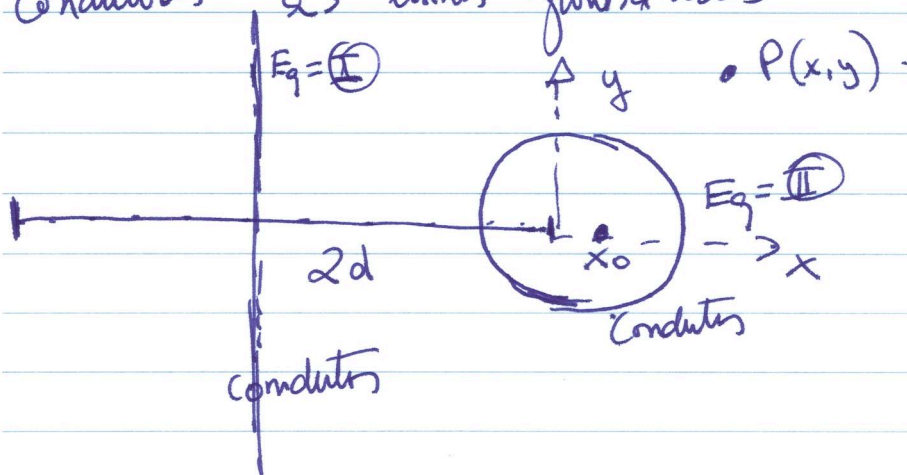


Note que a solução encontrada pode ser zero onde $+n$ e $-n$ são imagens e os condutores as linhas pontilhadas



Separação de Variáveis:

Para resolver a equação de Laplace $\nabla^2 V(x, y, z)$, procuramos por uma solução que seja o produto de funções de apenas uma variável cada.

$$V(x, y, z) = f_1(x) f_2(y) f_3(z)$$

$$\therefore \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow f_2(y) \frac{\partial^2 f_1(x)}{\partial x^2} + f_1(x) \frac{\partial^2 f_2(y)}{\partial y^2} = 0$$

$\therefore V(x, y)$ tem-se e se estendo p/ o caso 3-D

$$\frac{1}{f_1(x)} \frac{d^2 f_1(x)}{dx^2} + \frac{1}{f_2(y)} \frac{d^2 f_2(y)}{dy^2} + \frac{1}{f_3(z)} \frac{d^2 f_3(z)}{dz^2} = 0$$

$$\frac{1}{f_1} \frac{d^2}{dx^2} f_1 + \frac{1}{f_2} \frac{d^2}{dy^2} f_2 = - \frac{1}{f_3} \frac{d^2}{dz^2} f_3$$

$K(x, y)$

$=$

$K(z)$

$\Rightarrow \therefore K = \text{cte}$

função de x e y
distrito todo

função de z
distrito todo

$$\boxed{\frac{d^2}{dz^2} f_3 + K^2 f_3 = 0}$$

oscilador harmônico

$$\frac{1}{f_2} \frac{d^2}{dy^2} f_2 = K^2 - \frac{1}{f_1} \frac{d^2}{dx^2} f_1 = -m^2$$

$m(y)$

$m(x)$

$\therefore m = \text{cte}$

e novamente

$$\therefore \boxed{\frac{d^2}{dy^2} f_2 + m^2 f_2 = 0}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2}{dx^2} f_1 - (K^2 + m^2) f_1 = 0$$

$$\therefore f_3 = A \cos(Kz + \theta_0)$$

$$f_2 = B \cos(my + \phi_0)$$

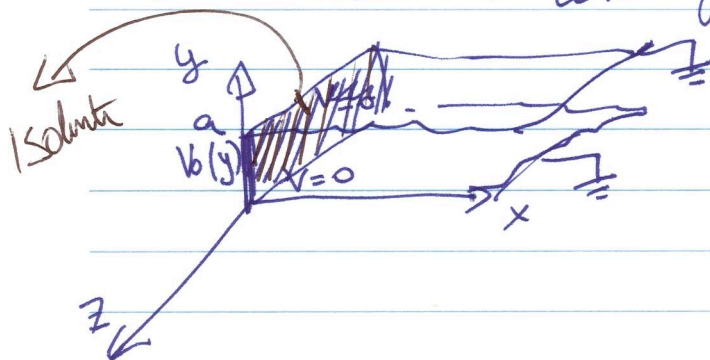
$$f_1 = C e^{px} + D e^{-px}$$

$$\theta = \sqrt{K^2 + m^2}$$

$\therefore$ uma solução possível será:

$$\boxed{V(x, y, z) = AB(C e^{px} + D e^{-px}) \cos(Kz + \theta_0) \cos(my + \phi_0)}$$

Vamos resolver o caso particular.



condições

(1) $V=0$ p/ $y=0$

(2) $V=0$ p/ $y=a$

(3) $V=V_0(y)$ p/ $x=0$

(4) $V \rightarrow 0$ $x \rightarrow \infty$

$$V(x,y) = X(x) Y(y)$$

$$\therefore \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = C_1 \quad \text{e} \quad \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = C_2 \quad \text{e} \quad C_1 + C_2 = 0$$

ou como vimos antes.

devido as
condições teremos
 $f(x) + f(y) = 0$

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = k^2 X \quad ; \quad \frac{d^2 Y}{dy^2} = -k^2 Y$$

$$V(x,y) = (A e^{+kx} + B e^{-kx}) \underbrace{(C' \sin ky + D' \cos ky)}_{\text{ou } E \cos(ky + \theta_0)}$$

Impondo as condições de contorno.

(4) p/ que $x \rightarrow \infty$ $V=0$ então $A=0$

$$\therefore V(x,y) = e^{-kx} (C \sin ky + D \cos ky)$$

p/ (1) mas que $D=0$ $\therefore$

$$V(x,y) = C e^{-kx} \sin ky$$

(2) $\sin ka = 0 \therefore k = \frac{n\pi}{a} \quad n = 1, 2, 3, \dots$

Note que a menos que $V_0(y)$ tenha uma forma do tipo $\sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right)$ será impossível satisfazer a cond. de contorno em $x=0$.

Mas a solução encontrada tem infinitos casos possíveis, lembrando do Teo. (I);

Podemos propor uma combinação linear como solução geral.

$$V = \sum \alpha_i V_i \quad \dots$$

$$V(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\frac{n\pi x}{a}} \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right)$$

Aplicando (3)

$$V(0, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) = V_0(y)$$

Série de Fourier.

Multiplicamos por $\sin\left(\frac{n'\pi y}{a}\right)$ $\forall n' > 0$ e integramos

e integramos no intervalo $0 \rightarrow a$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \int_0^a \underbrace{\sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \sin\left(\frac{n'\pi y}{a}\right)}_{\substack{n \neq n' \Rightarrow 0 \\ n = n' \Rightarrow \frac{a}{2}}} dy = \int_0^a V_0(y) \sin\left(\frac{n'\pi y}{a}\right) dy$$

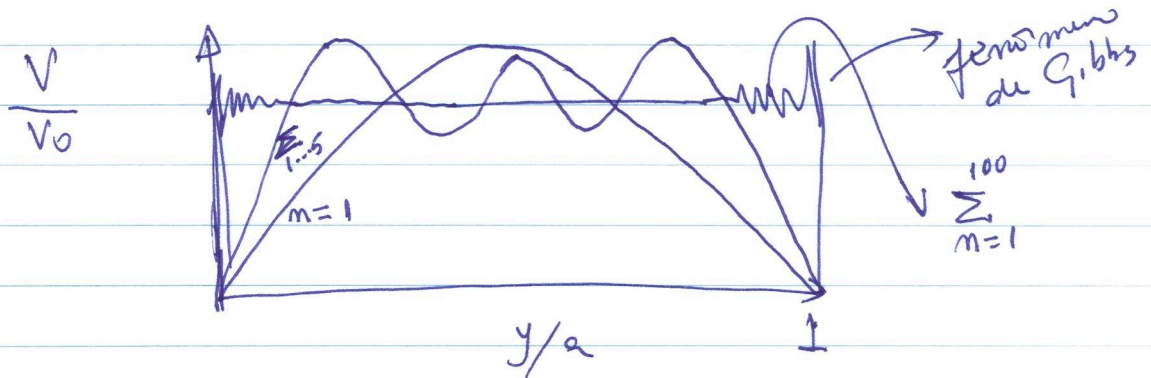
É possível concluir que só sobra $n' = n$

$$C_n = \frac{2}{a} \int_0^a V_0(y) \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) dy$$

No exemplo

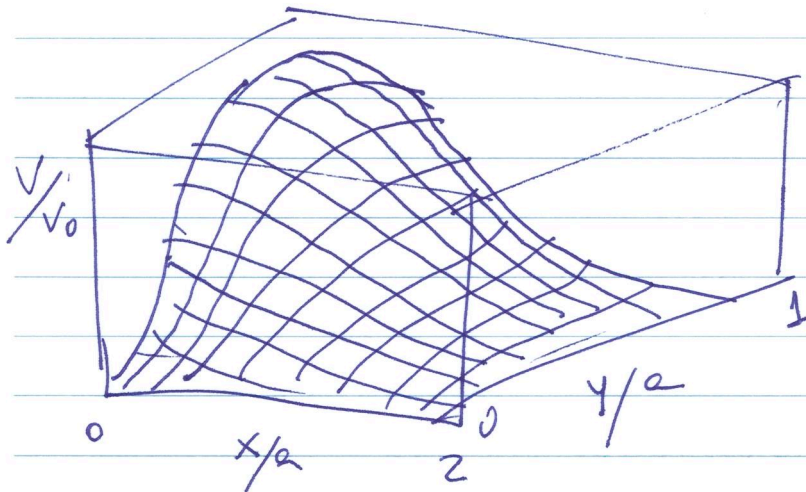
$$C_n = \frac{2V_0}{a} \int_0^a \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) dy = \frac{2V_0}{n\pi} (1 - \cos n\pi) = \begin{cases} 0; n \text{ par} \\ \frac{4V_0}{n\pi}; n \text{ ímpar} \end{cases}$$

$$\therefore V(x,y) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n} e^{-\frac{n\pi x}{a}} \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right)$$



Fazendo a soma pode-se concluir que a série infinita converge para:

$$V(x,y) = \frac{2V_0}{\pi} \tan^{-1} \left[\frac{\sin(\pi y/a)}{\sinh(\pi x/a)} \right]$$



Vale mais a pena fazer um gráfico no computador!!

Existem vários outros exemplos interessantes e exercícios nos livros texto! (Veja o 3.4; 3.5 ...)

Coordenadas Esféricas.

o/ objetos com formato esférico!

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0$$

o/ pátilor vamos assumir simetria azimutal ou
 sym; V independente de ϕ $\therefore \rightarrow$ Dependente de $\phi \rightarrow$ Pos-Grad
 (JACKSON!!!)

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) = 0$$

$\downarrow$
 repense
 para muita
 conta!!

$$V(r, \theta) = R(r) \Theta(\theta)$$

$$\therefore \underbrace{\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right)}_{\text{I}} + \underbrace{\frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left[\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right]}_{\text{II}} = 0$$

Novamente

$$\text{I} \text{ e } f(r) \quad \text{e} \quad \text{II} \text{ e } g(\theta) \quad \therefore f(r) + g(\theta) = 0$$

$$C_1 = -C_2 \quad \text{e} \quad \text{escolhamos } C_1 = l(l+1) !!$$

Seis conveniente!

$$\therefore \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) = l(l+1) R$$

A solução desta parte é simples, basta jogar uma

Solução proposta como .

$$R = r^n$$

$$\therefore \frac{d}{dr} (r^2 n r^{n-1}) = l(l+1) r^n$$

$$n \frac{d}{dr} (r^{n+1}) = l(l+1) r^n$$

$$n(n+1) \cancel{r^n} = l(l+1) \cancel{r^n}$$

$$\therefore n^2 + n - l(l+1) = 0$$

$$n = \frac{-1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4l(l+1)} \Rightarrow n = -\frac{1}{2} \pm \left(\frac{1}{4} + l^2 + l\right)^{1/2}$$

$$\therefore n = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2} \quad \therefore n = -\frac{1}{2} \pm \left(l + \frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore n \begin{cases} = l \\ = -(l+1) \end{cases}$$

$$\therefore R = A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}}$$

$$\frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = -l(l+1) \Theta$$

8/ A parte angular, a solução não é trivial! e é conhecida como Polinômios de Legendre.

$$\Theta(\theta) = P_l(\cos\theta)$$

Pode ser obtido com uma equação recursiva: Fórmula de Rodrigues.

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \left(\frac{d}{dx} \right)^l (x^2 - 1)^l \quad l \geq 0 \text{ inteiro}$$

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{(3x^2 - 1)}{2}$$

$$\text{sendo } x = \cos \theta$$

$$P_3(x) = (5x^3 - 3x)/2$$

Ainda existe o método dos jacois geradores onde os polinômios de Legendre aparecem como coeficientes de uma expansão em série de Taylor (Detalhes: Butkov, Mathematical Physics).

Lembrando ainda que assim como na série de Fourier, os polinômios de Legendre possuem uma relação de ortogonalidade.

$$\int_{-1}^1 P_l(x) P_{l'}(x) dx = \int_0^\pi P_l(\cos \theta) P_{l'}(\cos \theta) \sin \theta d\theta$$

$$= \begin{cases} 0 & l \neq l' \\ \frac{2}{2l+1} & l' = l. \end{cases}$$

Finalmente:

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta)$$

onde A_l e B_l serão determinados pelas condições de contorno do problema.

Exemplo 3.6 | Se o potencial na superfície de uma carga esférica de raio R é $V_0(\theta)$; Encontre o potencial dentro da esfera.

Lembrando que:
$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta)$$

Na origem a solução ^{diverge} ~~explode~~ se $B_l \neq 0 \therefore \boxed{B_l = 0}$

Na superfície da esfera, a solução está dada.

$$r=R: \sum_{l=0}^{\infty} A_l R^l P_l(\cos \theta) = V_0(\theta) \quad \textcircled{I}$$

Podemos usar a condição de ortogonalidade das funções de Legendre e multiplicar por $P_{l'}(\cos \theta)$ dos dois lados.

$$\int_{-1}^1 P_l(x) P_{l'}(x) dx = \begin{cases} 0 & l \neq l' \\ \frac{2}{2l+1} & \text{se } l = l' \end{cases}$$

$$\therefore A_l R^l \frac{2}{2l+1} = \int_0^\pi V_0(\theta) P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta$$

$$\therefore \boxed{A_l = \frac{2l+1}{2R^l} \int_0^\pi V_0(\theta) P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta}$$

A solução depende de encontrar A_l ; ou seja o resultado da integral.

Se pudermos escrever o potencial como um polinômio podemos comparar diretamente resultados e "descobrir" quem são os coeficientes necessários p/ a solução.

Por exemplo se $V_0(\theta) = K r m^2 / \left(\frac{\theta}{2}\right)$

$$\therefore V_0(\theta) = \frac{K}{2} (1 - \cos \theta)$$

MTS se $P_0(\cos \theta) = 1$

$$P_1(\cos \theta) = \cos \theta$$

$$\therefore V_0(\theta) = \frac{K}{2} (P_0(\cos \theta) - P_1(\cos \theta))$$

Investigando $\textcircled{I}$ $\rightarrow$ (página anterior!) descobrimos que ϵ são verdade $\pm \begin{cases} l=0 \\ l=1 \end{cases}$

$$\therefore A_0 R^0 P_0(\cos \theta) + A_1 R P_1(\cos \theta) = \frac{K}{2} P_0(\cos \theta) - \frac{K}{2} P_1(\cos \theta)$$

$$\therefore A_0 = \frac{K}{2} \quad \text{e} \quad A_1 = -\frac{K}{2R}$$

$$\therefore V(r, \theta) = \frac{K}{2} \left[1 - \frac{r}{R} \cos \theta \right]$$

E como ficar a solução p/ V fora do esf.?

$$V \rightarrow 0 \quad r \rightarrow \infty \quad \therefore \boxed{A_l = 0}$$

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta)$$

mas na superfície, sabemos que $V(R, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{R^{l+1}} P_l(\cos \theta) = V_0(\theta)$

$$\therefore \frac{B_l}{R^{l+1}} \frac{2}{2l+1} = \int_0^\pi V_0(\theta) P_l'(\cos \theta) \sin \theta d\theta$$

$$\text{ou } B_l = \frac{2l+1}{2} R^{l+1} \int_0^\pi V_0(\theta) P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta$$

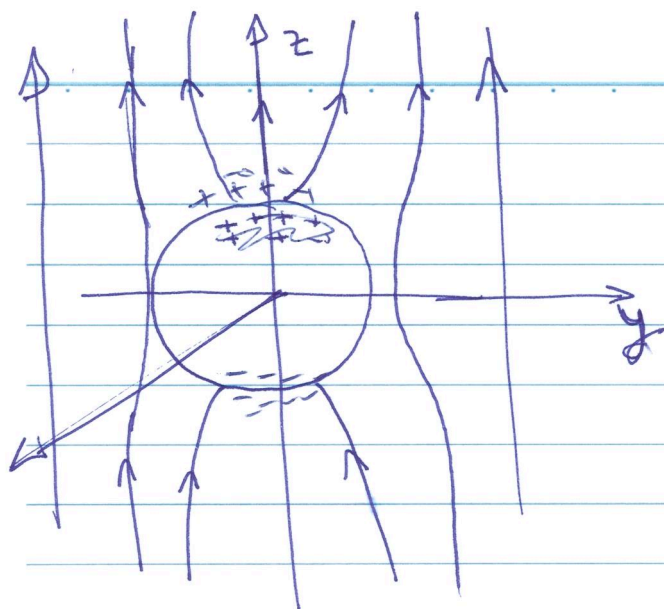
Se novamente o potencial for o do caso anterior então -

$$\frac{k}{2} [P_0(\cos \theta) - P_1(\cos \theta)] = \frac{B_0}{R} P_0(\cos \theta) + \frac{B_1}{R^2} P_1(\cos \theta)$$

$$\therefore \boxed{V(r, \theta) = \frac{k}{2} \left[\frac{R}{r} - \frac{R^2}{r^2} \cos \theta \right]}$$

Ex 3.8

p/ superfície ~~condutora~~ não carregada (mas não aterrada!) na presença de um campo $\vec{E} = E_0 \hat{z}$



A superfície da esfera
é uma equipotencial!

Se ela for igual a $V(R, \theta) = 0$,
por simetria o plano xy
é igual a uma equipotencial

$$V_{xy} = 0 \quad \bullet$$

Agora se $R \rightarrow \infty$ $\vec{E} \rightarrow E_0 \hat{z}$

$$\therefore \boxed{V \rightarrow - \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = -E_0 z + C}$$

$$\therefore \boxed{V \rightarrow -E_0 z + C} \quad \text{se } \pi \gg R$$

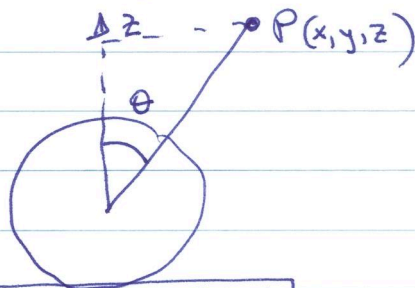
Mas em $z=0$ $V_{xy,0} = 0 \quad \bullet \quad \boxed{C=0}$

(Como continuamos não sabemos P.!!)

Nossos condições p/o problema serão

① $V=0 \quad r=R$

② $V \rightarrow -E_0 \underbrace{z}_{\cos \theta} \quad r/\pi \gg R$



$$\therefore A_\ell R^\ell + \frac{B_\ell}{R^{\ell+1}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{B_\ell = -A_\ell R^{2\ell+1}}$$

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l \left(r^l - \frac{R^{2l+1}}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta)$$

Aplicando (2) o segundo termo é desprezível

$$\frac{R^{2l+1}}{r^{l+1}} \rightarrow 0$$

$$\therefore \sum A_l r^l P_l(\cos \theta) = -E_0 r \cos \theta$$

Somente precisamos de $l=1$

$$\therefore A_1 r \cos \theta = -E_0 r \cos \theta \therefore \boxed{A_1 = -E_0}$$

$$\cancel{A_l = 0 \text{ for } l \neq 1} \quad A_l = 0 \text{ for } l \neq 1$$

$$\boxed{V(r, \theta) = -E_0 \left(r - \frac{R^3}{r^2} \right) \cos \theta}$$

$$\text{ou } V(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta + \frac{E_0 R^3}{r^2}$$

devido ao
campo externo
 $\vec{E}_0 = E_0 \hat{z}$

$\frac{R^3}{r^2}$
devido às
cargas induzidas!

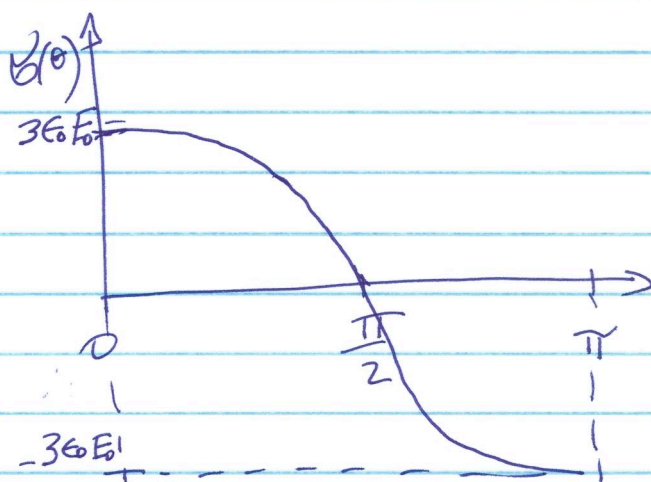
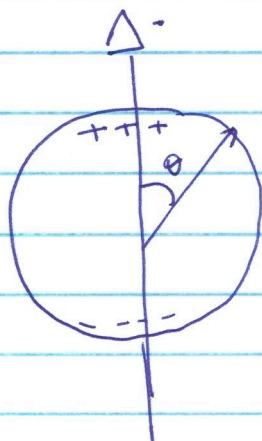
Podemos agora calcular o campo elétrico em todo o espaço!

$$\left\{ \begin{array}{l} E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = +E_0 \left(1 - \frac{2R^3}{r^3}\right) \cos\theta \\ E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = -E_0 \left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right) \sin\theta \end{array} \right\} \quad r/r \geq R$$

Obviamente $\phi(\theta) = -E_0 \vec{\nabla} V \cdot \hat{n} \Big|_{R=R} \therefore \phi(\theta) = E_0 \underbrace{\left(-\frac{\partial V}{\partial r}\right)}_{E_r}$

$$\therefore \phi(\theta) = E_0 \left[+E_0 \left(1 + \frac{2R^3}{R^3}\right) \cos\theta \right]$$

$$\boxed{\phi(\theta) = 3E_0 E_0 \cos\theta}$$



$$Q = \int \rho(\theta) da = \int \phi(\theta) R^2 \sin\theta d\theta d\phi$$

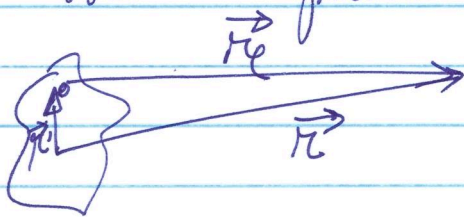
$$= R^2 3E_0 E_0 2\pi \int_0^\pi \sin\theta d\theta$$

$$\boxed{Q = 0}$$

Indicador inicial é esfera neutra carregada $Q=0$

3.4 || Expansão Multipolar

Potencial aproximado a distâncias grandes.



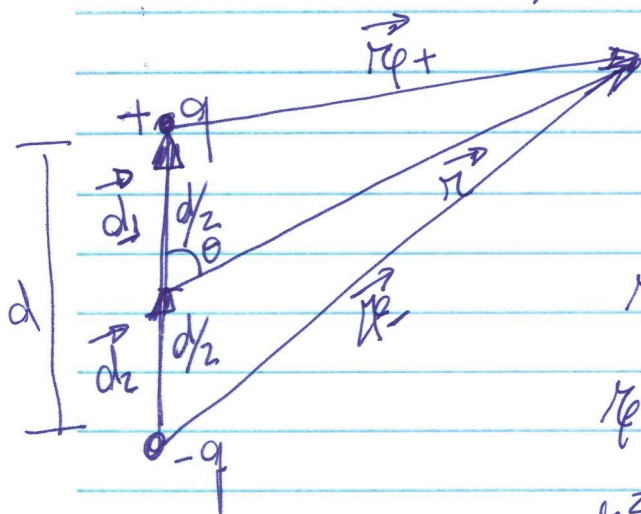
$$r/r_e \gg r_e$$

$$V \rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$$

Mas $V \rightarrow 0$ não é exatamente o que queremos, mesmo se q for muito pequeno. Também queremos manter o limite de $r \rightarrow \infty$. Queremos algo mais detalhado.

Dipolo Elétrico

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_{e+}} - \frac{q}{r_{e-}} \right)$$



$$\therefore \vec{r}_{e+} = \vec{r} - \vec{d}_1$$

$$\vec{r}_{e-} = \vec{r} + \vec{d}_2$$

$$r_{e+}^2 = (\vec{r} - \vec{d}_1) \cdot (\vec{r} - \vec{d}_1)$$

$$r_{e+}^2 = r^2 + \frac{d^2}{4} - r d \cos \theta$$

$$r_{e-}^2 = r^2 + \frac{d^2}{4} + r d \cos \theta$$

$$\therefore r_{e\pm}^2 = r^2 \left(1 \mp \frac{d}{r} \cos \theta + \frac{d^2}{4r^2} \right)$$

$$\therefore \frac{1}{r_{e\pm}} \approx \frac{1}{r} \left(1 \mp \frac{d}{r} \cos \theta + \frac{d^2}{4r^2} \right)^{-1/2}$$

Se muito pequeno se comparado a $\frac{d}{r}$

pequeno $\frac{d \cos \theta}{r} = x$ pequeno

$$(1 \mp x)^{-1/2} \approx 1 \pm \frac{1}{2}x \mp \frac{3}{8}x^2 + \dots$$

$$\therefore \frac{1}{r_{\pm}} \approx \frac{1}{r} \left(1 \pm \frac{d \cos \theta}{2r} \right)$$

$$\therefore \frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \approx \frac{d \cos \theta}{r^2}$$

$$\therefore V(r) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q d \cos \theta}{r^2}$$

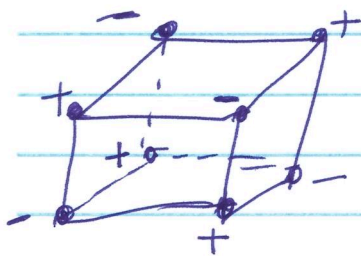
Note:

+ $\bullet$ (Monopolo)
 $V \sim \frac{1}{r}$

- $\bullet$ + $\bullet$ (Dipolo)
 $V \sim \frac{1}{r^2}$

Podemos mostrar: + $\bullet$ - $\bullet$

Quadrupolo
 $V \sim \frac{1}{r^3}$



Octupolo
 $V \sim \frac{1}{r^4}$