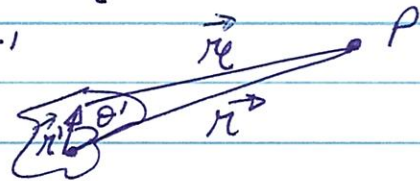


Vamos resolver agora p/ um distribui^o arbit^{ria} localizada de cargas como um s^erie de pot^{ncias} em $\frac{1}{r}$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{r_p} \rho(\vec{r}') dV'$$



Novamente $\vec{r}_p = \vec{r} - \vec{r}'$:

$$r_p^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta' = r^2 \left[1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\left(\frac{r'}{r}\right)\cos\theta' \right]$$

ou $r_p = r \sqrt{1 + \epsilon}$ com $\epsilon = \left(\frac{r'}{r}\right) \left(\frac{r'}{r} - 2\cos\theta'\right)$

$$\frac{1}{r_p} = \frac{1}{r} (1 + \epsilon)^{-1/2} = \frac{1}{r} \left[1 - \frac{1}{2}\epsilon + \frac{3}{8}\epsilon^2 - \frac{5}{16}\epsilon^3 + \dots \right]$$

Taylor.

$$\therefore \frac{1}{r_p} = \frac{1}{r} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r'}{r}\right) \left(\frac{r'}{r} - 2\cos\theta'\right) + \frac{3}{8} \left(\frac{r'}{r}\right)^2 \left(\frac{r'}{r} - 2\cos\theta'\right)^2 - \frac{5}{16} \left(\frac{r'}{r}\right)^3 \left(\frac{r'}{r} - 2\cos\theta'\right)^3 + \dots \right]$$

$$\frac{1}{r_p} = \frac{1}{r} \left[1 + \frac{r'}{r} \cos\theta' + \frac{1}{2} \left(\frac{r'}{r}\right)^2 (3\cos^2\theta' - 1) + \frac{1}{2} \left(\frac{r'}{r}\right)^3 (5\cos^3\theta' - 3\cos\theta') + \dots \right]$$

Olhando a série com muito cuidado vemos que são polinômios de $\left(\frac{r'}{r}\right)^n$ com coef. muito especiais!

$$\frac{1}{r_0} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos \theta')$$

onde $P_n(\cos \theta')$ são os polinômios de Legendre.

Voltando no equac de distribuição temos:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \int_V (r')^n P_n(\cos \theta') \rho(\vec{r}') dV'$$

ou explicitamente!

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} \int \rho(\vec{r}') dV' + \frac{1}{r^2} \int r' \cos \theta' \rho(\vec{r}') dV' + \frac{1}{r^3} \int r'^2 \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta' - \frac{1}{2} \right) \rho(\vec{r}') dV' + \dots \right]$$

Este é a Expansão Multipolar

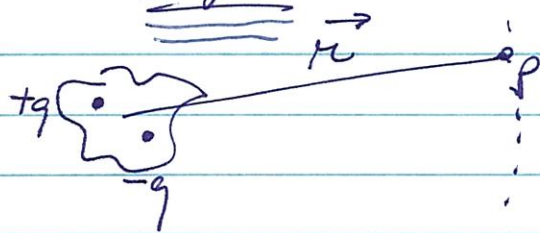
Nota que a expansão multipolar começa com o termo de ~~potência~~ monopolo $1/r$ onde

$$V_{\text{mon}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \quad \text{onde } Q = \int \rho dV$$

Exatamente que esperar-se

V_{mon} é a solução exata ρ uma carga no origem

Se a carga total se anula, o termo dominante é o dipolo.



$$V_{\text{dip}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \int \vec{r}' \rho(\vec{r}') dV'$$

$$\vec{r} \cdot \vec{r}' = r r' \cos\theta$$

$$V_{\text{dip}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{r} \cdot \underbrace{\int \vec{r}' \rho(\vec{r}') dV'}_{\vec{p}}$$

Seja $\boxed{\vec{p} \equiv \int \vec{r}' \rho(\vec{r}') dV'}$ Momento de dipolo

Note, se conhecermos $\rho(\vec{r}')$ podemos calcular o momento de dipolo facilmente!

A água por exemplo é um bom ~~exemplo~~ ^{caso} de distribuição do tipo dipolar

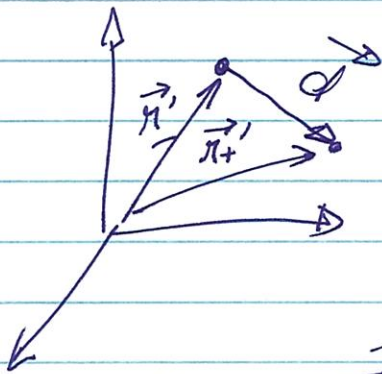
O momento de dipolo de uma distribuição de cargas é determinado pela geometria (tamanho, forma e densidade)

¶ Um conjunto de cargas pontuais podemos obter

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^n q_i \vec{r}_i'$$

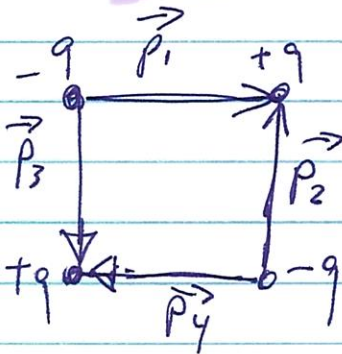
Para cargas iguais e opostas $\vec{p} = q\vec{r}_+' - q\vec{r}_-' = q(\vec{r}_+' - \vec{r}_-')$

$$\boxed{\vec{p} = q\vec{d}}$$



$\vec{p} \parallel \vec{d}$ que aponta da carga negativa p/ a positiva!

Como $\vec{p}$ é um vetor, soma-se
Como vetores, mas depende da soma p/ $\sum q = 0$



$$\boxed{\vec{p} = 0}$$

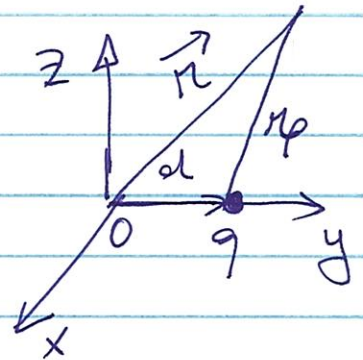
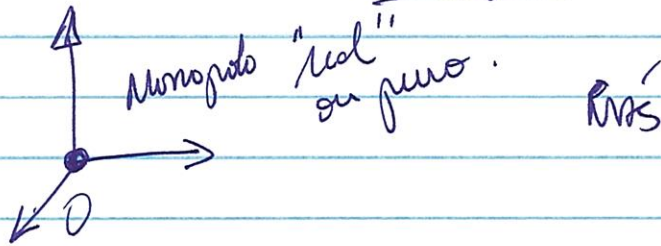
Não ~~depende~~ do referencial!

Obviamente neste caso, o termo de quadrupolo é que domina!

pois monopolo = 0
dipolo = 0

(3.4.3)

Origem das coordenadas em uma expansão multipolar.



$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_p}$$

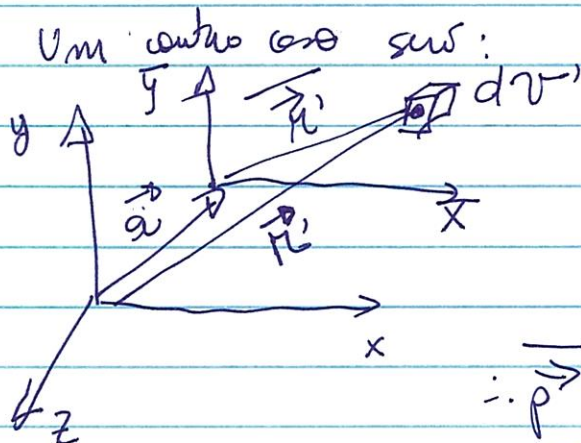
Mas temos como calcular.

um termo de dipolo pelo equoc $\vec{P} = \sum_{i=1}^n q_i \vec{r}_i$

$$\therefore \boxed{\vec{P} = q d \hat{y}}$$

este ser ~~para~~ ~~termo~~ termo de

dipolo na expansão multipolar, apesar de sabermos qual o valor exato de V .



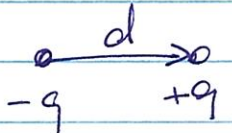
$$\begin{aligned} \therefore \vec{P} &= \int \vec{r}' \rho(\vec{r}') dV' \\ &= \int (\vec{r}' - \vec{a}) \rho(\vec{r}') dV' \end{aligned}$$

$$\therefore \vec{P} = \int \vec{r}' \rho(\vec{r}') dV' - \vec{a} \int \rho(\vec{r}') dV'$$

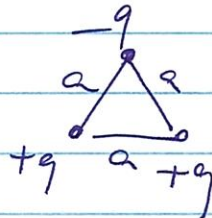
$$\boxed{\vec{P} = \vec{P} - a Q}$$

O valor de $\vec{p}$

Note $\therefore$ que depende muito da escolha da origem.
 A menos que $Q=0$. Portanto em uma distribuição onde a carga total é zero, não haverá dependência da escolha da origem.



Independente



Depende da origem!

3.4.4

Campo Elétrico do Dipolo

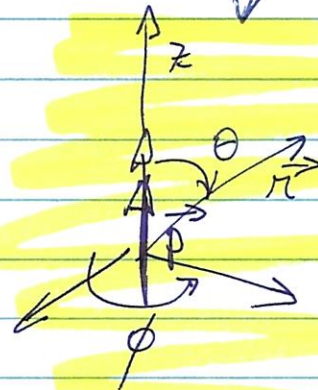
$$V_{dp}(r, \theta) = \frac{\vec{A} \cdot \vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$\therefore \vec{E} = -\nabla V$$

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

$$E_\phi = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0$$



$$\therefore \boxed{\vec{E}_{diplo}(r, \theta) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta})}$$

Note-se notar que o gradiente basicamente

Multiplica todos os termos do potencial por $-\frac{1}{r^2}$

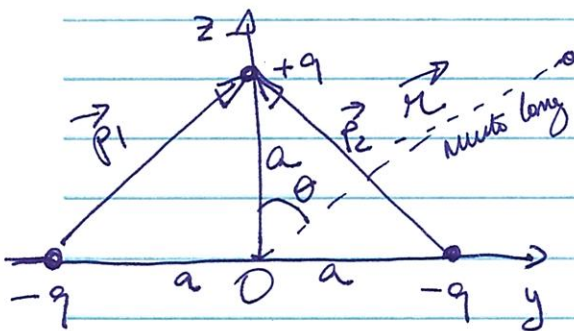
$\vec{E}$ monopolo $\propto \frac{1}{r^2}$ (óbvio)

$\vec{E}$ dipolo $\propto \frac{1}{r^3}$

$\vec{E}$ quadrupolo $\propto \frac{1}{r^4}$

⋮

Problema 3.32



Na gnos. multipolo.

$Q = -q.$

∴ O termo de monopolo no sistema de coordenadas ao lado será o que

seguir esperamos: $V_{mono} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-q}{r}$

Cuidado!!!

$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 2p \cos 45^\circ \hat{z} = 2 \cdot q a \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$

→ Tentados usar, mas lembre $\sum q_i \neq 0 \therefore$ depende do ref.

$\vec{p} = \sum_i \vec{r}_i q_i$

$\therefore \vec{p} = +qa\hat{z} - q(-a)\hat{y} + (-q)a\hat{y}$

$\vec{p} = qa\hat{z}$

Nota $\vec{r}_i$ é medido a partir da origem!

$$\therefore V_{\text{dip}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos\theta}{r^2}$$

$$V(r, \theta) \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r} + \frac{a \cos\theta}{r^2} \right)$$

$$\vec{E}(r, \theta) \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r^2} \hat{r} + \frac{a}{r^3} (2 \cos\theta \hat{r} + \sin\theta \hat{\theta}) \right]$$

Campos Elétricos em Matéria

No caso de condutores vimos que o campo elétrico pode produzir uma distribuição das cargas, pois os elétrons livres (1 ou mais por átomo) podem mover-se livremente.

No caso de uma série de átomos moléculas (moléculas, sólidos líquidos e gases) os elétrons não têm esta liberdade, podendo apenas deslocar-se um pouco em relação ao núcleo positivo ao qual o mesmo está ligado.

No entanto, o efeito acumulativo em um dielétrico, pode ser impressionantemente importante ao final!