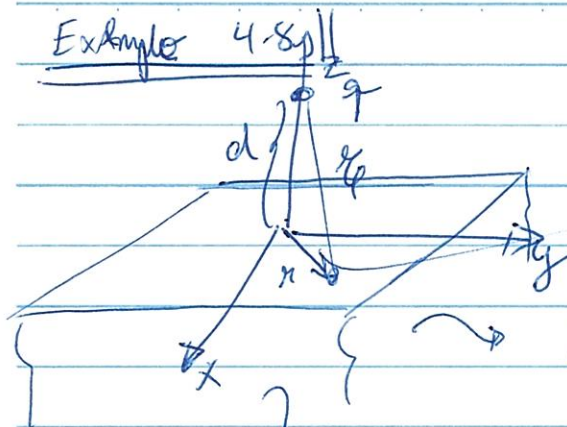


Exemplo 4.8

Força sobre a carga pontual q .Dieltico linear $\chi = \epsilon_0 \epsilon_r$

$$\rho_b = 0 \quad \text{e} \quad \sigma_b = \vec{P} \cdot \hat{n} = P_z = \epsilon_0 \chi_e E_z$$

onde E_z é a componente de $\vec{E}$ dentro do dieltico em $z=0$ $\vec{E}$ é devido à q na posição $(0,0,d)$ e também às cargas polarizadas em σ_b .Devido à q tem

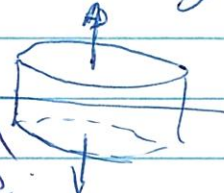
$$E_z q(0) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \cos\theta_z = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} d = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd}{(r^2+d^2)^{3/2}}$$

Usando $\boxed{E_{\text{atraso}} - E_{\text{aviso}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}}$ ou simplesmente a lei de Gauss.

$$E_b(0) = -\frac{\sigma_b}{2\epsilon_0}$$

(Aviso!)

Note ainda não

estamos assumindo que o sinal de σ_b 

$$\therefore E_z(0) = E_z q(0) + E_b(0)$$

$$\therefore \sigma_b = \epsilon_0 \chi_e \left[-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd}{(r^2+d^2)^{3/2}} - \frac{\sigma_b}{2\epsilon_0} \right]$$

$$\therefore \boxed{\phi_b = -\frac{1}{2\pi} \left(\frac{x_e}{x_e + z} \right) \frac{q d}{(r^2 + d^2)^{3/2}}}$$

Podemos calcular $\vec{E}$ em todo o espaço usando

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\vec{r}}{r^2} \phi_b da$$

Podemos então calcular a força se conhecermos o campo E em $(0, 0, d)$. Pela simetria:

$$E_z = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2\pi} \left(\frac{x_e}{x_e + z} \right) q d \int \frac{2\pi r dr \cos\theta}{(r^2 + d^2)^{3/2}}$$

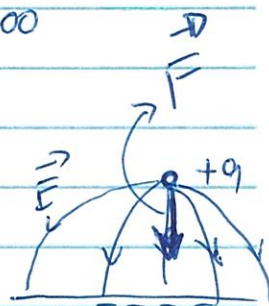
$$\text{mas } \cos\theta = \frac{d}{(r^2 + d^2)^{1/2}} \quad \therefore E_z = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{x_e}{x_e + z} \right) q d^2 \int_0^\infty \frac{r dr}{(r^2 + d^2)^3}$$

$$\text{fazendo } r^2 + d^2 = \xi \Rightarrow d\xi = 2r dr$$

$$E_z = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{x_e}{x_e + z} \right) q d^2 \underbrace{\frac{1}{2} \int_{\xi_0}^{\xi_f} \frac{d\xi}{\xi^3}}$$

$$E_z = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{x_e}{x_e + z} \right) q d^2 \left(\frac{-1}{4} \right) \frac{1}{(r^2 + d^2)^2} \Big|_0^\infty$$

$$E_z(0, 0, d) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{4d^2} \left(\frac{x_e}{x_e + z} \right)$$



$$\therefore \vec{F} = q \vec{E} \Rightarrow \boxed{\vec{F} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{4d^2} \left(\frac{x_e}{x_e + z} \right) \hat{z}}$$

Noti que também podemos calcular a carga polarizada total

$$q_b = \int \epsilon_b da = \int \frac{1}{2\pi} \left(\frac{x_e}{x_e + z} \right) \frac{q d z}{(r^2 + dz)^{3/2}} = \frac{-x_e q}{(x_e + z)}$$

$$\therefore q_b = \frac{-x_e q}{x_e + z}$$

Note ainda que poderíamos (como o livro faz) resolver usando o método da carga imagem. Mas existe em dúvida. É interessante verificar este tipo de solução

Energia e densidade de Energia em Dielétricos

P/ o vácuo, encontramos que

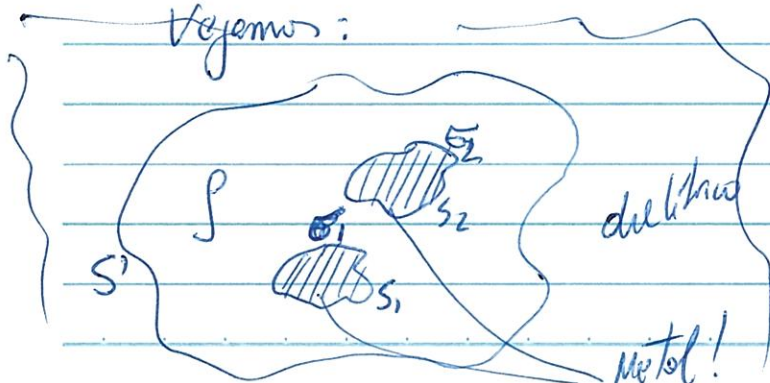
$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 dV$$

V (todo o espaço)

$$\text{ou } W = \frac{1}{2} \int_V \rho(\vec{r}) V(\vec{r}) dV + \frac{1}{2} \int_S \epsilon(\vec{r}) V(\vec{r}) da$$

Agora, no caso de dielétrico podemos converter a equação de tal forma que possamos usar $\vec{E}$ e $\vec{D}$ propriedades.

Vejamos:



$$\rho_f = \nabla \cdot \vec{D} \text{ em todo o dielétrico}$$

$$\epsilon_b = \vec{D} \cdot \hat{n}$$

(nas sup. dos condutores)

$$\therefore W = \frac{1}{2} \int_V \nabla \cdot \vec{D} \, dv + \frac{1}{2} \int_S V \vec{D} \cdot \hat{n} \, da$$

Somente onde $\nabla \cdot \vec{D} \neq 0$ ou seja, fora dos condutores!

$$\text{Mas } \nabla \cdot \vec{D} = \nabla \cdot (V \vec{D}) - \vec{D} \cdot \nabla V \quad \left(\text{lembrando que } \vec{E} = -\nabla V \right)$$

$$= \nabla \cdot (V \vec{D}) + \vec{D} \cdot \vec{E}$$

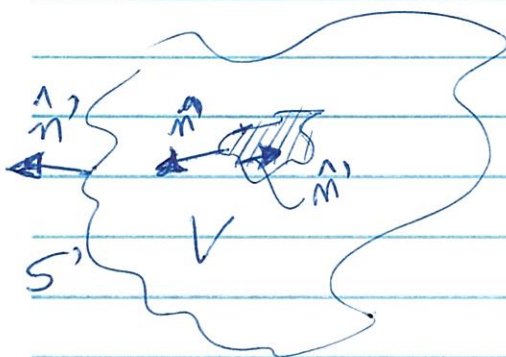
Teo. Div.

$$\therefore W = \frac{1}{2} \int_{S+S'} V \vec{D} \cdot \hat{n}' \, da + \frac{1}{2} \int_V \vec{D} \cdot \vec{E} \, dv + \frac{1}{2} \int_{S+S'+\dots} V \vec{D} \cdot \hat{n} \, da$$

$S+S'$
 $S_1+S_2+\dots$

$S+S'$ é toda a sup. que envolve o volume V .

Ele tem a superfície S (dos condutores) e também uma superfície S' que limite externamente o dielétrico englobando todas as cargas colocadas. Este S' pode ser colocada no infinito!



$$\therefore W = \frac{1}{2} \int_S (+V \vec{D} \cdot \hat{n}) \, da + \frac{1}{2} \int_{S'} V \vec{D} \cdot \hat{n}' \, da$$

$$+ \frac{1}{2} \int_V \vec{D} \cdot \vec{E} \, dv + \frac{1}{2} \int_S V \vec{D} \cdot \hat{n} \, da$$

Como $V \propto \frac{1}{r}$ e $\vec{D} \propto \frac{1}{r^2}$

Seja $A \propto r^2 \therefore \oint_{S'} \rightarrow \infty$

$\int_{S'} \vec{D} \cdot \hat{n}' da \rightarrow 0 \therefore$

$$W = \frac{1}{2} \int_V \vec{D} \cdot \vec{E} dV$$

Podemos incluir todo o espaço já que $\vec{E} = 0$ dentro dos condutores!

$$u_E = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E}$$

densidade de energia em um campo eletrostático

Seja o dielétrico linear, $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$

$$\therefore u_E = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} \frac{D^2}{\epsilon}$$

(LIVRES) W é a energia total necessária p/ redistribuir as cargas trazendo as desde o infinito até o dielétrico na sua configuração final. Note que a cada carga trazida, o dielétrico responde com a polarização adequada. Note ainda que esta expressão provém de fato válida somente p/ dielétricos lineares!

Veja discussão no Griffiths e Ex. 4.27

Como vimos no caso de capacitores, a energia é acumulada levando-se a carga de uma placa a outra ao estabelecer o dif. de potencial.

$$dW = V dq \Rightarrow \int dW = C \int_0^V V dV = \frac{CV^2}{2}$$

$$\therefore W = \frac{CV^2}{2}$$

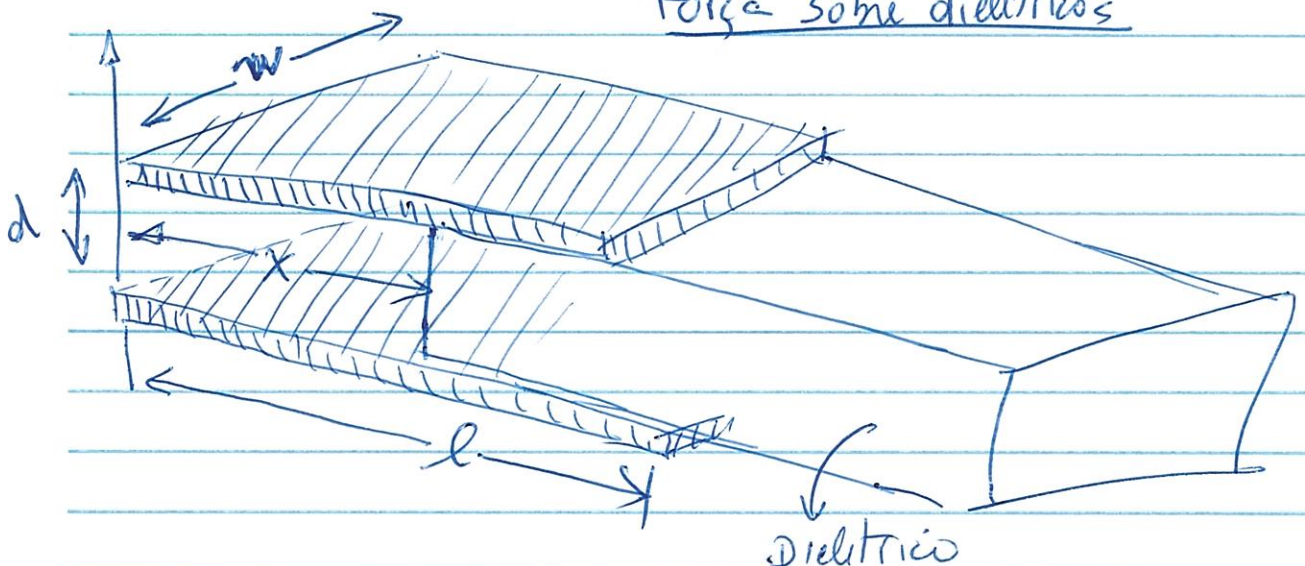
$$\Rightarrow W_{\text{diel}} = C_{\text{diel}} \frac{V^2}{2}$$

$$\text{onde } C_{\text{diel}} = K C_{\text{vácuo}}.$$

Note que se mantivermos a carga constante na sup. dos condutores, a inserção do dielétrico diminui o d.d.p por um fator $\frac{1}{K}$.

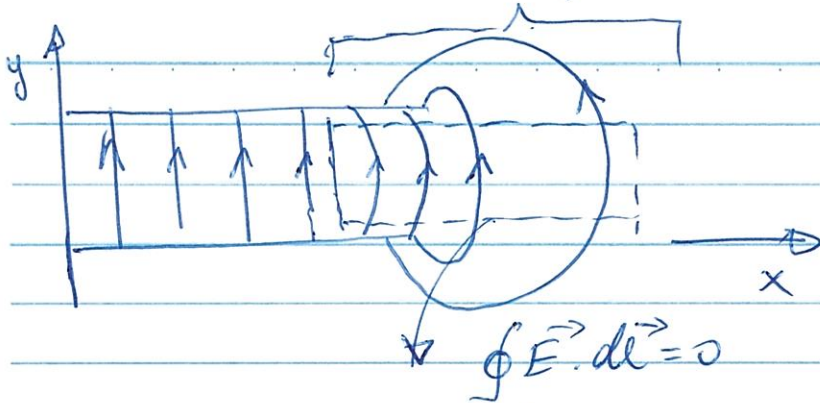
vejamos exatamente este caso.

Força sobre dielétricos



Efeito de borda.

17/10



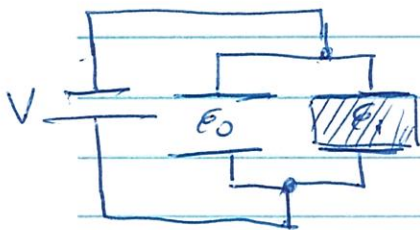
Deslocando o dielétrico de dx eito

$dw = F_{me} dx$ onde F_{me} é a força p/ contra
bloques e força do dielétrico F

$$F_{me} = -F \therefore F = -\frac{dw}{dx}$$

Mas a energia armazenada é $W = \frac{1}{2} CV^2$

onde $C = C_1 + C_2$



pois no sup. do condutor V é o mesmo!
equipotencial!

$$C_{plano} = \frac{\epsilon A}{d} \therefore$$

$$C = \frac{\epsilon_0 (xw)}{d} + \frac{\kappa \epsilon_0 (l-x)w}{d} = \frac{\epsilon_0 w}{d} (\kappa l + x - \kappa x)$$

$$\epsilon = \epsilon_0 + \epsilon_0 \chi_e \Rightarrow \kappa = 1 + \chi_e \therefore 1 - \kappa = -\chi_e$$

$$C = \frac{\epsilon_0 w}{d} (\kappa l - \chi_e x)$$

Assumindo que $Q = CV = \text{cte}$ (Já tinha a carga Q nos placas!)

$$W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \Rightarrow F = \frac{dW}{dx} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C^2} \frac{dC}{dx}$$

$$F = \frac{1}{2} V^2 \frac{dC}{dx}$$

$$\frac{dC}{dx} = - \frac{\epsilon_0 \kappa_e w}{d}$$

$$\therefore F = - \frac{\epsilon_0 \kappa_e w V^2}{2d}$$

O sinal minus indica que a força é na direção de $-x$ ou seja o dielétrico é puxado p/ dentro!

E se $V = \text{cte}$ no lugar de Q ?

O ERRO COMUM é ASSUMIR $W = \frac{1}{2} CV^2$

$$\therefore F = - \frac{1}{2} V^2 \frac{dC}{dx} \quad \times$$

↳ Estamos esquecendo do Trabalho da bateria.

Correto! $dW = F_{me} dx + V dQ$

$$\therefore F = \frac{-dW}{dx} + V \frac{dQ}{dx} = - \frac{1}{2} V^2 \frac{dC}{dx} + V^2 \frac{dC}{dx}$$

$$F = \frac{1}{2} V^2 \frac{dC}{dx}$$

Iguol!

A Força sobre o dielétrico depende intensamente da distância