

fazendo $\frac{l'}{s} = \tan \theta \Rightarrow dl' = s \sec^2 \theta d\theta$

$(1 + \tan^2 \theta) = \sec^2 \theta$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi s^2} \int_{\theta_i}^{\theta_f} \frac{s \sec^2 \theta d\theta}{\sec^3 \theta} = \frac{\mu_0 I}{4\pi s} \int_{\theta_i}^{\theta_f} \cos \theta d\theta$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi s} (\sin \theta_f - \sin \theta_i)$$

$\tan \theta_f = \frac{x_f}{s}$

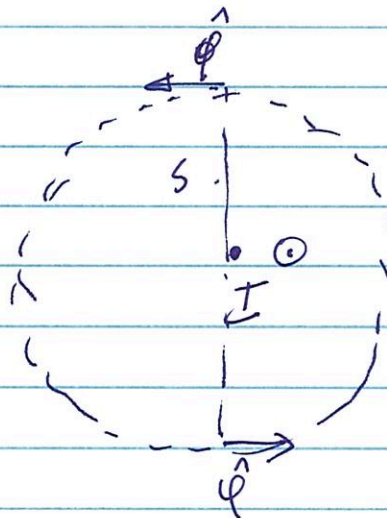
$\tan \theta_i = \frac{x_i}{s}$

se $x_f \rightarrow \infty$ e $x_i \rightarrow -\infty$

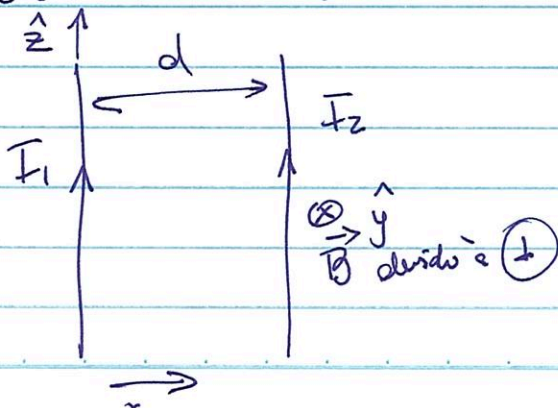
então $\theta_f = \frac{\pi}{2}$ e $\theta_i = -\frac{\pi}{2}$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \hat{\phi}$$

B é constante ao longo do raio s em torno do fio.



Agora, vamos calcular a força que um fio exerce sobre outro.



$$\vec{F} = I_2 \int d\vec{l}_2 \times \vec{B}_1 =$$

$$\vec{F} = I_2 \int d\vec{l}_2 \times \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} \hat{y}$$

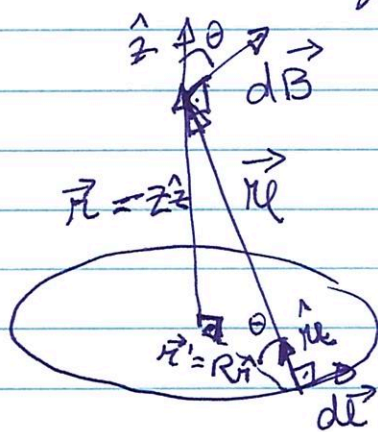
$$\vec{F} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} (-\hat{x}) \int d\vec{l}_2$$

ou seja a força no fio (2) está na direção $-\hat{x}$
e depende do comprimento do fio (2), (cons. $\pm$ inf.)

A força por unidade de comprimento. $\boxed{\vec{f} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} \hat{x}}$

Atração p/ correntes paralelas e repulsão p/ correntes anti-paralelas.

Ex. 5.6 do Griffiths



$$\vec{B} = \int d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{r}' \times \hat{r}}{r^2}$$

$$\hat{r} + d\vec{r}' \neq \text{null}$$

A componente horizontal de $\vec{B}$ se cancela
sobrando apenas a vertical $\parallel \hat{z}$

$$\therefore d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\cos\theta}{r^2} d\ell' \hat{z} = \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{\cos\theta}{r^2} \frac{z}{R} \hat{z}$$

$$\cos\theta = \frac{R}{(z^2 + R^2)^{1/2}}$$

$$\therefore \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I R^2}{2(z^2 + R^2)^{3/2}} \hat{z}}$$

P/ o caso de superfícies e volumes temos

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{K}(\vec{r}') \times \hat{r}}{r^2} da'} \quad \text{e} \quad \boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times \hat{r}}{r^2} d\tau'}$$

Ficamos tentados a usar o mesmo tipo de formalismo p/ descobrir o campo gerado por uma carga em movimento.

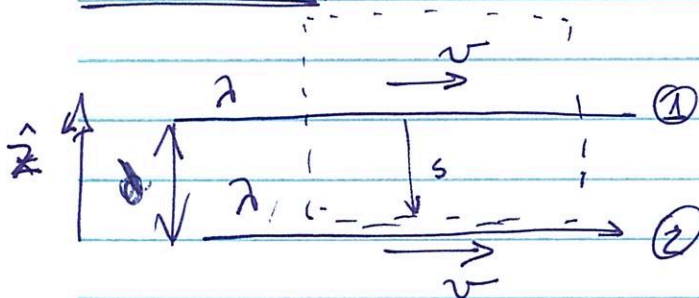
$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \vec{v} \times \hat{r}_p}{r_p^2}} \quad \text{ERRADO!!!}$$

De fato a Lei de Biot-Savart só funciona p/ correntes constantes. A carga não é uma corrente constante.

De fato p/ $\vec{v}$ de e p/ $|\vec{v}| \ll c$ a equação acima é aproximadamente correta!! p/ ~~outros~~ ^{casos} ~~de~~ ^{de} velocidades muito altas no cap. 10. (Próximo curso!)

Prob.

Ex. 5.12



Qual valor de $|\vec{v}|$ p/ contrabalançar a atração magnética com a repulsão elétrica.

Vamos que $\vec{f}_m = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} = \frac{\mu_0 \lambda^2 v^2}{2\pi d} \hat{z}$

Usando Gauss.

$$\vec{E} = \frac{-1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{d} \hat{z}$$

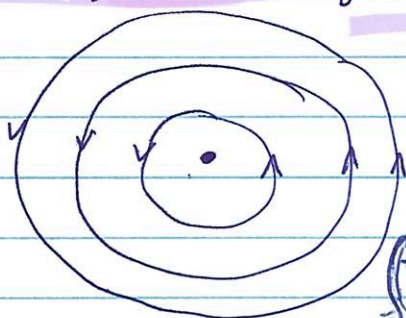
$$\vec{f}_e = \frac{-1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda \cdot \lambda}{d} \hat{z}$$

$$f_e = f_m \Rightarrow \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda^2}{d} = \frac{\mu_0 \lambda^2 v^2}{2\pi d} \Rightarrow \boxed{v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}}$$

De fato $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = c$ - a esta forma,

os fios jamais atingiriam esta velocidade c / que a
força magnética contrabalança a força elétrica. Este
último sempre ganha!

5.3 O Divergente e o Rot de $\vec{B}$



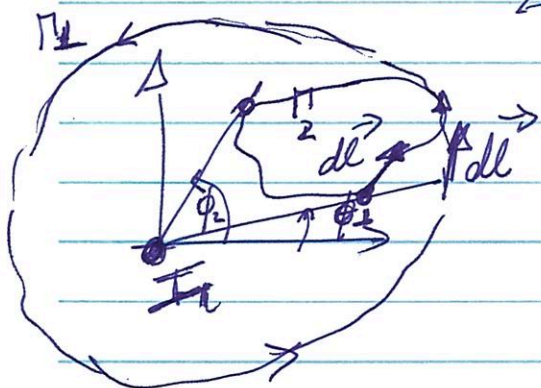
$$\vec{B} \therefore \nabla \times \vec{B} \neq 0$$

usando Stokes.

$$\oint (\nabla \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} = \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \oint \frac{\mu_0 I}{2\pi s} dl$$

$$\therefore \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \oint dl = \mu_0 I$$

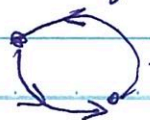
Nesta caso $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \hat{\phi}$. De fato não precisa
ser um círculo.

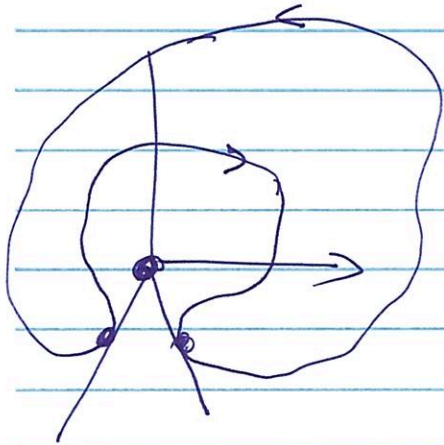


$$d\vec{\ell} = ds \hat{s} + s d\phi \hat{\phi} + dz \hat{z}$$

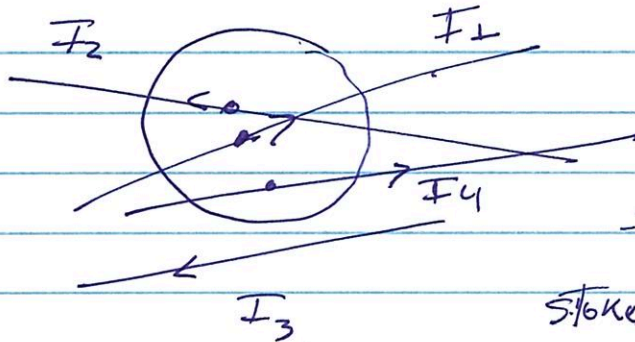
$$\begin{aligned} \therefore \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint \frac{1}{s} s d\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \\ &= \mu_0 I \end{aligned}$$

P/ $\int_2 \therefore \int d\phi = 0$ Vou de ϕ_1 até ϕ_2
e depois retorno





Mais genérico ainda $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{env}} / \epsilon_0$$

$$I_{\text{env}} = \int \vec{J} \cdot d\vec{a}$$

$$\therefore \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int \vec{J} \cdot d\vec{a}$$

Stokes

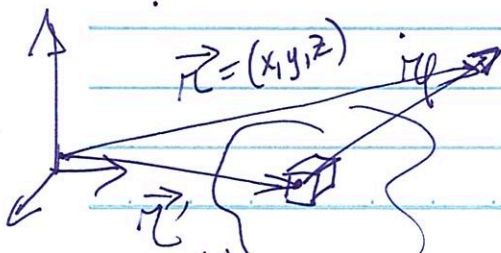
$$\oint (\nabla \times \vec{B}) \cdot d\vec{a} = \mu_0 \int \vec{J} \cdot d\vec{a}$$

$$\therefore \boxed{\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}}$$

De fato este resultado (correto e geral!) foi obtido usando a limitação de fios infinitos e retos. Podemos generalizar.

$\nabla \cdot \vec{B}$ e $\nabla \times \vec{B}$:

$$\text{Sabemos que } \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times \hat{r}}{r^2} dV'$$



$$\vec{B} = \vec{B}(x, y, z)$$

$$\vec{J} = \vec{J}(x', y', z')$$

$$\vec{r} = (x-x') \hat{x} + (y-y') \hat{y} + (z-z') \hat{z}$$

$$dV' = dx' dy' dz'$$

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \nabla \cdot \left(\vec{J} \times \frac{\hat{r}}{r^2} \right) dV'$$

mas

$$\nabla \cdot \left(\vec{J} \times \frac{\hat{r}}{r^2} \right) = \frac{\hat{r}}{r^2} \cdot \underbrace{(\nabla \times \vec{J})}_0 - \vec{J} \cdot \underbrace{(\nabla \times \frac{\hat{r}}{r^2})}_0$$

$\nabla \rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$

$$\oint \nabla \times \frac{\hat{r}}{r^2} = 0 \quad \boxed{\nabla \times \vec{v} \hat{r}} = 0 \quad \text{qualquer func local } \vec{v}$$

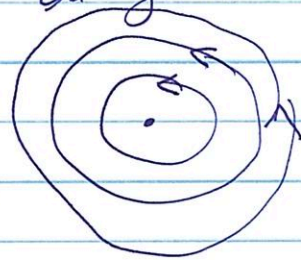
Fazendo explicitamente tambem e facil

$$\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \hat{x} \left(\frac{\partial}{\partial y} v_z - \frac{\partial}{\partial z} v_y \right) + \dots$$

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{x-x'}{r^3} \right) \right) = -\frac{3}{2} \frac{(x-x')^2 (z-z')}{()^{5/2}} + \frac{3}{2} \frac{(z-z')(x-x')}{()^{5/2}} = 0$$

O mesmo p/ os outros termos!!

$\therefore \boxed{\nabla \cdot \vec{B} = 0}$ e é óbvio pois $\vec{B}$ não
 diverge!!



$$\nabla \times \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla \times \left(\vec{J} \times \frac{\hat{r}}{r^2} \right) dv'$$

$$\nabla \times \left(\vec{J} \times \frac{\hat{r}}{r^2} \right) = \vec{J} \left(\nabla \cdot \frac{\hat{r}}{r^2} \right) - \left(\vec{J} \cdot \nabla \right) \frac{\hat{r}}{r^2}$$

o termo com $\nabla \rightarrow J$ não fazemos contas porque dá zero!

$$\boxed{\nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right) = 4\pi \delta^3(r)} \therefore$$

$$-\left(\vec{J} \cdot \nabla \right) \frac{\hat{r}}{r^2} = \left(\vec{J} \cdot \nabla' \right) \frac{\hat{r}}{r^2}$$

$$\left(\vec{J} \cdot \nabla' \right) \left(\frac{x-x'}{r^3} \right) = \vec{\nabla}' \cdot \left[\frac{(x-x')}{r^3} \vec{J} \right] - \left(\frac{x-x'}{r^3} \right) \left(\vec{\nabla}' \cdot \vec{J} \right)$$

mas se $\vec{J} = cte$ então $\vec{\nabla}' \cdot \vec{J} = 0$ (Aplic. Eq. da continuidade)

$$\therefore \left[-\left(\vec{J} \cdot \nabla \right) \frac{\hat{r}}{r^2} \right]_x = \vec{\nabla}' \cdot \left[\frac{(x-x')}{r^3} \vec{J} \right]$$

$$\int_V \vec{\nabla}' \cdot \left[\frac{(x-x')}{r^3} \vec{J} \right] dv' = \oint_S \frac{(x-x')}{r^3} \vec{J} \cdot d\vec{a} \rightarrow 0$$

fazendo o volume grande o suficiente p/ fazer todas as correntes a entrar e sair. que envolve ele ando mover. $\int \vec{J} \cdot d\vec{a}$ portanto é bastante zero!

$$\therefore \nabla \times \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{J}(\vec{r}') 4\pi \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') dV' = \mu_0 \vec{J}(\vec{r})$$

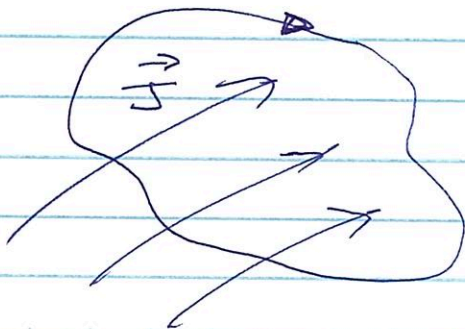
$$\therefore \boxed{\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}(\vec{r})} \rightarrow \text{Lei de Ampère.}$$

Aplicação da Lei de Ampère.

Podemos converter a equação acima p/ a forma integral e usar o Teo. de Stokes

$$\int (\nabla \times \vec{B}) \cdot d\vec{a} = \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \underbrace{\int \vec{J} \cdot d\vec{a}}_{I_{\text{env.}}}$$

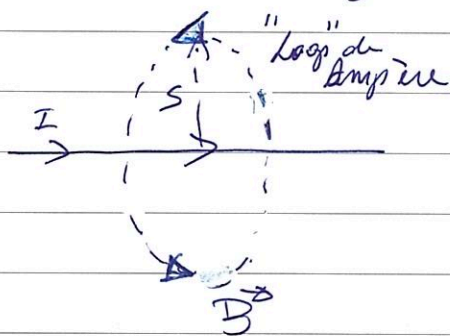
$$\therefore \boxed{\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{env.}}}$$



Use a regra da mão direita p/ obter a direção da orientação e do campo ao final.

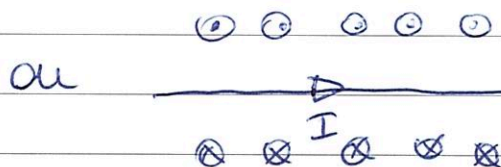
12 / 196

Exemplo 5.7 Da mesma forma que encontramos o campo de um fio infinito com corrente I , usando o formalismo de Biot-Savart, agora podemos de forma muito mais simples usar a Lei de Ampère (note o analog com a Lei de Gauss x Lei de Coulomb).

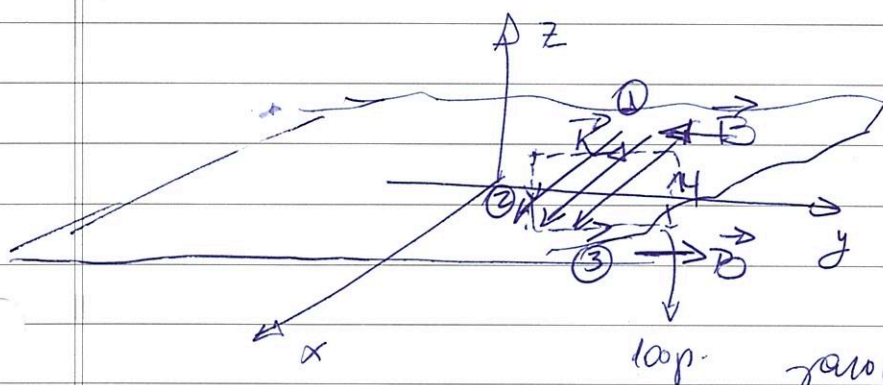


$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \oint dl = B 2\pi r = \mu_0 I$$

$$\therefore B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$



Exemplo 5.8



$$\vec{K} = K \hat{z}$$

Se o plano infinito, é fácil verificar que o campo deve ser paralelo ao eixo y .

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B\ell + 0 + B\ell + 0 = \mu_0 \int K \cdot d\vec{l}_{\perp} = \mu_0 K\ell$$

$$\therefore B = \frac{\mu_0 K}{2} \quad \text{ou} \quad \vec{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0 K}{2} \hat{y} & \text{se } z < 0 \\ -\frac{\mu_0 K}{2} \hat{y} & \text{se } z > 0 \end{cases}$$