)/r]Y_{\ell m}(\theta, \phi)$. Considere $E > 0$ e mostre que a componente inferior é muito menor que a superior e que a equação radial pode ser escrita na forma:

$$\frac{d^2 u_\ell(\rho)}{d\rho^2} + \left[\frac{2EZ\alpha}{\gamma\rho} - \frac{1}{4} - \frac{\ell(\ell+1) - (Z\alpha)^2}{\rho^2} \right] u_\ell(\rho) = 0 \quad \text{com} \quad \begin{cases} \alpha = e^2 \\ \gamma^2 = 4(m^2 - E^2) \\ \rho = \gamma r \end{cases}$$

(b) Assuma que a solução tenha a forma usual

$$u_\ell(\rho) = \rho^k (1 + c_1\rho + c_2\rho^2 + \dots) e^{-\rho/2}$$

Ver Q. Mechanics, L. I. Schiff, p.470

e mostre que $k = k_\pm = +\frac{1}{2} \pm \sqrt{(\ell + \frac{1}{2})^2 - (Z\alpha)^2}$ e que só k_+ serve.

(c) Encontre a fórmula de recorrência entre os c_i 's e encontre uma razão para terminá-la. Ao terminá-la, mostre que a energia é quantizada segundo a expressão

Não bate com a experiência !!

$$E = \frac{m}{\left(1 + (z\alpha)^2 \left[n - \ell - \frac{1}{2} + \sqrt{(\ell + \frac{1}{2})^2 - (z\alpha)^2} \right]^{-2} \right)^{1/2}} \rightarrow n \quad \begin{cases} \# \text{ quântico} \\ \text{principal} \end{cases}$$

A equação de Dirac

A equação linear que procuramos pode ser escrita na forma (covariante)

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (\text{m é a massa, como veremos})$$

onde γ^μ e m precisam ser determinados. Esperamos, obviamente, que ela nos forneça energias para a partícula livre iguais as obtidas pela quadrática, isto é $-E^2 + \mathbf{p}^2 + m^2 = 0$. Note que é possível transformar a equação linear acima

na de Klein-Gordon $\left([\partial_\mu \partial^\mu + m^2]\Psi(\mathbf{r}, t) = 0\right)$, simplesmente operando sobre a

linear o operador $-i\gamma^\nu \partial_\nu - m$, isto é:

$$(-i\gamma^\nu \partial_\nu - m)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi(\mathbf{x}, t) = 0 \implies (\gamma^\nu \partial_\nu \gamma^\mu \partial_\mu + m^2)\Psi(\mathbf{x}, t) = 0, \text{ e}$$

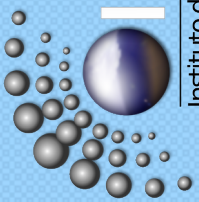
escolhermos $\gamma^\nu \gamma^\mu \partial_\nu \partial_\mu = \partial_\mu \partial^\mu = \partial^\mu \partial_\mu = \eta^{\mu\nu} \partial_\nu \partial_\mu \Rightarrow \gamma^\nu \gamma^\mu = \eta^{\mu\nu}$. Como $\eta^{\mu\nu}$ é simétrica, podemos escrever: $\frac{1}{2}(\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) = \frac{1}{2}\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv \eta^{\mu\nu}$.

Note que as quantidades γ^μ , $\mu = 0, 1, 2, 3$, não são apenas números complexos (números complexos comutam entre si e eles anti-comutam). Dizemos que os γ^μ respeitam o que é conhecida por álgebra de Clifford.

$$\text{Como } \begin{cases} \eta^{00} = 1 \\ \eta^{11} = \eta^{22} = \eta^{33} = -1 \\ \eta^{\mu\nu} = 0 \text{ se } \mu \neq \nu \end{cases} \text{ temos } \begin{cases} (\gamma^0)^2 = 1 \\ (\gamma^i)^2 = -1 \text{ se } i = 1, 2, 3 \\ \gamma^\mu \gamma^\nu = -\gamma^\nu \gamma^\mu \text{ se } \mu \neq \nu \end{cases}$$



problema 8.2 da lista 5. $\text{Tr}(\gamma^\mu) = 0 \rightarrow$ Problema 8.8.



Aula 25 Substituindo a solução esperada para a partícula livre, $\Psi(\mathbf{x}, t) = Ne^{-i(Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})}$ em

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi(\mathbf{x}, t) = 0$$

Lembrando que
$$\begin{cases} x^\mu = (t, \mathbf{x}) \\ p^\mu = (E, \mathbf{p}) \\ \partial_\mu = (\frac{\partial}{\partial t}, \nabla) \end{cases} \Rightarrow \boxed{\gamma^\mu p_\mu - m = 0}$$

Note que se multiplicarmos a equação acima por $\gamma^\nu p_\nu = m$, obtemos

$$\gamma^\nu p_\nu \gamma^\mu p_\mu = \gamma^\nu p_\nu m \Rightarrow \gamma^\nu \gamma^\mu p_\nu p_\mu = m^2 \Rightarrow \eta^{\mu\nu} p_\nu p_\mu = m^2 \Rightarrow \underbrace{p^\mu p_\mu - m^2}_{=0} = 0,$$

ou seja, a energia esperada para a partícula livre $\Rightarrow E^2 - \mathbf{p}^2 - m^2 = 0$

Como $p_\mu = (E, -\mathbf{p})$, a equação da caixa verde fica da seguinte maneira:

$\gamma^0 E - \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} - m = 0$ com $\boldsymbol{\gamma} \equiv (\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3)$ que quando multiplicada por γ^0 ,

fornece (lembre que $(\gamma^0)^2 = 1$): $E = \gamma^0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} + \gamma^0 m$. Essa é a expressão

tradicional da equação de Dirac, se tomarmos $\alpha_i \equiv \gamma^0 \gamma^i$ e $\beta \equiv \gamma^0$ para obter:

$$H = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m$$

Para levar em conta campos eletromagnéticos basta substituir $p^\mu \rightarrow p^\mu - eA^\mu$ em $\gamma^\mu p_\mu - m = 0$. Para uma partícula em um campo eletrostático, $\mathbf{A} = 0$, e $\Phi \neq 0$, teríamos $H = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m + e\Phi$. *Esta Hamiltoniana controla o futuro de um átomo relativístico com um elétron.*

A equação de Dirac

Podemos usar qualquer uma das formas da equação de Dirac que acabamos

de desenvolver

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle \text{ com } H = \begin{cases} \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m \\ \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m + e\Phi \end{cases} \\ \text{ou a forma covariante} \\ (2) \quad (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi(\mathbf{x}, t) = 0 \text{ com ou sem } p^\mu \rightarrow p^\mu - eA^\mu \end{array} \right.$$

Pode-se dizer que, de um modo geral, é conveniente (simplifica a aplicação)

usar

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \rightarrow \text{para resolver problemas de dinâmica de evolução do sistema} \\ (2) \rightarrow \text{para explorar e discutir simetrias do sistema} \end{array} \right.$$

Busca de γ^μ (ou de α e β).

Afirmamos que a álgebra dos γ^μ pode ser satisfeita para matrizes com dimensão mínima de 4×4 . Sabemos que as matrizes de Pauli (com a unidade formam um conjunto completo de matrizes 2×2) não servem pois, satisfazem

as regras

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{1}^2 = 1 \\ \sigma_i^2 = 1 \text{ para } i = 1, 2, 3 \\ \{\sigma_i, \sigma_j\} = \delta_{ij} \text{ e } \{\sigma_i, \mathbb{1}\} = 2\sigma_i \end{array} \right. \quad \text{e não} \quad \left\{ \begin{array}{l} (\gamma^0)^2 = 1 \\ (\gamma^i)^2 = -1 \text{ se } i = 1, 2, 3 \\ \gamma^\mu \gamma^\nu = -\gamma^\nu \gamma^\mu \text{ se } \mu \neq \nu \end{array} \right.$$

Matrizes 3×3 não servem, pois esperamos simetria entre partícula e anti-partícula. As próximas matrizes possíveis são as 4×4 . Com isso, teríamos $\Psi(\mathbf{x}, t) \rightarrow$ uma função vetor coluna de 4 dimensões.

A equação de Dirac

Para ser demonstrado no problema 8.9 da lista 6, afirmamos que as matrizes γ^μ que satisfazem a álgebra de Clifford, dão origem à :

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \text{ com } \boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \text{ e}$$

$$\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \text{ e } \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Note que } \begin{cases} \alpha^\dagger = \alpha \\ \beta^\dagger = \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma^{0\dagger} = \beta^\dagger = \gamma^0 \\ \gamma^\dagger = (\gamma^{0-1} \alpha)^\dagger = \alpha^\dagger \beta = \alpha \beta = -\beta \alpha = -\gamma \end{cases}$$

ou seja α, β e γ^0 são Hermiteanos e γ é anti-Hermiteano.

Corrente conservada. A equação de Dirac resolve o problema da densidade de probabilidade negativa. Definindo ψ^\dagger com a estratégia de sempre (complexo conjugado da matriz transposta - matriz linha da matriz coluna que representa Ψ), é possível se convencer que a quantidade $\rho = \Psi^\dagger \Psi$ pode ser interpretada como densidade de probabilidade. ρ é a soma dos quadrados das magnitudes das quatro componentes de $\Psi(\mathbf{x}, t)$. Esta densidade de probabilidade positiva foi, historicamente muito atraente, e fez a comunidade acreditar que a equação de Dirac era a forma correta para uma mecânica quântica relativística.

A solução desta equação para a partícula livre deu origem a interpretação que a energia negativa dizia respeito ao anti-elétron, o pósitron.

A equação de Dirac

Para ser demonstrado no problema 8.10 da lista 6, afirmamos que ρ satisfaz a equação de continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \text{ com } \mathbf{j} = \Psi^\dagger \boldsymbol{\alpha} \Psi$$

Isso fornece a interpretação usual que ρ muda somente com a entrada ou saída de fluxo de probabilidade na região e é uma quantidade que se conserva.

Ao invés de Ψ^\dagger podemos usar $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \beta = \Psi^\dagger \gamma^0$ e obter novas expressões para a densidade de probabilidade e de corrente.

Neste caso,
$$\begin{cases} \rho = \Psi^\dagger \Psi = \Psi^\dagger (\gamma^0)^2 \Psi = \bar{\Psi} \gamma^0 \Psi \\ \mathbf{j} = \Psi^\dagger \boldsymbol{\alpha} \Psi = \Psi^\dagger (\gamma^0)^2 \boldsymbol{\alpha} \Psi = \bar{\Psi} \boldsymbol{\alpha} \Psi \end{cases} \text{ e como } \gamma^0 \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\gamma} \text{ podemos}$$

escrever:
$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\Psi} \gamma^0 \Psi) + \nabla \cdot (\bar{\Psi} \boldsymbol{\alpha} \Psi) = \partial_\mu j^\mu = 0 \text{ com } j^\mu = \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi \begin{cases} \text{quadrivetor} \\ \text{corrente.} \end{cases}$$

Podemos ainda escrever: $(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi(\mathbf{x}, t) = 0 \rightarrow (\gamma^\mu p_\mu - m)\Psi(\mathbf{x}, t) = 0$ ou $\gamma^0(\gamma^\mu p_\mu - m)(\gamma^0)^2\Psi(\mathbf{x}, t) = 0$ tome o adjunto: $\bar{\Psi}(\mathbf{x}, t) \underbrace{\{\gamma^0(\gamma^\mu p_\mu - m)\gamma^0\}^\dagger}_{= (\gamma^\mu p_\mu - m)} = 0$.

$$= \{\gamma^0(\gamma^0 p_0 + \gamma^i p_i - m)\gamma^0\}^\dagger = \gamma^0 p_0 + \gamma^0(-\gamma^i)\gamma^0 p_i - m = (\gamma^\mu p_\mu - m)$$

E com isso podemos re-escrever j^μ , da seguinte forma:

$$\begin{aligned} j^\mu &= \frac{1}{2} \{ [\bar{\Psi} \gamma^\mu] \Psi + \bar{\Psi} [\gamma^\mu \Psi] \} = \frac{1}{2m} \{ [\bar{\Psi} \gamma^\mu] \gamma^\nu p_\nu \Psi + \bar{\Psi} \gamma^\nu p_\nu [\gamma^\mu \Psi] \} = \\ &= \frac{1}{2m} \bar{\Psi} [\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu] p_\nu \Psi = \frac{p^\mu}{m} \bar{\Psi} \Psi \text{ onde usamos } \frac{1}{2} \{ \gamma^\mu, \gamma^\nu \} = \eta^{\mu\nu} \end{aligned}$$

[lousa](#)



A equação de Dirac

Para finalmente escrever (para mais informações sobre contração de Lorentz, ver *Classical Elettrodynamics*, J. D. Jackson, 2nd ed., seção 11.5 (p. 525))

$$j^\mu = \frac{p^\mu}{m} \bar{\Psi} \Psi \Rightarrow \begin{cases} j^0 = \frac{E}{m} \bar{\Psi} \Psi \\ \mathbf{j} = \frac{\mathbf{p}}{m} \bar{\Psi} \Psi \end{cases}$$

Se usarmos a contração de Lorentz, $\gamma_L = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$,

podemos trocar $\begin{cases} E \rightarrow \gamma_L m \\ \mathbf{p} \rightarrow \gamma_L m \mathbf{v} \end{cases}$

Coerente com a contração do volume na direção do movimento

e obter $\begin{cases} j^0 = \gamma_L [\Psi_{\text{cima}}^\dagger \Psi_{\text{cima}} - \Psi_{\text{baixo}}^\dagger \Psi_{\text{baixo}}] \\ \mathbf{j} = \gamma_L \mathbf{v} [\Psi_{\text{cima}}^\dagger \Psi_{\text{cima}} - \Psi_{\text{baixo}}^\dagger \Psi_{\text{baixo}}] \end{cases}$

Soluções da Partícula livre

Vimos que $\begin{cases} \text{Klein-Gordon} \rightarrow \text{função de onda vetorial - duas dimensões } \Upsilon(\mathbf{x}, t) \\ \text{Dirac} \rightarrow \text{função de onda vetorial - quatro dimensões } \Psi(\mathbf{x}, t) \end{cases}$

Veremos que a origem da dimensão adicional das soluções da equação de Dirac é a mesma da do spin $\frac{1}{2}$ do começo do nosso curso. Daí a razão de dizermos que o spin do elétron tem origem relativística. As matrizes colunas 4×1 que representam $\Psi(\mathbf{x}, t)$ são chamadas de spinores.

Para desenvolver intuição, começaremos a próxima aula olhando a solução da partícula livre “em repouso” ($\mathbf{p} = 0$) segundo a equação de Dirac.

[slide 1](#)

• P.8.6, para:

$$\begin{cases} E = +E_p \rightarrow \Upsilon(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2(mE_p)^{1/2}} \begin{pmatrix} E_p + m \\ m - E_p \end{pmatrix} e^{-iE_p t + i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \\ E = -E_p \rightarrow \Upsilon(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2(mE_p)^{1/2}} \begin{pmatrix} m - E_p \\ E_p + m \end{pmatrix} e^{+iE_p t + i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \end{cases}$$

Insira em $\rho = j^0 = \Upsilon^\dagger \tau_3 \Upsilon = \begin{pmatrix} \phi^*(\mathbf{r}, t) & \chi^*(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi(\mathbf{r}, t) \\ \chi(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix}$

e perceba que ao resolver o problema 8.6, a normalização foi imposta para que a densidade de carga seja $\rho = +1$ para $E = +E_p$ e $\rho = -1$ para $E = -E_p$.

[slide 2](#)

• Comparação direta com $\partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$

[slide 10](#)

• Note que

$$\begin{cases} (\gamma^\mu p_\mu - m)\Psi(\mathbf{x}, t) = 0 \therefore \Psi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{m} \gamma^\mu p_\mu \Psi(\mathbf{x}, t) \\ \bar{\Psi}(\mathbf{x}, t)(\gamma^\mu p_\mu - m) = 0 \therefore \bar{\Psi}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{m} \bar{\Psi}(\mathbf{x}, t) \gamma^\mu p_\mu \end{cases}$$