

A equação de Dirac: partícula livre em repouso

Para uma situação onde $\alpha \cdot \mathbf{p} \ll \beta m$ (caso extremo é o referencial da partícula) a equação de Dirac fica: $i\partial_t \Psi = (\alpha \cdot \mathbf{p} + \beta m)\Psi = \beta m\Psi$

Como β é diagonal, é fácil obter 4 soluções linearmente independentes:

$$\Psi_1 = e^{-imt} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \Psi_2 = e^{-imt} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \Psi_3 = e^{+imt} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \Psi_4 = e^{+imt} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Exatamente como no caso da equação de Klein-Gordon, a parte de baixo do vetor coluna corresponde à energia negativa e a parte de cima à energia positiva. Ambas as partes de baixo e de cima da função de onda de Dirac, têm, como veremos, uma componente que chamaremos de “spin para cima” e outra de “spin para baixo”. Exploraremos esse assunto com mais detalhes.

Partícula livre na direção \hat{z} .

Consideremos agora uma partícula livre com momento diferente de zero na direção \hat{z} , isto é $\mathbf{p} = p\hat{z} \Rightarrow H\Psi = E\Psi$ com $H = \alpha_z p + \beta m$. Esta Hamiltoniana já não é diagonal na base de spinores (autokets de β), pois $[\alpha_z, \beta] \neq 0$.

Lembre que $\alpha_i = \gamma^0 \gamma^i$, $\beta = \gamma^0$, $\gamma^{0^2} = 1$ e que se $\mu \neq \nu$ $\begin{cases} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 0 \\ [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \neq 0 \end{cases}$

A equação de Dirac: partícula livre na direção z

Para ser demonstrado no problema 8.11 da lista 6, afirmamos que a matriz que representa H fica:

$$H = \begin{pmatrix} m & 0 & p & 0 \\ 0 & m & 0 & -p \\ p & 0 & -m & 0 \\ 0 & -p & 0 & -m \end{pmatrix} \quad \text{lousa}$$

Conseqüentemente, a equação de Dirac nesta representação é dada por:

$$\begin{pmatrix} m & 0 & p & 0 \\ 0 & m & 0 & -p \\ p & 0 & -m & 0 \\ 0 & -p & 0 & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}$$

Observe que para obter u_1, u_2, u_3 e u_4 , resolvendo as equações acopladas

$$\text{temos: } \begin{cases} u_1 \text{ e } u_3 \text{ estão acoplados entre si, pois } H_{13} = H_{31} = p \neq 0 \\ u_1 \text{ e } u_3 \text{ não estão acoplados com } u_2 \text{ e } u_4, \text{ pois } \begin{cases} H_{12} = H_{21} = 0 \\ H_{14} = H_{41} = 0 \\ H_{32} = H_{23} = 0 \\ H_{34} = H_{43} = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Note que os acoplamentos para u_2 e u_4 são muito similares à estes (estão acoplados entre si, mas não estão com os outros).

A equação de Dirac: partícula livre na direção z

Para as duas equações acopladas em u_1 e u_3 , achamos $E = \pm E_p$. As mesmas energias são achadas para as equações acopladas em u_2 e u_4 . De novo achamos a energia “correta” positiva e a energia “espúria” negativa. Veremos que a energia negativa terá uma interpretação “palatável”.

Antes de apresentar esta interpretação, vamos discutir o assunto spin. Do problema 8.11 encontramos as seguintes soluções:

$$(1) \text{ Para } E = +E_p \begin{cases} u_1 = 1; u_3 = +\frac{p}{E_p+m}; u_2 = u_4 = 0 \\ u_2 = 1; u_4 = -\frac{p}{E_p+m}; u_1 = u_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{No limite não-} \\ \text{relativístico} \\ u_1 \gg u_3 \\ u_2 \gg u_4 \end{cases}$$

$$(2) \text{ Para } E = -E_p \begin{cases} u_3 = 1; u_1 = -\frac{p}{E_p+m}; u_2 = u_4 = 0 \\ u_4 = 1; u_2 = +\frac{p}{E_p+m}; u_1 = u_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{No limite não-} \\ \text{relativístico} \\ u_3 \gg u_1 \\ u_4 \gg u_2 \end{cases}$$

Antes de continuar, precisamos responder o que esperamos do operador

$$\Sigma \cdot \hat{\mathbf{p}} = \Sigma_z, \text{ com } \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix} \rightarrow \text{uma matriz } 4 \times 4? \quad \text{lousa}$$

Autoestados deste operador são autoestados de spin na direção de \mathbf{p} .

A equação de Dirac: partícula livre na direção z

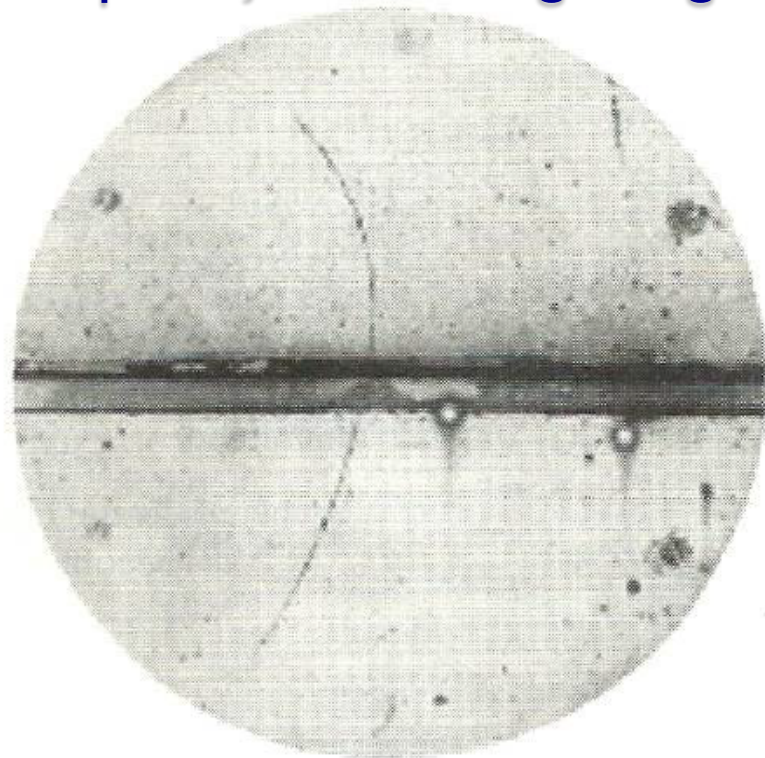
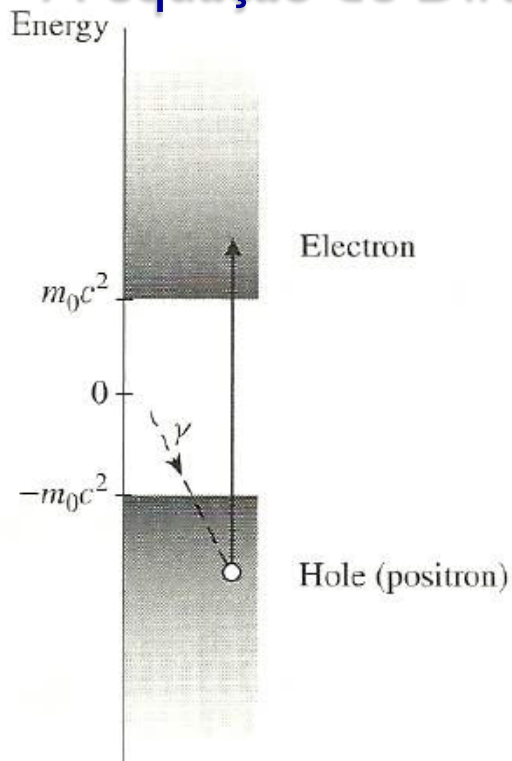
Mostre que $[\Sigma \cdot \hat{\mathbf{p}}, H] = 0 \Rightarrow$ Autoestados de H também são autoestados de $\Sigma \cdot \hat{\mathbf{p}}$. Aqui reside o nascimento relativístico do spin do elétron. O $\Sigma \cdot \hat{\mathbf{p}}$ é um operador cujos autovalores refletem possíveis valores da medida de spin na direção $\hat{\mathbf{p}}$. Além disso, o valor médio deste operador para um estado arbitrário te dá a projeção do spin na direção de $\hat{\mathbf{p}}$ (num grande número de experimentos). Estado, cujo spin aponta na direção de $\hat{\mathbf{p}}$ tem helicidade positiva (regra da mão direita - R) e no sentido oposto ao movimento tem helicidade negativa (regra da mão esquerda - L).

$$E = +E_p \implies u_R^{(+)}(p) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p}{E_p+m} \\ 0 \end{bmatrix}; u_L^{(+)}(p) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{p}{E_p+m} \end{bmatrix}$$

$$E = -E_p \implies u_R^{(-)}(p) = \begin{bmatrix} -\frac{p}{E_p+m} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; u_L^{(-)}(p) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{p}{E_p+m} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

No limite não relativístico: $\begin{cases} \text{spin para cima e para baixo para } +E_p \\ \text{spin para cima e para baixo para } -E_p \end{cases}$

A equação de Dirac: interpretação da energia negativa



Interpretação

Um background (todos os estados com energia negativa) preenchido com carga infinita e energia infinita. Como elétrons são férmions nenhum dos estados com energia m_0c^2 negativa aceita um novo elétron. Entretanto, se fornecermos energia suficiente, um elétron pula para um nível de energia positiva. O Buraco na banda de energia negativa é o pósitron (todas as propriedades do elétron; só a carga muda de sinal). O traço curvo (pósitron sob ação de um campo magnético) comprovou isso.

A equação de Dirac: interações eletromagnéticas

Podemos escrever a equação de Dirac para a partícula livre em um formato reduzido 2×2 , com auxílio da Hamiltoniana $H = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m$ escrita por

$$H = \begin{bmatrix} m & \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & -m \end{bmatrix} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} m & \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & -m \end{bmatrix}}_{H\Psi} \underbrace{\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}}_{E\Psi} = E \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad \text{lousa}$$

Para introduzir interações eletromagnéticas fazemos: $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - e\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{p}}$

$$\begin{bmatrix} m & \boldsymbol{\sigma} \cdot \tilde{\mathbf{p}} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \tilde{\mathbf{p}} & -m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad \text{com } \Psi = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

Para energias não relativísticas, podemos escrever $E = K + m$ onde $K \ll m$ é a energia cinética. Com isso a equação de baixo fica $\boldsymbol{\sigma} \cdot \tilde{\mathbf{p}}u - mv = (K + m)v$,

que pode ser reduzida à $\boldsymbol{\sigma} \cdot \tilde{\mathbf{p}}u = 2mv \rightarrow v = \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \tilde{\mathbf{p}}}{2m}u$ e que se inserida na

equação de cima, $mu + \boldsymbol{\sigma} \cdot \tilde{\mathbf{p}}v = Eu$, fornece:

$$\frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \tilde{\mathbf{p}})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \tilde{\mathbf{p}})}{2m}u = Ku$$

De FI001, temos $\frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \tilde{\mathbf{p}})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \tilde{\mathbf{p}})}{2m}u = \left[\frac{\tilde{\mathbf{p}}^2}{2m} + \frac{i\boldsymbol{\sigma}}{2m} \cdot (\tilde{\mathbf{p}} \times \tilde{\mathbf{p}}) \right]u$.

Na representação das coordenadas, temos

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{p}} \times \tilde{\mathbf{p}}u &= (i\nabla + e\mathbf{A}) \times (i\nabla u + e\mathbf{A}u) = ie[\nabla \times (\mathbf{A}u) + \mathbf{A} \times \nabla u] = \\ &= ie(\nabla \times \mathbf{A})u = ie\mathbf{B}u, \quad \text{onde } \mathbf{B} \text{ é o campo magnético associado à } \mathbf{A}. \end{aligned}$$

A equação de Dirac: interações eletromagnéticas

Inserido esses últimos resultados na equação da caixa verde do slide anterior,

$$\text{temos: } \left[\frac{\tilde{\mathbf{p}}^2}{2m} + \frac{i\boldsymbol{\sigma}}{2m} \cdot (ie\mathbf{B}) \right] u = Ku. \text{ Se usarmos } \begin{cases} \boldsymbol{\mu} = g \frac{e}{2m} \mathbf{S} \rightarrow \begin{cases} \text{momento} \\ \text{magnético} \end{cases} \\ \mathbf{S} = \frac{\hbar}{2} \boldsymbol{\sigma} \rightarrow \begin{cases} \text{operador} \\ \text{de spin} \end{cases} \\ g = 2 \rightarrow \begin{cases} \text{constante} \\ \text{giromagnética} \end{cases} \end{cases}$$

obtemos: $\left[\frac{\tilde{\mathbf{p}}^2}{2m} - \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} \right] u = Ku$. E isso permite concluir que a equação de Dirac, na presença de campo eletromagnético, e no limite não relativístico, se reduz à equação independente do tempo de Schrödinger com autovalor de energia K , para uma partícula com momento magnético $\boldsymbol{\mu}$ na presença de um campo magnético externo \mathbf{B} . O momento magnético foi derivado do operador de spin com constante giromagnética $g = 2$.

Começamos o curso (FI001), postulando spin e analisando experimentos de Stern-Gerlach. Vimos agora que o spin (com seus dois autovalores possíveis) nasce naturalmente da equação de Dirac.

A equação de Dirac: simetrias

Vamos agora examinar algumas simetrias inerentes à equação de Dirac. Em especial, consideraremos situações onde uma partícula de spin $\frac{1}{2}$ se encontra sob a influência de um potencial externo. Isto é, analisaremos as simetrias da equação

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{x}, t) = H \Psi(\mathbf{x}, t) = E \Psi(\mathbf{x}, t)$$

onde $H = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m + V(\mathbf{x})$. Note que esta forma destrói a covariância da equação, a menos que V tenha origem eletromagnética e tenhamos tomado um referencial onde $\mathbf{A} = 0$.

Momento angular

Na equação de Schrödinger exploramos a simetria de rotação, ao notar que $\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}$ comutava com Hamiltonianas com “potenciais centrais”,

$$\text{isto é } [H, \mathbf{L}] = 0 \text{ devido à } \begin{cases} [\mathbf{L}, \mathbf{p}^2] = 0 \\ [\mathbf{L}, \mathbf{x}^2] = 0 \end{cases}$$

Consideraremos, agora, o comutador $[H, \mathbf{L}]$ para a Hamiltoniana de Dirac.

Começemos pela Hamiltoniana da partícula livre, $H = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m$.

Note que $[\beta, \mathbf{L}] = 0$ pois, β é constante. Mas e o $[\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}, \mathbf{L}]$?

A equação de Dirac: simetrias

Para a componente i do momento angular, temos $[\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}, L_i] = [\alpha_l p_l, \epsilon_{ijk} x_j p_k]$, onde repetição de índices latinos significa somar de 1 à 3. Como α_l comuta com o operador unidade, temos:

$$[\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}, L_i] = \epsilon_{ijk} \alpha_l [p_l, x_j] p_k = \epsilon_{ijk} \alpha_l (-i\delta_{lj}) p_k = -i\epsilon_{ijk} \alpha_j p_k \neq 0.$$

Ou seja, o momento angular orbital não comuta com a Hamiltoniana de Dirac. Isto significa que \mathbf{L} não é uma grandeza que se conserva para partículas de spin $\frac{1}{2}$ livres ou sob influência de potenciais centrais.

Considere agora a comutação entre a Hamiltoniana e o operador $\boldsymbol{\Sigma}$ do slide 3. Especificamente, com sua componente i , isto é $[\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m, \Sigma_i]$.

Usando (mostre!) que $\begin{cases} \beta \Sigma_i = \Sigma_i \beta \\ [\alpha_i, \Sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk} \alpha_k \rightarrow \text{vem de } [\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk} \sigma_k \\ \epsilon_{kij} = \epsilon_{ijk} \end{cases}$

Claudevan (2020)
no site de FI002

obtemos $[\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m, \Sigma_i] = [\alpha_k p_k, \Sigma_i] = [\alpha_k, \Sigma_i] p_k = 2i\epsilon_{kij} \alpha_j p_k = 2i\epsilon_{ijk} \alpha_j p_k$

E isso mostra que *Embora nem \mathbf{L} e nem $\boldsymbol{\Sigma}$ comutem com H , a soma*

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \frac{\hbar}{2} \boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{L} + \mathbf{S} \text{ comuta com } H.$$

No caso onde $V(\mathbf{x}) = V(|\mathbf{x}|)$, esperamos que as soluções tenha paridade bem definida, isto é $\Psi(-\mathbf{x}) = \pm\Psi(\mathbf{x})$. Não parece ser esse o caso, pois a Hamiltoniana

de Dirac do slide 8, aparentemente muda com as trocas
$$\begin{cases} \mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x} \\ e \\ \mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p} \end{cases}$$

Entretanto, um olhar mais atento para as soluções de H , na forma de spinores, sugere que o operador precisa ser mudado. O operador de paridade definido no

capítulo 4, atuava nas funções por meio das propriedades
$$\begin{cases} \pi^\dagger \mathbf{x} \pi = -\mathbf{x} \\ \pi^\dagger \mathbf{p} \pi = -\mathbf{p} \end{cases}$$

Um operador paridade completo (representado por matrizes 4×4) precisa atuar no espaço de spinores e deve ser diferente de $\pi \mathbb{1}$ (esse muda a Hamiltoniana). A proposta é que ele seja do tipo $\mathcal{P} \equiv \pi U_p$ e que U_p seja encontrado pela exigência de satisfazer $\mathcal{P}^\dagger H \mathcal{P} = H$ e pela expectativa de que $U_p^2 = \mathbb{1}$.

Para isso basta exigir que
$$\begin{cases} \mathcal{P}^\dagger \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} \mathcal{P} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} = U_p^\dagger \pi \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} \pi U_p = \underbrace{-U_p^\dagger \boldsymbol{\alpha} U_p}_{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{p} \\ \mathcal{P}^\dagger \beta \mathcal{P} = U_p^\dagger \beta U_p = \beta \end{cases}$$

A equação de Dirac: simetrias

As 3 propriedades
$$\begin{cases} U_p^2 = \mathbb{1} \\ U_p^\dagger \alpha U_p = -\alpha \\ U_p^\dagger \beta U_p = \beta \end{cases}$$
 são satisfeitas se tomarmos $U_p = \beta = \beta^\dagger$

Claudevan (2020)
no site de FI002

Assim, $H\Psi(\mathbf{x}) = E\Psi(\mathbf{x}) \Rightarrow \begin{cases} \beta\pi H\Psi(\mathbf{x}) = E\beta\pi\Psi(\mathbf{x}) \\ \beta\pi H\pi^2\beta^2\Psi(\mathbf{x}) = E\beta\pi\Psi(\mathbf{x}) \\ H(\pi\beta\Psi(\mathbf{x})) = E(\pi\beta\Psi(\mathbf{x})) \end{cases}$

e \therefore se $\Psi(\mathbf{x})$ é solução $\pi\beta\Psi(\mathbf{x}) = \beta\Psi(-\mathbf{x})$ também é.

Como $[H, \mathcal{P}] = 0$, as autofunções de \mathcal{P} também são autofunções de H .

Assim concluímos até agora que a Hamiltoniana de Dirac, comuta com \mathbf{J}^2 , J_z e \mathcal{P} . No capítulo 3, definimos boas candidatas para isso, as chamadas

funções spin-angulares
$$\mathcal{Y}_l^{j=l\pm 1/2, m} = \frac{1}{\sqrt{2l+1}} \begin{pmatrix} \pm\sqrt{l \pm m + \frac{1}{2}} Y_l^{m-1/2}(\theta, \phi) \\ \sqrt{l \mp m + \frac{1}{2}} Y_l^{m+1/2}(\theta, \phi) \end{pmatrix}$$

Mais detalhes sobre isso veremos nas próximas aulas na solução da equação de Dirac para potenciais centrais.

Aula 26 Conjugação da carga

Para a equação de Klein-Gordon, vimos que poderíamos separar as soluções com energia positiva e energia negativa, entre solução da “partícula” e da “anti-

partícula por meio da associação

$$\begin{cases} \Psi_{\text{partícula}} \equiv \Psi_{E>0}(\mathbf{x}, t) \\ \Psi_{\text{anti-partícula}} \equiv \Psi_{E<0}^*(\mathbf{x}, t) \end{cases}$$

Vamos, primeiro tentar algo semelhante com a equação de Dirac e depois conectar as duas soluções por alguma operação de simetria. Para nossos propósitos, a anti-partícula é um objeto que se comporta exatamente como a partícula, exceto que tem sua carga elétrica com sinal oposto ao da partícula. Para explorar isso, tomemos a equação de Dirac na sua forma covariante com campos eletromagnéticos:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu - m)\Psi(\mathbf{x}, t) = 0.$$

Tomando o complexo conjugado desta equação, temos:

$$(-i(\gamma^\mu)^* \partial_\mu - e(\gamma^\mu)^* A_\mu - m)\Psi^*(\mathbf{x}, t) = 0$$

Note que o sinal relativo entre os dois primeiros termos difere em relação a equação original. Se apenas trocarmos o sinal da carga não obtemos a equação original. Vamos procurar por uma matriz \tilde{C} , tal que

$$\tilde{C}(\gamma^\mu)^* \tilde{C}^{-1} = -\gamma^\mu$$

A equação de Dirac: simetrias

Conjugação da carga - continuação

Assim se inserirmos $\mathbb{1} = \tilde{C}^{-1}\tilde{C}$ na equação estrelada do slide anterior, temos

$$(-i(\gamma^\mu)^* \partial_\mu - e(\gamma^\mu)^* A_\mu - m)\tilde{C}^{-1}\tilde{C}\Psi^*(\mathbf{x}, t) = 0$$

Se agora multiplicarmos pela esquerda por \tilde{C} , podemos escrever

$$(-i\tilde{C}(\gamma^\mu)^*\tilde{C}^{-1}\partial_\mu - e\tilde{C}(\gamma^\mu)^*\tilde{C}^{-1}A_\mu - m\tilde{C}\tilde{C}^{-1})\tilde{C}\Psi^*(\mathbf{x}, t) = 0$$

E finalmente com auxílio de $\tilde{C}(\gamma^\mu)^*\tilde{C}^{-1} \equiv -\gamma^\mu$, obtemos:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu + e\gamma^\mu A_\mu - m)\tilde{C}\Psi^*(\mathbf{x}, t) = 0$$

Ou seja, se $\Psi(\mathbf{x}, t)$ é a solução da “equação do elétron”, $\tilde{C}\Psi^*(\mathbf{x}, t)$ é solução da “equação do pósitron”.

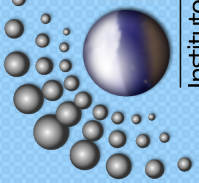
Claudevan (2020)
no site de FI002

Precisamos achar \tilde{C} . Note que γ^0 , γ^1 e γ^3 são reais e γ^2 é imaginário puro, isto é $(\gamma^2)^* = -\gamma^2$. Mostre que $\tilde{C} = i\gamma^2$ satisfaz todas as condições acima.

Assim a solução da anti-partícula é $i\gamma^2\Psi^*(\mathbf{x}, t)$. É conveniente escrever isso em termos de $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger\gamma^0 = (\Psi^*)^T\gamma^0$ (T indica, matriz transposta). Assim, temos: $\tilde{C}\Psi^*(\mathbf{x}, t) \equiv \mathcal{C}\Psi = i\gamma^2(\bar{\Psi}\gamma^0)^T \equiv U_C(\bar{\Psi})^T$ onde $U_C = i\gamma^2\gamma^0$.

E isso define o operador de conjugação de carga \mathcal{C} , por $\mathcal{C}\Psi(\mathbf{x}, t) = U_C(\bar{\Psi})^T$.

Note que a parte espacial e temporal da onda livre ganha um complexo conjugado que efetivamente implica em $\mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}$ e $t \rightarrow -t$.



Lembre que

$$\beta = \gamma^{(0)} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \gamma = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ -\sigma & 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha = \gamma^{(0)}\gamma = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

[slide 2](#)[slide 3](#)[slide 6](#)