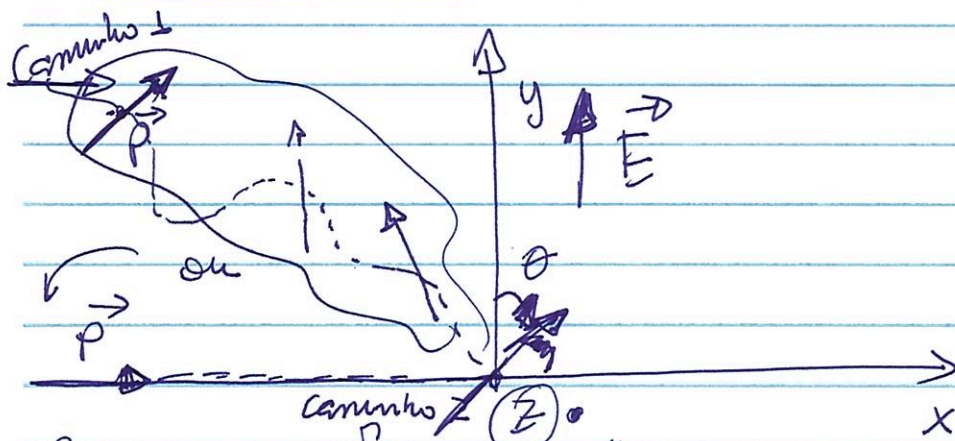


$\therefore$ Para um dipolo perfeito, $\vec{A} = (\vec{p} \times \vec{E}) + (\vec{r} \times \vec{F})$

Mesmo quando $\vec{E}$ não é uniforme!

Energia de um dipolo elétrico



Podemos no verdade escolher um direção qualquer $p/\vec{E}$, digamos no direção de $\hat{y}$. Como o trabalho

não depende do caminho no caso da força elétrica. (Força conservativa) $\Rightarrow \nabla \times \vec{E} = 0$ então. Escolhamos o

caminho mais conveniente $U = + \int_{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ pois $\vec{F} \perp d\vec{r}$

Se $\vec{E}$ não é uniforme, sempre escolhemos $\vec{r} \perp \vec{E}$.

Agora podemos nos mover até a posição final.

$$\vec{N} = \vec{p} \times \vec{E} = pE \sin \theta \hat{z}$$

$$U = + \int_{\pi/2}^{\theta} pE \sin \theta' \hat{z} \cdot (+d\theta')$$

$$U = pE(-\cos\theta) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^0 = -pE(\cos\theta - \cos\frac{\pi}{2})$$

$$\therefore U = -pE\cos\theta = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

4.14 Polarização

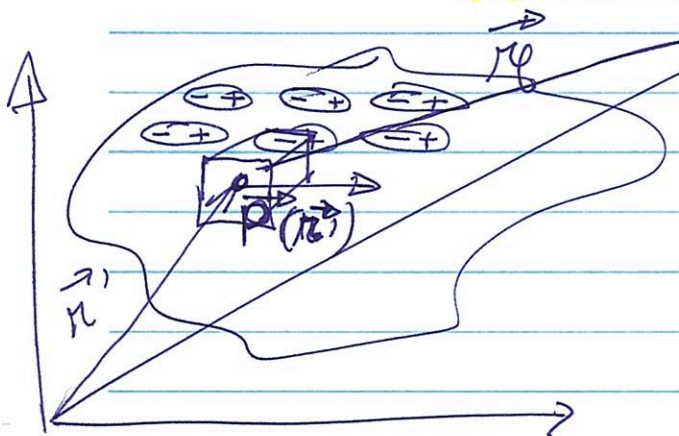
No caso anterior vimos a polarização em uma lâmina ou molécula. Agora podemos expandir o conceito p/ um volume de dielétrico.

Considerando um pequeno volume Δv de um dielétrico neutro; Se o mesmo for polarizado. Temos.

$$\vec{P} = \frac{1}{V} \int \vec{p}(\vec{r}) d\tau \quad \text{com } V \rightarrow 0 \text{ ou}$$

seja, $\vec{P}$ é o ~~dipolo~~ momento de dipolo ^{total} por unidade de volume.

ou $d\vec{p} = \vec{P} d\tau$ importante!



Se para um dipolo único ~~tínhamos~~

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}_0 \cdot \vec{p}(\vec{r})}{r_0^2}$$

Podemos tranquilamente substituir $\vec{p} \Rightarrow d\vec{p}$

$$\therefore V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\vec{r} \cdot \vec{P}(\vec{r}')}{r^2} dv' \quad \text{formula geral!}$$

Sabendo que $\nabla' \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{\vec{r}}{r^2}$

Note o sinal +
pois ∇' e
não ∇

$$\therefore V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \vec{P} \cdot \nabla' \left(\frac{1}{r} \right) dv'$$

Verá daqui

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_{V'} \nabla' \cdot \left(\frac{\vec{P}}{r} \right) dv' - \int_{V'} \frac{1}{r} (\nabla' \cdot \vec{P}(\vec{r}')) dv' \right]$$

Integremos por partes e lembrando que

$$\nabla \cdot (f \vec{A}) = (\nabla f \cdot \vec{A}) + f (\nabla \cdot \vec{A})$$

$$f = \frac{1}{r} \quad \text{e} \quad \vec{A} = \vec{P}(\vec{r}')$$

Usando $\oint$ e $\int$ quemos integrol o teorema do
divergência (Gauss)

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{1}{r} \vec{P} \cdot d\vec{a}' - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{1}{r} (\nabla' \cdot \vec{P}(\vec{r}')) dv'$$

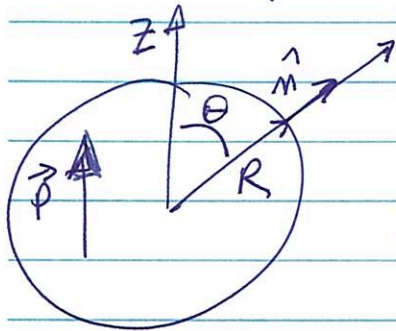
O primeiro termo é um o potencial de uma superfície carregada sendo $\phi_b \equiv \vec{P} \cdot \hat{n}$ onde $\hat{n}$ é a normal à superfície.

O segundo termo representa o potencial de um volume carregado com $\phi_b \equiv -\nabla \cdot \vec{P}$ $\phi_b = \text{densidade}$ **ATENÇÃO!**

$$\therefore V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\phi_b}{r} da' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\phi_b}{r} dv'$$

Em vez de calcular o potencial (e portanto também $\vec{E}$) de cada dipolo, podemos calcular os ~~os~~ potenciais devido uma distribuição de cargas ligadas no volume e na superfície.

Ex. Esfera uniformemente polarizada com raio R



No volume $\phi_b = 0$ pois é uniforme

$$\phi_b = \vec{P} \cdot \hat{n} = P \cos \theta \quad \sum \begin{pmatrix} + & - \\ - & + \\ + & - \\ - & + \end{pmatrix} = 0$$

No Exemplo 3.9 (Eq. 3.85, 3.86, 3.87)

$$V(r, \theta) = \begin{cases} \frac{P}{3\epsilon_0} r \cos \theta & r \leq R \\ \frac{PR^3}{3\epsilon_0 r^2} \cos \theta & r \geq R \end{cases}$$

devido a uma dist. de carga ϕ_b na superfície.

$$r \cos \theta = z \quad \therefore$$

$$\vec{E} = -\nabla V = -\nabla \left(\frac{P z}{3\epsilon_0} \right) \quad r / r \leq R$$

$\therefore$ Dentro do esfera $\left[\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{P z}{3\epsilon_0} \right) \hat{z} = -\frac{P}{3\epsilon_0} \hat{z} \right]$

$\vec{E} = \text{cte na direça } \hat{z} \text{ (contrário à } \vec{P})$

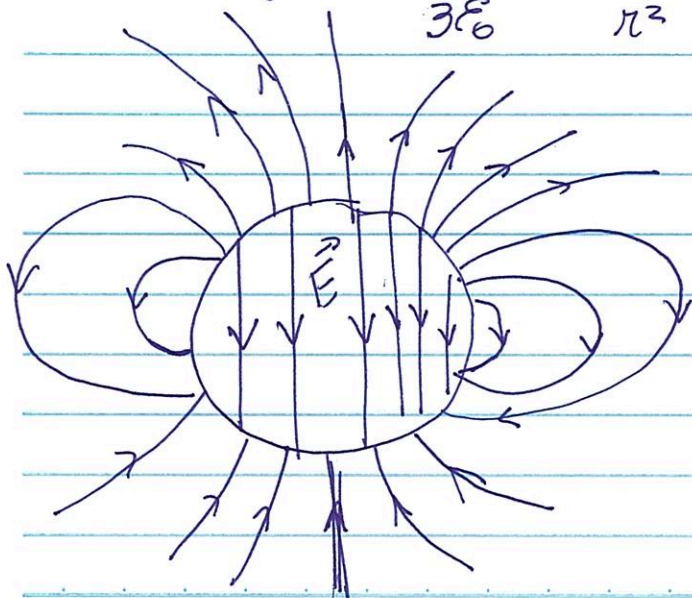
$r / r > R$; Como temos uma esfera, o potencial é de um dipolo perfeito.

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{P} \cdot \hat{r}}{r^2}$$

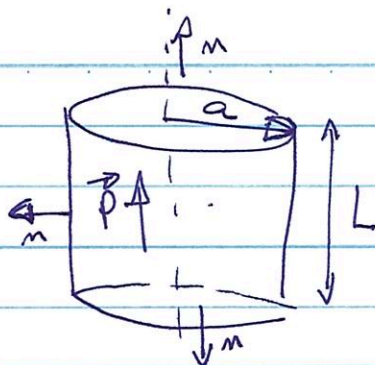
$$\vec{P} = \int_{V_{\text{esfera}}} \vec{P}' dv'$$

Seu $\vec{P} = \text{cte} \therefore \boxed{\vec{P} = \vec{P} \frac{4\pi R^3}{3}}$

$$\therefore V(\vec{r}) = \frac{1}{3\epsilon_0} R^3 \frac{\vec{P} \cdot \hat{r}}{r^2} = \frac{1}{3\epsilon_0} R^3 \frac{P \cos \theta}{r^2}$$



Probl. 4.11 //



$$\vec{P} = P_0 \hat{z}$$

→ Esta seria um bonequinho
Titonista de Bóris

Encontrar as cargas polarizadas ρ_b e σ_b e descrever o campo elétrico

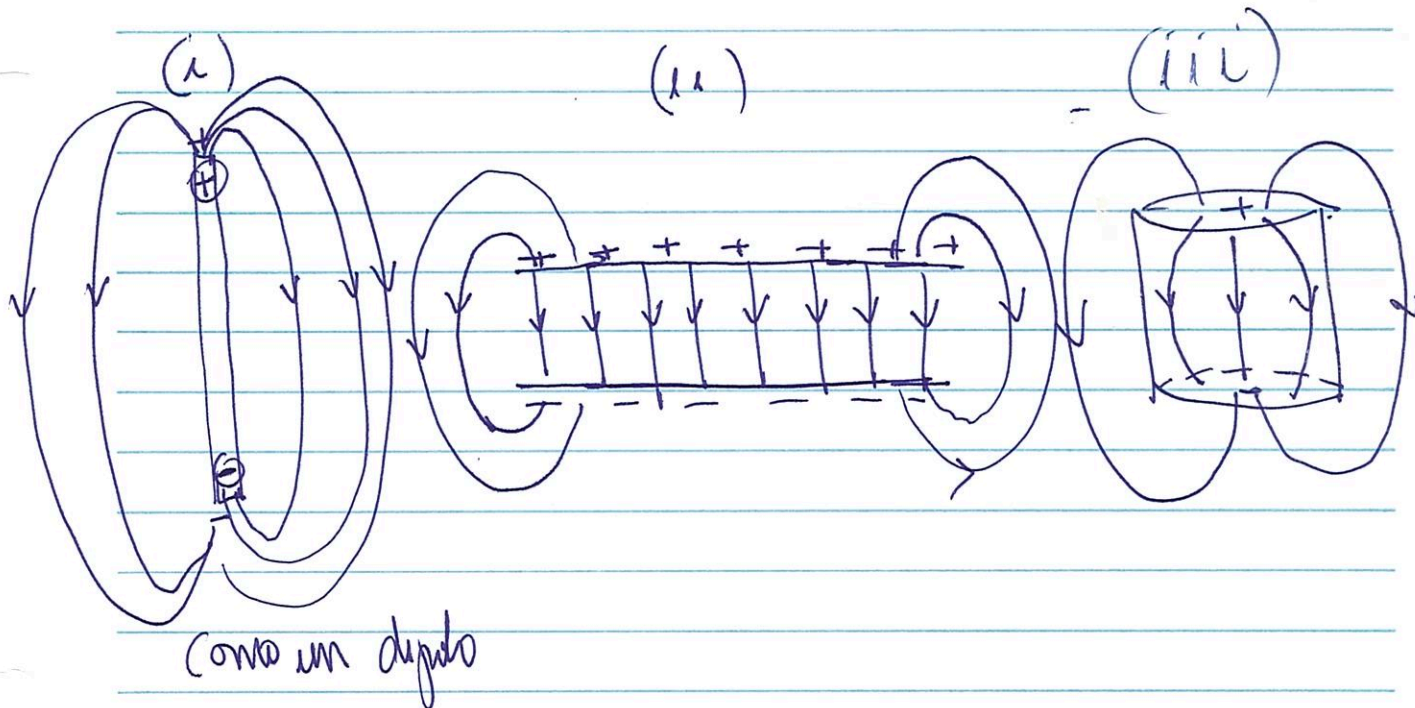
(i) $L \gg a$ (ii) $L \ll a$ e (iii) $L \approx a$

$$\rho_b = -\nabla \cdot \vec{P} = 0 \quad (\text{se } \vec{P} = \text{cte } \hat{z} \text{ então } \nabla \cdot \vec{P} = 0!)$$

Então $\sigma_b = \vec{P} \cdot \hat{n}$

$\sigma_b = 0$ nos laterais e
só nos opostos as tampas

$\sigma_p = +P_0$	(em cima)
$\sigma_p = -P_0$	(em baixo)



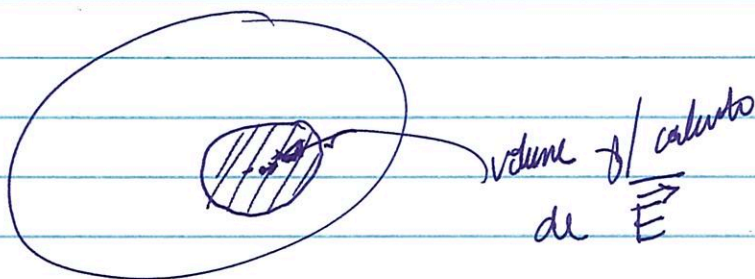
Campo elétrico no interior de um dielétrico

O cálculo do campo $\vec{E}$ fora do dielétrico pode ser facilmente calculado usando a soma de uma densidade de pequenos dipolos pelo expressão:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\vec{r}_p \cdot P(\vec{r}')}{r^3} dv'. \quad \textcircled{A}$$

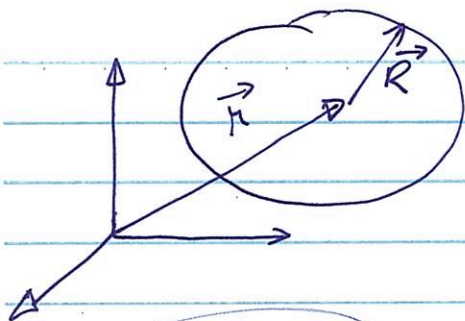
Nota no entanto que no caso externo podemos dizer que estamos longe dos dipolos microscópicos formados, mas p/ a situação dentro do dielétrico é difícil realmente ter esta abordagem.

O que de fato interessa é calcular o campo elétrico macroscópico (suficientemente longe dos átomos ou moléculas) que é devido de fato o campo elétrico médio em uma região pequena do dielétrico, mas suficientemente pequena que é de um único dielétrico.



volume de cálculo
de $\vec{E}$

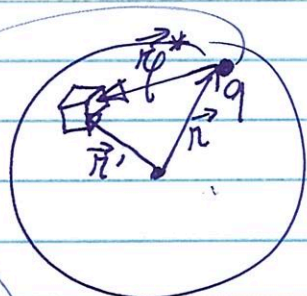
De fato veremos que o campo dentro do dielétrico ainda pode ser calculado usando a equação $\textcircled{A}$ acima.



$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_{\text{carga fora}} + \vec{E}_{\text{carga dentro}}$$

Vejamos o problema 3.41

IMPORTANTE! FAÇA!!!



$$\vec{r}^* = \vec{r}' - \vec{r} \quad !! \text{ Cuidado.}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{V} \int_V \vec{E}^* dV'$$

$$\text{mas } \vec{E}^* = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \frac{\hat{r}^*}{r^{*2}}$$

ou

(I)

$$\vec{E} = \frac{1}{\frac{4\pi R^3}{3}} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\vec{r}' - \vec{r}}{|\vec{r}' - \vec{r}|^3} dV'$$

Segundo a dens. de carga uniforme no esfera, poderíamos calcular o campo em $\vec{r}$ com Gauss.

$$\vec{E}_{\text{dentro}} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r} \quad \text{se } |\vec{r}| < R.$$

$$\vec{E}_{\text{fora}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\rho \frac{4\pi R^3}{3} \right) \frac{\hat{r}}{r^2} \quad \text{se } |\vec{r}| > R$$

Poderemos usar no entanto a definição de $\vec{E}$ e/ou este cálculo sem a Lei de Gauss.

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \rho dV' \quad \text{sendo } \rho = \text{cte.}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \rho(\vec{r}') dV' \quad (\text{II})$$

$\therefore$ (II) é igual a (I) se

$$\rho = \frac{-q}{\frac{4\pi R^3}{3}}$$

Deste modo, vemos que o $\vec{E}$ de uma carga em um esfera é

$$\vec{E} = -\frac{q\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 R^3} \quad \text{p/ } |\vec{r}| < R$$

$$\vec{E} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} \quad \text{p/ } |\vec{r}| > R.$$

Para uma distribuição qualquer de cargas, podemos usar o princípio da superposição (pequenos esferas de campo médio)

Dentro

$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^3} \sum q_i \vec{r}_i = -\frac{\vec{P}}{4\pi\epsilon_0 R^3} = -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$$

o campo médio dentro é qualquer dist. de cargas na esfera são $-\frac{1}{3\epsilon_0} \vec{P}$ ($\vec{P}$ é a polarização uniforme)

Note, assumindo que no núcleo da esfera que calculamos continuamente. $\vec{P}$ é maximamente uniforme!!!

Fora do esfere

$$\vec{E} = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sum q_i \vec{r}_i$$

Este resultado é exatamente o esperado p/ o caso de todas as cargas concentradas no ~~origem~~ centro do esfere!

Voltando p/ o caso do dielétrico, o campo no ponto $\vec{r}$ dentro do dielétrico tem contribuições das cargas fora e dentro.

$$\therefore \vec{E} = \vec{E}_{\text{fora}} + \vec{E}_{\text{dentro}}; \quad V = V_{\text{fora}} + V_{\text{dentro}}.$$

$$V_{\text{fora}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{fora}} \frac{\hat{r} \cdot \vec{P}(\vec{r}')}{r^2} dV'$$

Mas $\vec{E}_{\text{dentro}} = -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$ como vimos antes p/ uma distribuição qualquer de cargas.

Mas este é o valor que obtemos p/ o caso de um esfere com polarização uniforme, usando a equação.

$$V_{\text{dentro}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{dentro}} \frac{\hat{r} \cdot \vec{P}(\vec{r}')}{r^2} dV'$$

Deita forma, mesmo dentro do dielétrico podemos usar

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\hat{r} \cdot \vec{P}(\vec{r}')}{r^2} dV' \quad \text{p/ calcular o campo dentro do dielétrico!}$$

Note que tudo gira em torno do fato que o campo médio sobre qualquer esfera (devido às cargas internas) é o mesmo que o campo no centro de uma esfera uniformemente polarizada.

Note que a demonstração poderia ser feita p/ qualquer outro formato que não é esfera. (Veja Reitz cap. 4B)

Deslocamento Dielétrico

(4.3.1) Lei de Gauss em um Dielétrico.

Vimos que o efeito do polarização sobre cargas ligadas (bound)

$$\rho_b = -\nabla \cdot \vec{P} \quad (\text{volume}) \quad \text{e} \quad \sigma_b = \vec{P} \cdot \hat{n} \quad (\text{superfície}).$$

Se também temos cargas livres.

$$\rho = \rho_b + \rho_f \quad * \quad \text{Note que estamos em princípio deixando de fora } \vec{E}_b \rightarrow \text{isto tem implicações que obscuro!}$$

$$\therefore \epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = \rho = \rho_b + \rho_f = -\nabla \cdot \vec{P} + \rho_f$$

$\vec{E}$ é o campo gerado por todo mundo (livres e ligados!)

$$\therefore \nabla \cdot (\underbrace{\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}}_{\vec{D}}) = \rho_f$$

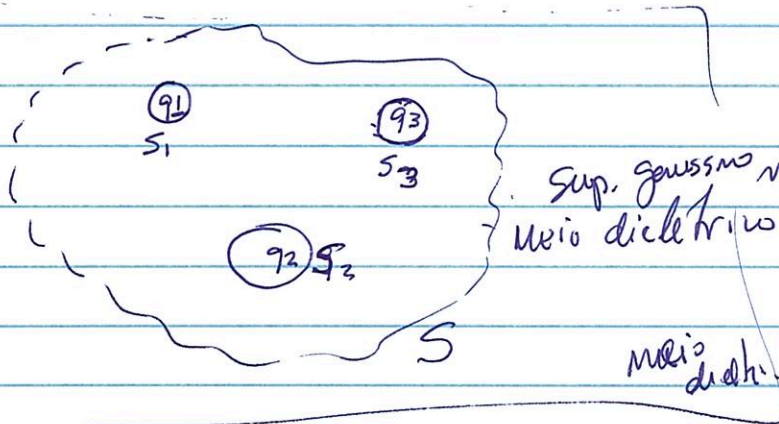
$\vec{D} \rightarrow$ deslocamento elétrico.

$$\vec{D} \equiv \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

ou $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f$

Lei de Gauss p/ dielétricos.

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{a} = Q_f \text{ (envolvida)}$$



$$\sum_i q_i = q_1 + q_2 + q_3 = Q_f$$

$$Q_p = \int_{S_1 + S_2 + S_3} \vec{P} \cdot \hat{n} da + \int_V (-\nabla \cdot \vec{P}) dv$$

Como não temos contornos do material dielétrico em S, então a contribuição de superfície será nula.

$$\therefore \cancel{Q_p = \int_{S_1 + S_2 + S_3} \vec{P} \cdot \hat{n} da}$$

Teo. Divergência.

$$Q_p = \cancel{\int_{S_1 + S_2 + S_3} \vec{P} \cdot \hat{n} da} + \left[- \oint_{S_1 + S_2 + S_3 + S_p} \vec{P} \cdot d\vec{a} \right]$$

$$Q_p = - \oint_S \vec{P} \cdot \hat{n} da \quad \therefore$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} da = \frac{1}{\epsilon_0} (Q + Q_p)$$

Reaproveitamos o resultado anterior