Introdução ao Eletromagnetismo

Histórico

O problema fundamental que a teoria do eletromagnetismo espera poder resolver é:

Dada uma concentração de cargas em um ponto do espaço (estática ou em movimento); queremos descobrir como esta afeta a distribuição em outra parte.

Historicamente, a teoria do eletromagnetismo começou separada em dois tópicos: eletricidade e magnetismo.

A eletrostática de Charles Augustin Coulomb (1736-1806) e outros como Henry Cavendish (1731-1810), Joseph Priestley (1733-1804) a quem os créditos pela descoberta da lei do inverso do quadrado da distância pertence. No entanto foi Coulomb que desenvolveu um experimento crucial que permitiu estabelecer a Lei de Coulomb.

Veja: Heering, Am. Journal of Physics 60, 988 (1992)
Soules, Am. Journal of Physics 58, 1195 (1990)

Também tivéssemos os desenvolvimentos de Baterias (Daniel Volta), correntes elétricas (Franklin e outros) e emissão de luz.
No magnetismo, Bússolas e materiais magnéticos.

„ Apenas em 1820 os dois tópicos começam a se "encontrar". Oersted nota que uma corrente elétrica pode defletir uma agulha magnética.

Ampère corretamente postula que todos fenômenos magnéticos são devido a cargas em movimento

Em 1831, Faraday descobre que um magneto em movimento gera corrente elétrica em condutores. Nesta mesma época Maxwell e Lorentz unem as teorias em um único tópico: o eletromagnetismo que, como mostrado por Maxwell e Hertz também inclui a ótica.

A solução de problemas em eletromagnetismo finalmente ~~leva em conta~~ ~~um~~ usa a teoria de campo. Ao redor de uma carga, o espaço é permeado por um campo elétrico e magnético que identifica como e onde a carga está.
Uma segunda carga na presença deste campo experimenta uma força, que é devido à outra carga e vice-versa!

Se a carga acelera, uma porção do campo desacopla da carga e viaja à velocidade da luz carregando Energia, momento, e momento Angular. Esta é a radiação eletromagnética

Notamos que a carga elétrica gera um campo (eletromagnético) que por sua vez pode ser detectado por outra carga através da ação de uma força.

Carga elétrica

1 - Duas formas ($+q$ e $-q$). Em mesma quantidade se cancelam exatamente!

2 - Carga é conservada. Não se pode criar ou destruir carga - O que existe agora sempre existiu. Uma carga positiva pode aniquilar uma negativa, mas uma positiva não pode simplesmente desaparecer!

A carga total no universo está fixa. Este é a conservação global de cargas.

A carga é quantizada. $+ne$, $-ne$, nunca $\sqrt{2}e$ ou $\frac{1}{2}e$. No caso dos quarks, a carga vem em frações de $\pm\frac{2}{3}e$ e $\pm\frac{1}{3}e$. No entanto, não parece existirem quarks livres na natureza e mesmo assim a carga fundamental seria novamente reduzida na sua unidade básica.

Revisão de Álgebra Vetorial

Vetor: Quantidade que tem direção, sentido e magnitude.

As 4 operações

i) Adição de vetores

$$\underbrace{\vec{A}+\vec{B} = \vec{B}+\vec{A}}_{\text{comuta}}$$

Associativa: $(\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A} + (\vec{B}+\vec{C})$

(subtração) Adição do oposto: $\vec{A}-\vec{B} = \vec{A}+(-\vec{B})$

ii) Multiplicação por escalar: $a(\vec{A}+\vec{B}) = a\vec{A} + a\vec{B}$

iii) Produto escalar: $\vec{A}\cdot\vec{B} \equiv AB\cos\theta$ (projeção de um vetor na direção do outro).

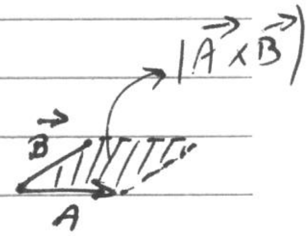
é comutativo e associativo

(iv) Produto vetorial: $\vec{A}\times\vec{B} \equiv AB\sin\theta\,\hat{n}$

$\hat{n} \perp \vec{A}$ e $\vec{B}$ ou $\hat{n}$ é perpendicular ao plano formado por $\vec{A}$ e $\vec{B}$ (Direção de $\hat{n}$ dado pela regra da mão direita)

é distributivo, mas não comuta

$$(\vec{B}\times\vec{A}) = -(\vec{A}\times\vec{B})$$

$|\vec{A}\times\vec{B}|$ é a área do paralelogramo 

Componentes : $\vec{A} = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}$

(i) Associativa : adiciona componentes de cada vetor na soma.

(ii) multiplicação por escalar : $a\vec{A} = a A_x \hat{x} + a A_y \hat{y} + a A_z \hat{z}$

produto escalar : $\hat{x}\cdot\hat{x} = 1$; $\hat{y}\cdot\hat{y} = 1 = \hat{z}\cdot\hat{z} = 1$

e $\hat{x}\cdot\hat{y} = \hat{x}\cdot\hat{z} = \hat{y}\cdot\hat{z} = 0$ ou

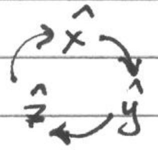
$\hat{i}\cdot\hat{j} = \delta_{i,j}$ → Delta de Kronecker.

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

p/ o produto vetorial :

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = (A_y B_z - A_z B_y)\hat{x} + (A_z B_x - A_x B_z)\hat{y} + (A_x B_y - A_y B_x)\hat{z}$$

Lembre-se da regra cíclica



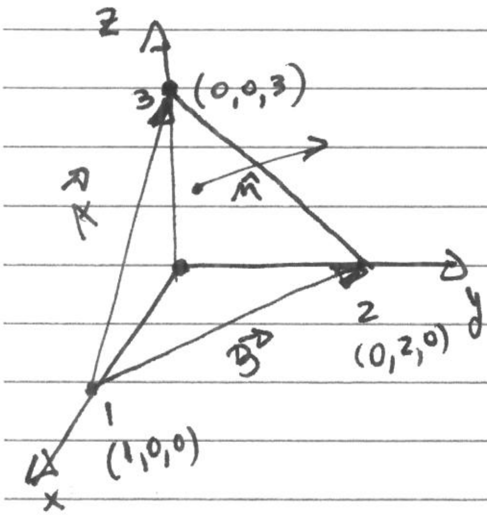
$\hat{x}\times\hat{x} = 0$

$\hat{y}\times\hat{y} = 0$

$\hat{z}\times\hat{z} = 0$

$\hat{x}\times\hat{y} = \hat{z}$; $\hat{y}\times\hat{z} = \hat{x}$; $\hat{z}\times\hat{x} = \hat{y}$

Exemplo : Prob. 1.4



$\vec{A} = (0,0,3) - (1,0,0) = (-1,0,3)$

$\vec{B} = (0,2,0) - (1,0,0) = (-1,2,0)$

$\vec{C} = \vec{B} \times \vec{A}$ (dá o mesmo sentido p/ $\hat{n}$)

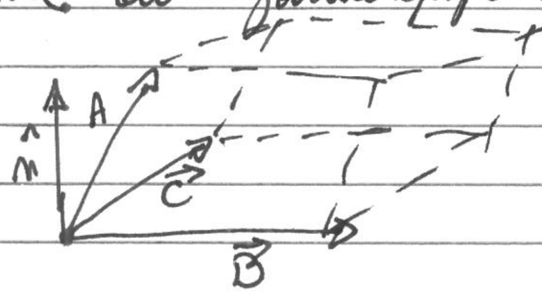
$$\vec{C} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6\hat{x} + 3\hat{y} + 2\hat{z}$$

$$|\vec{C}| = \sqrt{36+9+4} = 7$$

$$\boxed{\hat{n} = \frac{6}{7}\hat{x} + \frac{3}{7}\hat{y} + \frac{2}{7}\hat{z}}$$

Produto triplo.

(1) Escalar : $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$ geometricamente é o volume do paralelepípedo.



$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$$

Note $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$

(ii) Vetorial: $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$

lembrar de $\boxed{BAC-CAB}$

Pode-se derivar produtos mais altos usando as regras anteriores; exemplo:

$$(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\underbrace{(\vec{C}\times\vec{D})}_{\vec{E}} = ?$$

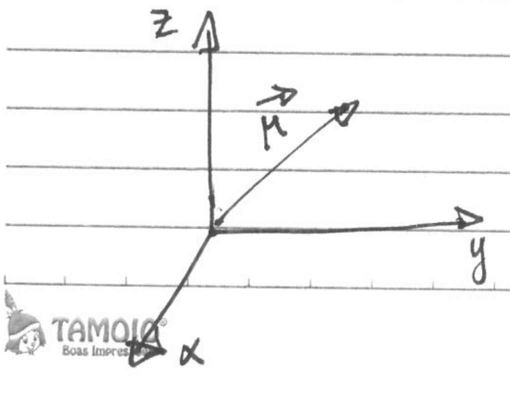
$$=(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{E} = \vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{E})$$

$$=\vec{A}\cdot(\vec{B}\times(\vec{C}\times\vec{D})) = \vec{A}\cdot\left[\vec{C}(\vec{B}\cdot\vec{D})-\vec{D}(\vec{B}\cdot\vec{C})\right]$$

$$=(\vec{A}\cdot\vec{C})(\vec{B}\cdot\vec{D})-(\vec{A}\cdot\vec{D})(\vec{B}\cdot\vec{C})$$

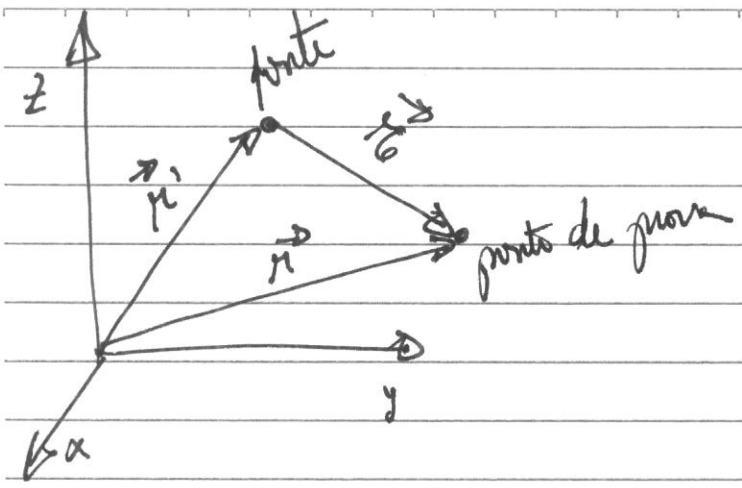
simplifique p/ apenas 1 produto vetorial e produtos escalares: $\vec{A}\times(\vec{B}\times(\vec{C}\times\vec{D})) = ?$

Posição, Deslocamento e Separação entre vetores



$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{x\hat{x}+y\hat{y}+z\hat{z}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$d\vec{l} = dx\,\hat{x} + dy\,\hat{y} + dz\,\hat{z}$$



$$\therefore \quad \vec{r_6} \equiv \vec{r} - \vec{r}'$$

$$r_6 = |\vec{r} - \vec{r}'|$$

$$\hat{r_6} = \frac{\vec{r_6}}{r_6} = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\therefore \quad \hat{r_6} = \frac{(x-x')\hat{x} + (y-y')\hat{y} + (z-z')\hat{z}}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}}$$

Cálculo diferencial

$$df = \left(\frac{df}{dx}\right) dx$$

→ Taxa de variação da função f ~~como~~ ~~fun~~ em relação à coord. x.

Gradiente: Taxa de variação de uma função em relação a 3 coordenadas.

Um bom exemplo é a temperatura em um quarto ou um objeto. Quão rápido varia a temperatura no quarto depende da direção.
~~Depende~~

Sabemos que: $dT = \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right) dy + \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right) dz$

Se lembrarmos do produto escalar, a expressão anterior também é:

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial T}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial T}{\partial z}\hat{z}\right) \cdot \left(dx\,\hat{x} + dy\,\hat{y} + dz\,\hat{z}\right)$$

$$dT = (\vec{\nabla} T) \cdot d\vec{l}$$ sendo

$$\boxed{\vec{\nabla} T \equiv \frac{\partial T}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial T}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial T}{\partial z}\hat{z}}$$ definição.

Geometricamente

$$dT = \vec{\nabla} T \cdot d\vec{l} = |\nabla T|\,|dl|\cos\theta.$$

Máxima variação em T p/ $\vec{\nabla} T \parallel d\vec{l}$ ∴

$\vec{\nabla} T$, aponta na direção da variação máxima de T.

Exemplos: $\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r_e}\right) = ?$

$$\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r_e}\right) = \hat{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+\ldots}}\right) + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\sqrt{\ldots+(y-y')^2+\ldots}}\right) +$$

$$+ \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\sqrt{\ldots+(z-z')^2}}\right)$$

$$\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r_e}\right) = -\frac{1}{2}\frac{2(x-x')\hat{x}}{(\quad)^{3/2}} - \frac{1}{2}\frac{2(y-y')\hat{y}}{(\quad)^{3/2}} - \frac{1}{2}\frac{2(z-z')\hat{z}}{(\quad)^{3/2}}$$

$$\nabla\left(\frac{1}{\mathscr{r}}\right) = - \underbrace{\frac{(x-x')\hat{x} + (y-y')\hat{y} + (z-z')\hat{z}}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}}_{\hat{\mathscr{r}}} \; \frac{1}{\underbrace{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}_{\mathscr{r}^2}}$$

$$\boxed{\nabla\left(\frac{1}{\mathscr{r}}\right) = -\frac{\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2} = -\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}}$$

É facil mostrar usando o mesmo metodo que

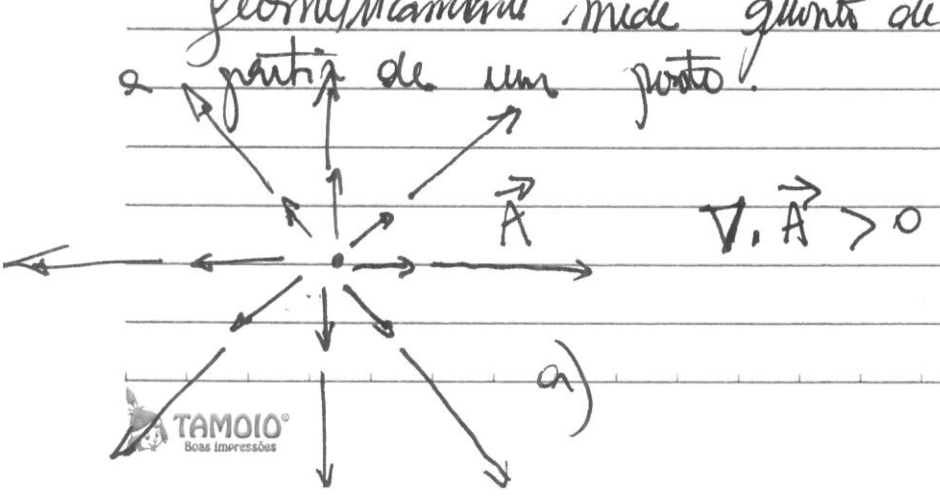
$$\boxed{\nabla\left(\mathscr{r}^n\right) = n\,\mathscr{r}^{n-1}\,\hat{\mathscr{r}}}$$

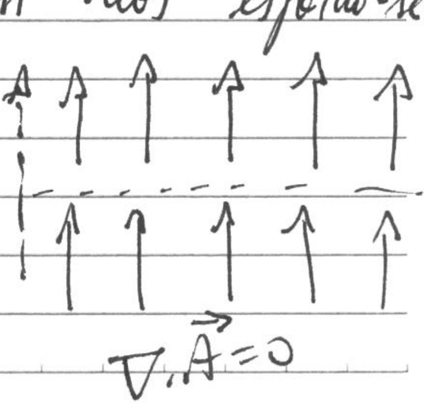
Divergente

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{v}} \equiv \left(\hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(v_x\hat{x} + v_y\hat{y} + v_z\hat{z}\right)$$

$$= \boxed{\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}v_z}$$

Geometricamente mede quanto de um vetor espalha-se a partir de um ponto.





Exemplo do Prob. 1.16 ||

Cuidado como se escreve vetores!!!

$$\vec{v} = \frac{\hat{r}}{r^2} = ? \qquad \vec{r} = \frac{x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \cdot \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)}$$

$$\therefore \vec{v} = \frac{x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = ?$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{(\ )^{3/2}}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{(\ )^{3/2}}\right)$$

$$= \frac{1\,(x^2+y^2+z^2)^{3/2} - x\frac{3}{\cancel{2}}(x^2+y^2+z^2)^{1/2}\cancel{2}x}{(x^2+y^2+z^2)^{3}} + \dots + \dots$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{3(\ )^{3/2}}{(\ )^3} - \frac{3(x^2+y^2+z^2)(\ )^{1/2}}{(\ )^3}$$

$$= \frac{3(\ )^{3/2}}{(\ )^3} - \frac{3(\ )^{3/2}}{(\ )^3} = \boxed{0}$$

Na origem o divergente é infinito e zero em qualquer outro lugar...

Rotacional.

$$\nabla \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

Interpretação geométrica. Mede o quanto $\vec{v}$ rotaciona em torno de um eixo. Novamente o sinal é dado pela regra da mão direita

Operações com Derivados

Algumas regras: somas e multiplicação por escalar

$$\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g \; ; \; \nabla \cdot (\vec{A}+\vec{B}) = \nabla \cdot \vec{A} + \nabla \cdot \vec{B}$$

$$\nabla \times (\vec{A}+\vec{B}) = (\nabla \times \vec{A}) + (\nabla \times \vec{B})$$

$$\nabla(kf) = k \nabla f \; ; \; \nabla \cdot (k\vec{A}) = k \, \nabla \cdot \vec{A} \; ; \; \nabla \times k(\vec{A}) = k(\nabla \times \vec{A})$$

produtos

(i) $\nabla(fg) = f\nabla g + g \nabla f$

(ii) $\nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A}) + (A \cdot \nabla)B + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}$

(iii) $\nabla \cdot (f\vec{A}) = f(\nabla \cdot \vec{A}) + \vec{A} \cdot (\nabla f)$

(iv) $\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B})$

$$(v) \quad \nabla \times (f\vec{A}) = f\,(\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \times (\nabla f)$$

$$(vi) \quad \nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A} - (\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B} + A(\nabla\cdot\vec{B}) - \vec{B}\,(\nabla\cdot\vec{A})$$

Algumas provas de cada uma destas relações são um tanto trabalhosas, mas todas podem ser feitas utilizando-se das regras de derivadas ordinárias, primeiramente utilizando as coordenadas e depois reagrupando.

Exemplo: $\nabla\cdot(f\vec{A}) = \frac{\partial}{\partial x}(f A_x) + \frac{\partial}{\partial y}(f A_y) + \frac{\partial}{\partial z}(f A_z)$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x} A_x + f\frac{\partial A_x}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial y} A_y + f\frac{\partial A_y}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial z} A_z + f\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)$$

$$= \boxed{(\nabla f)\cdot\vec{A} + f\,(\nabla\cdot\vec{A})}$$

Podemos formular 3 quocientes.

$$\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$$

$$\nabla\cdot\left(\frac{\vec{A}}{g}\right) = \frac{g(\nabla\cdot\vec{A}) - \vec{A}\cdot(\nabla g)}{g^2}$$

$$\nabla\times\left(\frac{\vec{A}}{g}\right) = \frac{g\,(\nabla\times\vec{A}) + \vec{A}\times(\nabla g)}{g^2}$$