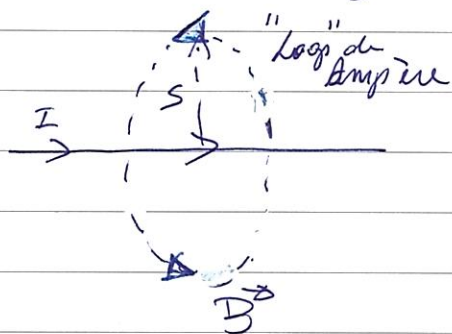
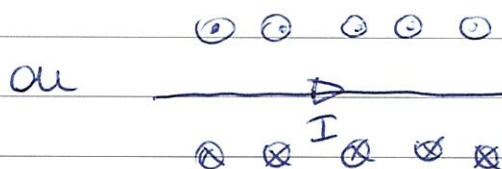


Exemplo 5.7 | Da mesma forma que encontramos o campo de um fio infinito com corrente I , usando o formalismo de Biot-Savart, agora podemos de forma muito mais simples usar a Lei de Ampère (note o análogo com a Lei de Gauss x Lei de Coulomb).

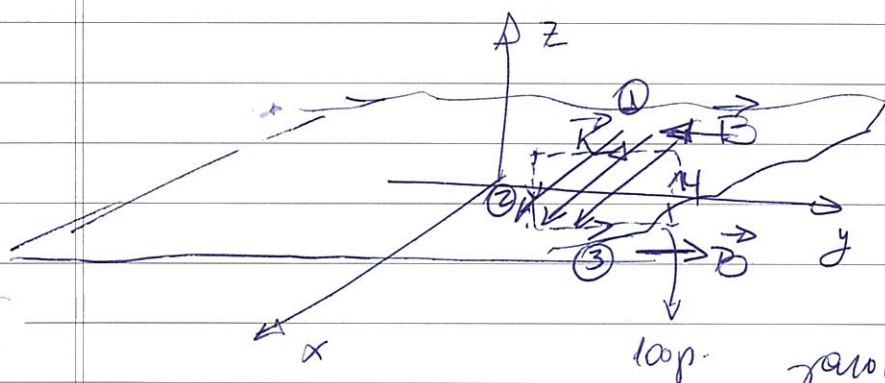


$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \oint dl = B 2\pi r = \mu_0 I$$

$$\therefore B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$



Exemplo 5.8



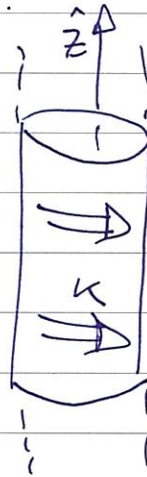
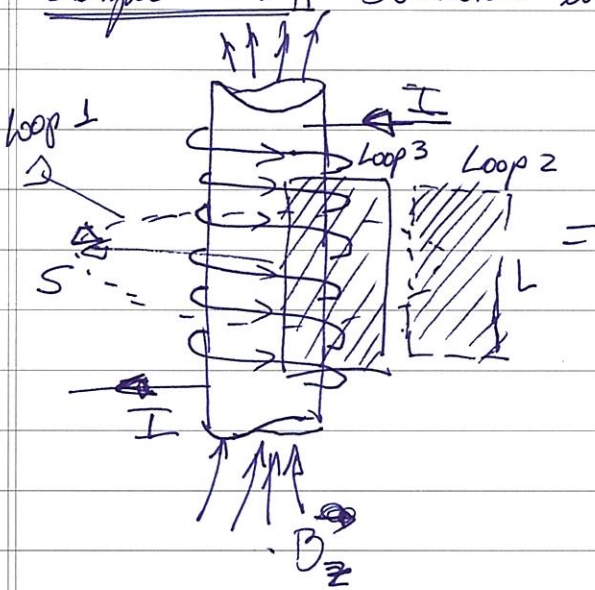
$$\vec{K} = K \hat{x}$$

Se o plano infinito, é fácil verificar que o campo deve ser paralelo ao eixo y .

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B\ell + 0 + B\ell + 0 = \mu_0 \int K \cdot d\vec{l}_{\perp} = \mu_0 K\ell$$

$$\therefore B = \frac{\mu_0 K}{2} \quad \text{ou} \quad \vec{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0 K}{2} \hat{y} & \text{se } z < 0 \\ -\frac{\mu_0 K}{2} \hat{y} & \text{se } z > 0 \end{cases}$$

Exemplo 5.9 || Solenoide longo.



$$k = nI$$

$$n = \frac{N}{L}$$

$$B_\phi = ? \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B_\phi (2\pi s) = \underbrace{\mu_0 I_{enc}}_0 = 0$$

$$\therefore B_\phi = 0$$

O campo magnético de um solenoide infinito é paralelo ao eixo axial do solenoide!

Facemos o mesmo ante p/ o circuito (2)

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \cancel{B(a)} L - B(a) L = \underbrace{\mu_0 I_{env}}_0 = 0$$

$$\therefore \boxed{B(b) = B(a)}$$

Na região externa, o campo B não depende da distância radial ao solenoide! Sabemos no entanto que p/ s grande,

$B(s) \rightarrow 0 \quad \therefore$ Deve ser zero em todos os pontos!

$$\text{p/ o loop 3} \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = BL = \mu_0 I_{env} = \mu_0 \underbrace{nI}_k$$

$$\therefore \vec{B} = \begin{cases} \mu_0 n I \hat{z} & (\text{dentro do solenoide}) \\ 0 & (\text{fora do solenoide}) \end{cases}$$

Comparando a Lei de Ampère com a Lei de Gauss, este funciona γ / correntes constantes no caso onde a simetria do problema permite retirar B da integral.

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B \int d\ell = \mu_0 I_{env.}$$

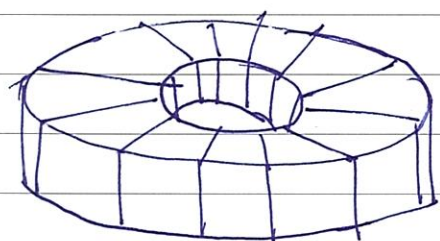
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{q_{env}}{\epsilon_0} = E \int da$$

Quando isto não for possível não restará outra saída que não usar Biot-Savart.

Casos que funcionam bem a Lei de Ampère

- 1 - fios infinitos ; 2 - planos infinitos ; 3 - solenóides infinitos
- 4 - Toroides

Exemplo 5.10

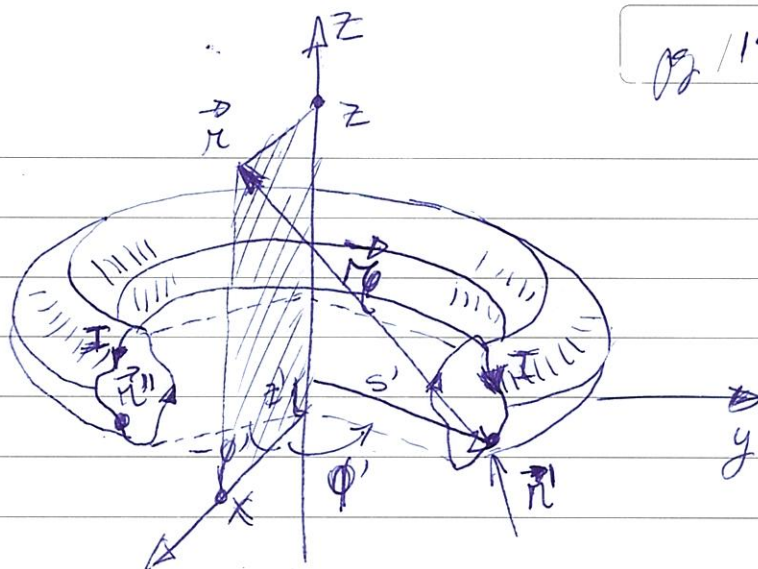


Importante

A seção reta do toróide não importa, desde que a mesma mantenha-se igual em todo o perímetro.

Dito forma, o campo magnético será circular em todos os pontos, devido à forma do toróide.

Vamos provar usando Biot-Savart



$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{I} \times \vec{r}}{r^3} |d\vec{r}|$$

pondo r no plano xz $\vec{r} = (x, 0, z)$ e

$$\vec{r}' = (s' \cos \phi', s' \sin \phi', z')$$

Como $\vec{I}$ não tem componente ao longo de ϕ , então $\vec{I} = I_s \hat{s} + I_z \hat{z}$

$$\vec{I} = (I_s \cos \phi', I_s \sin \phi', I_z)$$

$$\therefore \vec{I} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ I_s \cos \phi' & I_s \sin \phi' & I_z \\ (x - s' \cos \phi') & (-s' \sin \phi') & (z - z') \end{vmatrix}$$

$$\vec{I} \times \vec{r} = [\sin \phi' (I_s (z - z') + s' I_z)] \hat{x} + [I_z (x - s' \cos \phi') - I_s \cos \phi' (z - z')] \hat{y} + [-I_s \sin \phi'] \hat{z}$$

Se notarmos com cuidado, existe um ponto simétrico $\vec{r}''$

com $(s', |\vec{r}|, dl', I_s, I_z, -\phi')$

08/200

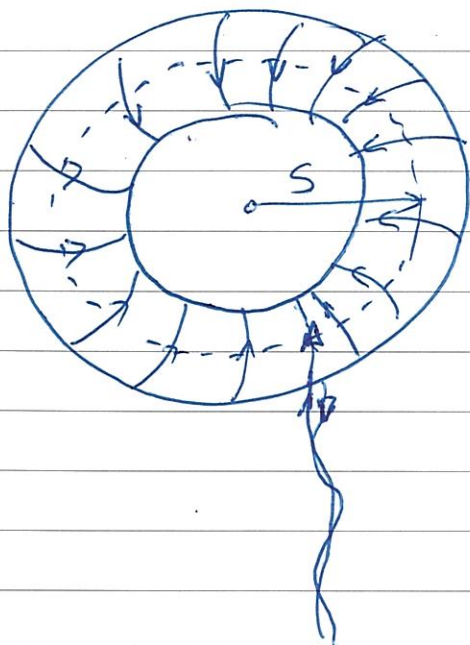
Somando $\vec{r}'$ os dois pontos simétricos $\vec{r}'$ e $\vec{r}''$ temos.

$$\underbrace{\vec{I} \times \vec{r}'}_{\vec{r}'} + \underbrace{\vec{I} \times \vec{r}''}_{\vec{r}''} = \left[\sin \phi' () + \sin(\phi) () \right] \hat{x}$$

$$\left[+ I_s \times \sin \phi' - I_s \times \sin(-\phi') \right] \hat{z} + \dots$$

Substituindo um termo em $\hat{y}$. De fato, poderíamos mostrar que no geral, o campo terá um componente tangencial na direção $\hat{\phi}$.

Sabemos portanto que o campo é circular e poderemos determinar sua magnitude usando um "loop" de Ampère



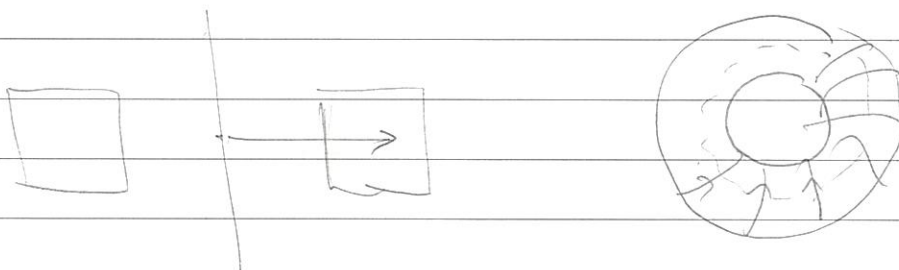
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{env.}$$

$$B 2\pi s = \mu_0 N I$$

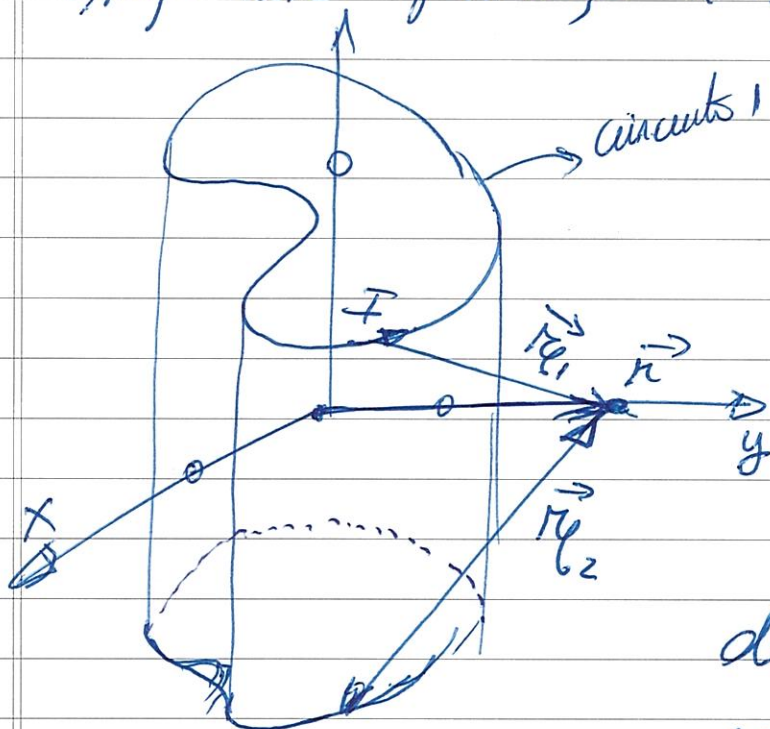
$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 N I}{2\pi s} \hat{\phi} \quad (\text{dentro da bobina})$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = 0 \quad \text{fora!}$$

sendo N o número de voltas!



Problema 5.17 O mesmo tipo de demonstração pode ser feita p/ o caso do solenoide infinito (desde que a seção seja plana e a mesma).



Fazendo $\vec{r} = (0, y, 0)$

e o circuito 1

$$\vec{r}_1 = (x', y', z')$$

$$\therefore \vec{r}_1 = -x'\hat{x} + (y-y')\hat{y} - z'\hat{z}$$

$$d\vec{l}' = dx'\hat{x} + dy'\hat{y}$$

Note que $z' = \text{cte}$ no circuito 1

$$\therefore d\vec{l}' \times \vec{r}_1 = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ dx' & dy' & 0 \\ -x' & (y-y') & -z' \end{vmatrix}$$

$$d\vec{l}' \times \vec{r}_1 = (-z'dy')\hat{x} + (z'dx')\hat{y} + \underbrace{[(y-y')dx' + x'dy']}_{\alpha}\hat{z}$$

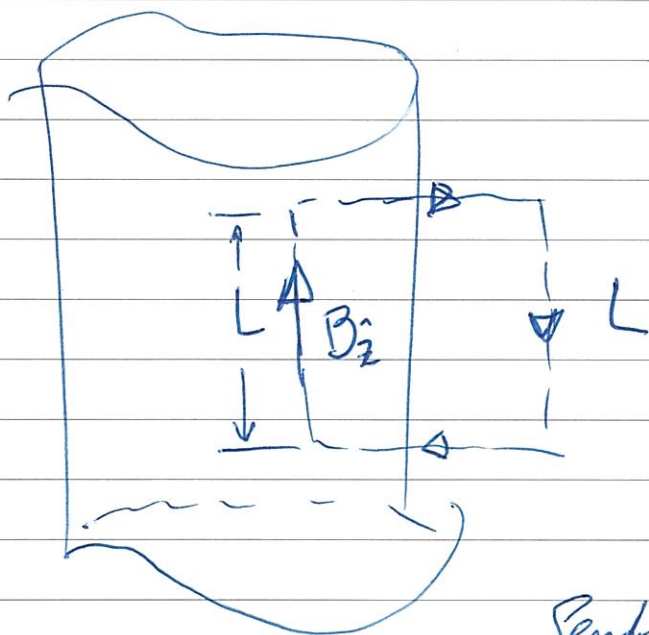
$$\therefore d\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l}' \times \vec{r}_1}{r_1^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{(-z'dy')\hat{x} + z'dx'\hat{y} + \alpha\hat{z}}{[x'^2 + (y-y')^2 + z'^2]^{3/2}}$$

fazendo o circuito 2 simétrico, temos

$$\vec{r}_2 = (x', y', z') \quad \text{só muda um sinal em na componente } z'$$

Deixe perme. $d\vec{B}_1 + d\vec{B}_2$ cancela as componentes $\hat{x}$ e $\hat{y}$, sobrando apenas a componente $\hat{z}$

Como só temos comp. no direço $\hat{z}$ a Lei de Ampere nos dá imediatamente o resultado esperado.



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{env.}$$

$$BL = \mu_0 I n L$$

$$\vec{B} = \begin{cases} \mu_0 n I \hat{z} & \text{dentro} \\ 0 & \text{fora do solenóide} \end{cases}$$

do caso circular? Sendo o resultado idêntico ao

Potencial Veto Magnético

sendo que $\nabla \times \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{E} = -\nabla V$

$\therefore$ podemos imaginar que se $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ então

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad \text{pois} \quad \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0 \quad \text{sempre!}$$

$\hookrightarrow$ veja Problema 5-30

Derivadas segundas do operador ∇ . Veja Cap. 1!

$$\therefore \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

quanto vale $\nabla \cdot \vec{A} = ?$

$$\therefore \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J}$$

↳ Eq. 1.47 Griffiths

No caso do campo elétrico, podemos somar qualquer função ϕ à V desde que $\nabla \phi = 0$ e não mudaria $\vec{E}$ pois $V = V + \phi \Rightarrow \vec{E} = -\nabla V = -\nabla V$

ou seja $\phi = \text{cte}$

No caso do campo magnético podemos somar ao potencial $\vec{A}$, qualquer função com $\nabla \times \vec{F} = 0$ sem alterar

$$\vec{B} \quad \text{ou seja} \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \nabla \times (\vec{A} + \vec{F})$$

Podemos explorar este grau de liberdade γ / analisando e mostrando que:

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{A} = 0} \quad \textcircled{I}$$

Vamos supor que o potencial magnético original não tenha divergência igual a zero. $\nabla \cdot \vec{A}_0 \neq 0$

$\therefore$ Podemos adicionar um gradiente a este vetor

$$\vec{A} = \vec{A}_0 + \nabla \lambda$$

$$\therefore \nabla \cdot \vec{A} = \nabla \cdot \vec{A}_0 + \nabla^2 \lambda \quad \text{Podemos obter} \quad \textcircled{I}$$

$$\text{se} \quad \nabla^2 \lambda = -\nabla \cdot \vec{A}_0$$

Matematicamente este é a mesma equação que a de Poisson (só que 3/3 coordenadas)

No caso da eq de Poisson em eletrostática temos:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

No caso de $\rho \rightarrow 0$ no infinito, temos a solup. como:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho dv'}{r}$$

Substituindo ρ por $\nabla \cdot \vec{A}_0$ temos (pg 203).

$$V = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\nabla \cdot \vec{A}_0}{r} dv'$$

Se $\nabla \cdot \vec{A}_0$ não vai a zero no infinito, podemos encontrar uma outra forma apropriada para $\vec{A}$. O fato é que sempre poderemos fazer $\nabla \cdot \vec{A}$ ser igual a zero!

Resultado
∴ Este (equação) nos leva a

$$\boxed{\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}}$$

Que é a eq. de Ampère se $\nabla \cdot \vec{A} = 0$

Eq de Poisson 3/3 os três componentes de $\vec{J}$ e $\vec{A}$.