Segunda Derivada.

Em eletromagnetismo, assim como quando desejamos encontrar as equações de movimento de uma partícula, é necessário o uso de Der. segunda.

5 casos possíveis:

1. Divergente do gradiente : $\nabla \cdot (\nabla T)$
2. Rotacional do gradiente : $\nabla \times (\nabla T)$
3. Gradiente do Divergente : $\nabla (\nabla \cdot \vec{v})$
4. Divergente do Rotacional : $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{v})$
5. Rotacional do Rotacional : $\nabla \times (\nabla \times \vec{v})$

Em particular, o Divergente do gradiente é o Laplaciano de uma função Escalar.

$$\nabla \cdot (\nabla T) = \nabla^2 T \equiv \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

O rotacional do gradiente é sempre ZERO!

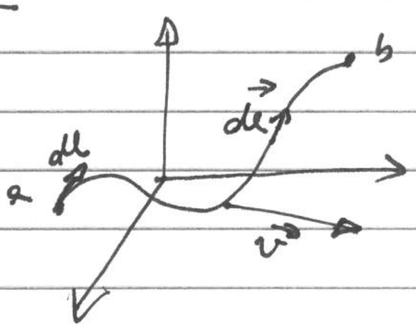
$$\nabla \times (\nabla T) = 0 \quad \text{(sempre!)}$$

Também $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{v}) = 0$ (sempre!)

Cálculo Integral.

a) Integral de Linha

$$\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{v}\cdot d\vec{l} \quad (P)$$



Se $\vec{a} = \vec{b}$

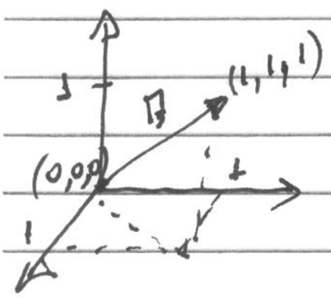
$$\oint \vec{v}\cdot d\vec{l}$$

Exemplo de integral de Linha é o $W = \int \vec{F}\cdot d\vec{l}$

Quando a ~~força~~ integral independe do caminho, dizemos que a força é conservativa. Não faltarão oportunidades p/ examinar, profundamente, este caso especial durante as próximas aulas.

Exemplo: 1.28c Calcule a $\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} \vec{v}\cdot d\vec{l}$ pela diagonal principal. (Γ_3)

$\vec{v} = x^2\hat{x} + 2yz\,\hat{y} + y^2\hat{z}$



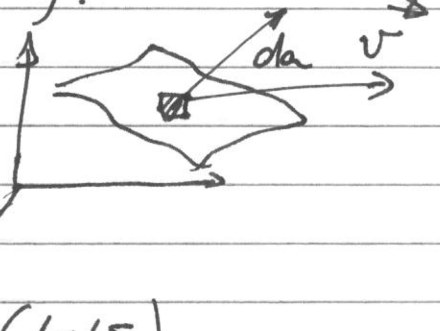
$x = y = z \;\therefore\; dx = dy = dz$

$$\begin{aligned}\vec{v}\cdot d\vec{l} &= x^2dx + 2yz\,dy + y^2dz \\ &= x^2dx + 2x^2dx + x^2dx \\ &= 4x^2dx\end{aligned}$$

$$\int \vec{v}\cdot d\vec{l} = \int_{x=0}^{x=1} 4x^2dx = \frac{4}{3}x^3\Big|_0^1 = \boxed{\frac{4}{3}}$$

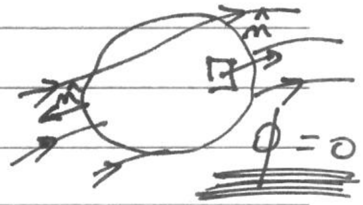
b) Integral de Superfície (Fluxo).

$$\phi = \int_S \vec{v} \cdot d\vec{a}$$

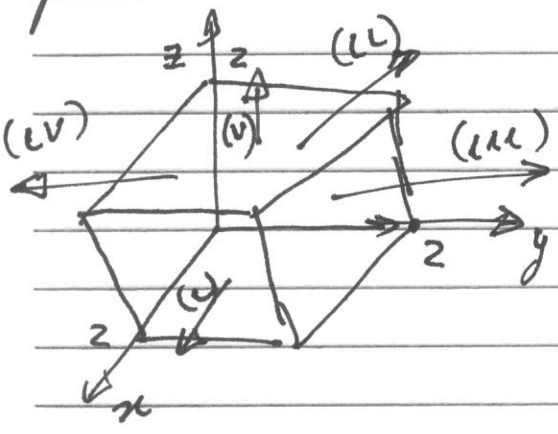


p/ superfície fechada (balão):

$$\phi = \oint \vec{v} \cdot d\vec{a}$$; Mas, sem fonte no interior



Exemplo 1.7 || Calcular a integral de superfície p/ o vetor $\vec{v} = 2xz\,\hat{x} + (x+2)\,\hat{y} + y(z^2-3)\,\hat{z}$ nas cinco superfícies do cubo na figura 1.23 com exceção do fundo.



(i) $x = 2$, $da = dy\,dz\,\hat{x}$

$$\vec{v} \cdot d\vec{a} = 2xz\,dy\,dz = 4z\,dy\,dz$$

$$\int_{(i)} \vec{v} \cdot d\vec{a} = 4\int_0^2 dy \int_0^2 z\,dz$$

$$= 4(2-0)\left(\frac{z^2}{2}\Big|_0^2\right)$$

$$= 4 \cdot 4 = \boxed{16}$$

(ii) $x = 0$ $da = -dy\,dz\,\hat{x}$; $\vec{v} \cdot d\vec{a} = -2xz\,dy\,dz = 0$ pois $x = 0$

$$\int_{(ii)} \vec{v} \cdot d\vec{a} = 0$$

(iii) $y=2$ $\quad d\vec{a} = dx\,dz\,\hat{y}$; $\vec{v}\cdot d\vec{a} = (x+2)\,dx\,dz$ ∴

$$\int_{(iii)} \vec{v}\cdot d\vec{a} = \int_0^2 (x+2)\,dx \int_0^2 dz = \cancel{2}\left[\frac{x^2}{2} + \cancel{4}x\right]_0^2 = \boxed{12}$$

(iv) $y=0$ $\quad d\vec{a}_{(iv)} = -d\vec{a}_{(iii)}$ ∴ $\displaystyle\int_{(iv)} \vec{v}\cdot d\vec{a} = \boxed{-12}$

(v) $z=2$; $d\vec{a} = dx\,dy\,\hat{z}$ $\quad \vec{v}\cdot d\vec{a} = y\,(z^2-3)\,dx\,dy$

4

∴ $\vec{v}\cdot d\vec{a} = y\,dx\,dy$ ∴ $\displaystyle\int_{(v)} \vec{v}\cdot d\vec{a} = \int_0^2 dx \int_0^2 y\,dy$

$$= 2\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^2 = \boxed{4}$$

∴ $\displaystyle\int_{\text{superfície}} \vec{v}\cdot d\vec{a} = 16 + 0 + \cancel{12} - \cancel{12} + 4 = \boxed{20}$

(c) Integral de Volume.

$$\int T\,dV \quad \text{onde } dV = dx\,dy\,dz$$

T pode ser um escalar : (exemplo uma densidade)

Exemplo uma densidade de massa, carga, etc.

$$M = \int \rho\,dV$$

ou em alguns casos um vetor

$$\int \vec{v}\,dV = \hat{x}\int v_x\,dV + \hat{y}\int v_y\,dV + \hat{z}\int v_z\,dV$$

Teorema Fundamental do calculo.

$$\int_a^b \underbrace{\left(\frac{df}{dx}\right)}_{F(x)} dx = f(b) - f(a)$$

ou

$$\boxed{\int_a^b F(x) = f(b) - f(a)}$$

Para demonstrar isto é só usar a definição p/ derivada e realizar uma soma discreta entre (a) e (b).

Se aplicarmos no caso do Gradiente ficará ainda mais interessante.

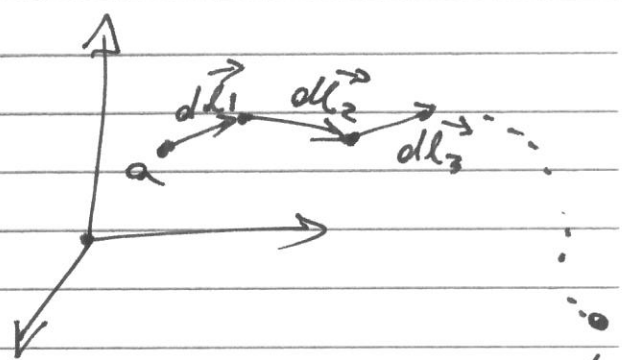
Teorema fundamental do Gradiente

$$\Delta T_1 = (\vec{\nabla} T) \cdot \vec{\Delta l_1}$$

$$\Delta T_2 = (\vec{\nabla} T) \cdot \vec{\Delta l_2}$$

$$\vdots$$

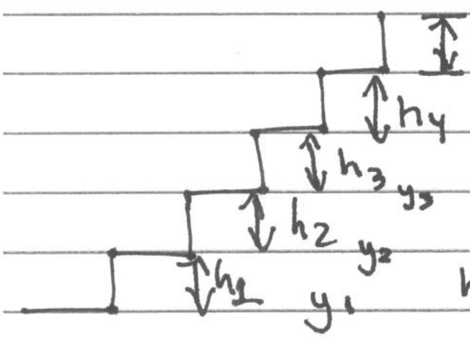
$$\Delta T_i = (\vec{\nabla} T) \cdot \Delta l_i$$



$$\boxed{\int_a^b (\vec{\nabla T}) \cdot \vec{dl} = \sum_{\substack{a \\ \lim \vec{\Delta l_i} \to 0}}^{b} (\vec{\nabla T}) \cdot \Delta l_i = T(\vec{b}) - T(\vec{a})}$$

O Exemplo de medir a altura da Torre Eiffel

$h_{n-1} = y_n - y_{n-1}$



$h_3 = y_4 - y_3$

$h_2 = y_3 - y_2$

$h_1 = y_1 - y_2$

$\therefore\ h = \sum_i h_i$

$$\boxed{h = y_n - y_1}$$

Se $y_n = \nabla h \therefore$

$\therefore$ Então $h = \int_a^b \nabla h \cdot d\vec{l} = h(b) - h(a)$

Corolário 1 $\int_a^b \nabla T \cdot d\vec{l}$ independe do caminho!

Corolário 2 $\boxed{\oint \nabla T \cdot d\vec{l} = 0}$

pois $= T(b) - T(a)$

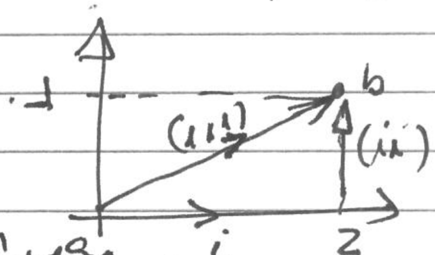
se $b = a$

$= 0$

Exemplo 1,9 Verificar o Teorema p/

$T = xy^2$ de $\vec{a} = (0,0,0)$ até $b = (2,1,0)$

Dois caminhos:



$\nabla T = y^2\hat{x} + 2xy\hat{y}$; $d\vec{l} = dx\hat{x} + dy\hat{y} + dz\hat{z}$

(i) $y = 0$; $z = 0$ $d\vec{l} = dx\hat{x}$ $\therefore$ $\vec{\nabla} T \cdot d\vec{l} = y^2 dx = 0$

(II) $x = 2$; $\vec{dl} = dy\,\hat{y}$; $\nabla T \cdot \vec{dl} = 2xy\,dy = 4y\,dy$

$$\therefore \int_{(II)} \vec{\nabla} T \cdot \vec{dl} = \int_0^1 4y\,dy = 2y^2 \Big|_0^1 = \boxed{2}$$

$$\therefore \int_{\substack{\vec{a} \to \vec{b} \\ (I)+(II)}} \nabla(T) \cdot \vec{dl} = 2 = T(\vec{b}) - T(\vec{a}) = 2 \cdot 1^2 - 0 \cdot 0^2 = \boxed{2}$$

É trivial mostrar pelo caminho (III)

(III) $y = \frac{1}{2} x \Rightarrow dy = \frac{1}{2} dx$

$$\vec{dl} = dx\,\hat{x} + dy\,\hat{y}$$

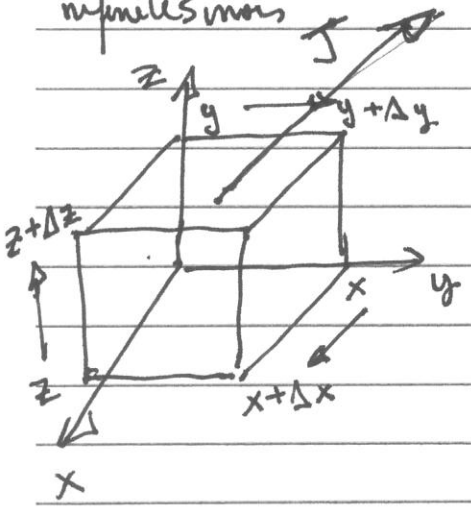
$$\vec{\nabla} T \cdot \vec{dl} = y^2 dx + 2xy\,dy = \frac{1}{4} x^2 dx + \cancel{2} x \frac{1}{\cancel{2}} x \frac{1}{2} dx$$

$$\vec{\nabla} T \cdot \vec{dl} = \frac{3}{4} x^2 dx \quad \therefore \int_{(III)} \nabla T \cdot \vec{dl} = \int_0^2 \frac{3}{4} x^2 dx$$

$$= \frac{\cancel{3}}{4} \frac{x^3}{\cancel{3}} \Big|_0^2 = \boxed{2}$$

Teorema Fundamental da Divergência

Calculo o Fluxo em uma sup. fechada de dimensões infinitesimais



Temos:

$$\phi_S = \left[\frac{J_x(x+\Delta x, \bar{y}, \bar{z}) - J_x(x, \bar{y}, \bar{z})}{\Delta x}\right](\Delta y \Delta z)\,\Delta x$$

$$+ \left[\frac{J_y(\bar{x}, y+\Delta y, \bar{z}) - J_y(\bar{x}, y, \bar{z})}{\Delta y}\right](\Delta x \Delta z)\,\Delta y$$

$$+ \left[\frac{J_z(\bar{x}, \bar{y}, z+\Delta z) - J_z(\bar{x}, \bar{y}, z)}{\Delta z}\right](\Delta x \Delta y)\,\Delta z$$

Se Dividirmos Tudo por $\Delta x \Delta y \Delta z$ e tomarmos o limite.

$$\frac{\Delta\phi_s}{\Delta V \to 0} = \frac{d\phi_s}{dV} = \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z}$$

↳ Este fluxo infinitesimal é o divergente

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{J}}$$

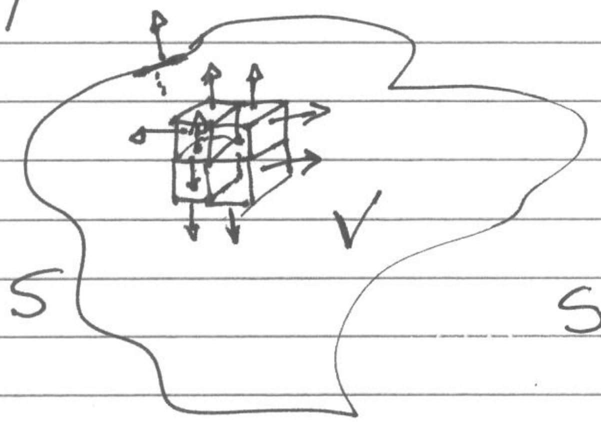
p/ a superfície fechada $\phi = \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{a}$

Mas o fluxo também é igual a $\phi = \int_{vol(S)} (\nabla \cdot J)\, dV$

$$\therefore \quad \phi \Rightarrow \boxed{\oint_S \vec{J}\cdot d\vec{a} = \int_{\text{volume}(S)} \nabla\cdot\vec{J}\, dV}$$

Teorema de Gauss

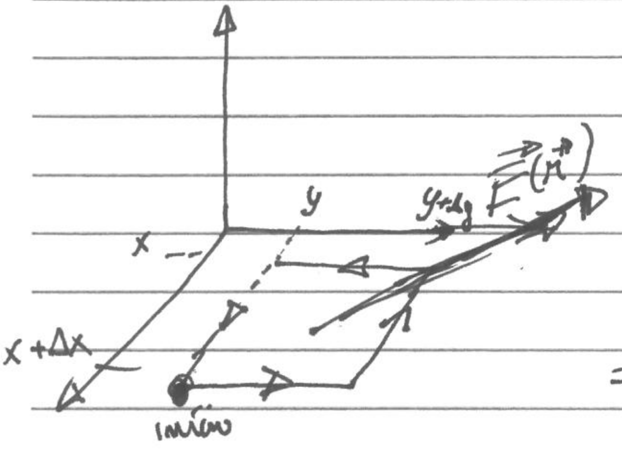
A prova consiste em somar muitos volumes infinitesimais.



Alguma superfície de um "cubinho" cancela o fluxo com a do "cubo" vizinho, restando apenas a superfície limítrofe S que engloba o volume (V)

Veja a solução do Exemplo 1.10 do livro.
Faça o exercício 1.32

Teorema fundamental do Rotacional



$$\oint \vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{l} =$$

$$= E_y(x+\Delta x,\bar{y})\Delta y - E_x(\bar{x}, y+\Delta y)\Delta x$$
$$- E_y(x,\bar{y})\Delta y + E_x(\bar{x},y)\Delta x$$

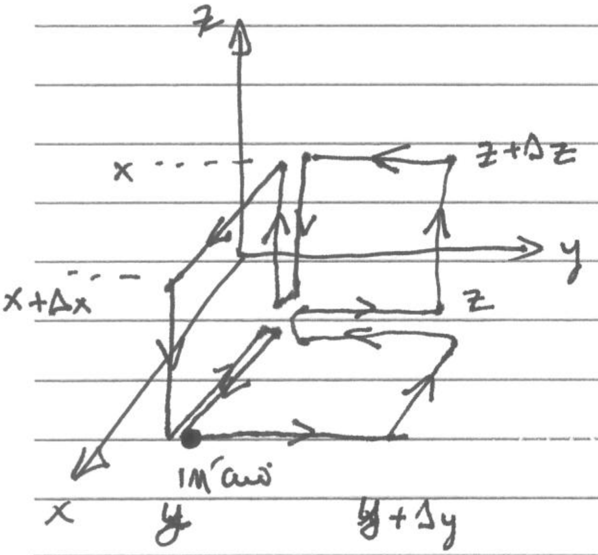
$$= \left[\frac{E_y(x+\Delta x,\bar{y}) - E_y(x,\bar{y})}{\Delta x}\right]\Delta y\Delta x$$

$$- \left[\frac{E_x(\bar{x},y+\Delta y) - E_x(\bar{x},y)}{\Delta}\right]\Delta x\Delta y$$

No limite de $\Delta x \Delta y \to 0$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x} E_y - \frac{\partial}{\partial y} E_x \right) dx\, dy$$

É possível fazer isto p/ um caminho <u>3-D</u>



$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} \cdot d\vec{A}$$

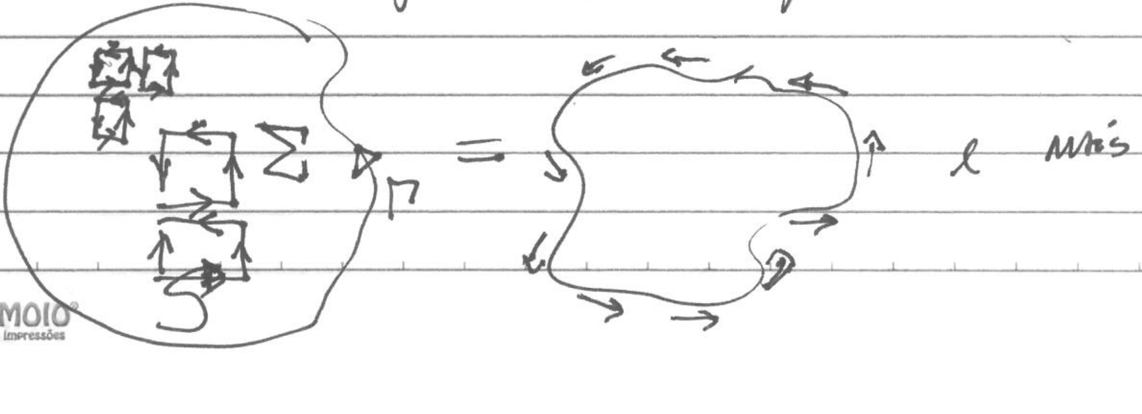
$$d\vec{A} = dy\,dz\,\hat{x} + dx\,dz\,\hat{y} + dx\,dy\,\hat{z}$$

É o $\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r})$

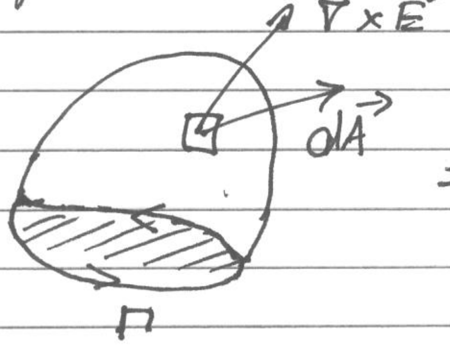
Portanto a integral infinitesimal $\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$ é

o fluxo de um vetor $\vec{J} = \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r})$ na área $d\vec{A}$ com circuito $d\vec{\ell}$ definido por Γ

Somente restará o contorno limítrofe Γ se considerarmos a superfície definida pelo caminho Γ no caso de uma soma de pequenas áreas infinitesimais.



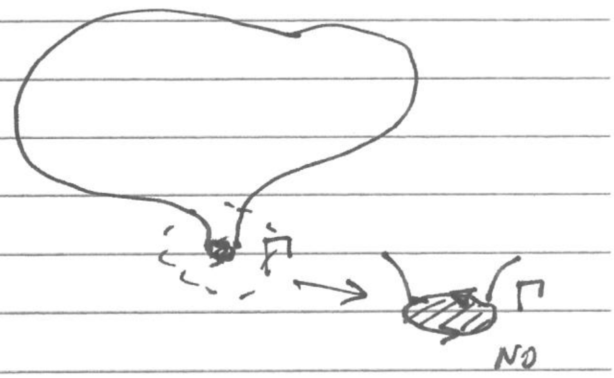
Note que a Área não necessita ser plana!



$$\Rightarrow \int_S (\nabla\times\vec E)\cdot d\vec a = \oint_\Gamma \vec E\cdot d\vec \ell$$

∴ Corolário 1: $\int(\nabla\times\vec E)\cdot d\vec A$ só depende da linha de contorno à superfície e não da particular superfície usada

Corolário 2 $\oint(\nabla\times\vec E)\cdot d\vec A = 0$ p/ qualquer superfície fechada.



No limite, $\Gamma \to 0$ ∴

$$\oint_\Gamma \vec B\cdot d\vec l = 0$$

Integração por Partes

Usa a regra da derivada do produto de funções:

$$\frac{d}{dx}(fg) = f\left(\frac{dg}{dx}\right) + g\left(\frac{df}{dx}\right)$$

$$\therefore \int_a^b \frac{d}{dx}(fg)\,dx = \underbrace{fg\Big|_a^b}_{\text{T. Fundamental do Cálculo}} = \int_a^b f\left(\frac{dg}{dx}\right)dx + \int_a^b g\left(\frac{df}{dx}\right)dx$$

$$\therefore \boxed{\int_a^b f\left(\frac{dg}{dx}\right)dx = -\int_a^b g\left(\frac{df}{dx}\right)dx + fg\Big|_a^b}$$

Podemos explorar o mesmo conceito p/ os Teoremas fundamentais.

$$\nabla\cdot\left(f\vec{A}\right) = f\left(\nabla\cdot\vec{A}\right) + \vec{A}\cdot\nabla f$$ Aplicando Gauss.

$$\therefore \int \nabla\cdot\left(f\vec{A}\right)dV = \int f\left(\nabla\cdot\vec{A}\right)dV + \int \vec{A}\cdot(\nabla f)\,dV$$

$$= \oint f\vec{A}\cdot d\vec{a}$$

$$\therefore \boxed{\int_V f\left(\nabla\cdot\vec{A}\right)dV = \oint_S f\vec{A}\cdot d\vec{a} - \int_V \vec{A}\cdot(\nabla f)\,dV}$$

Note que a última equação troca a integração dum volume de um produto de uma função f com um gradiente de um vetor $(f\,\nabla\cdot\vec{A})$, por uma integral do produto escalar de dois vetores; o próprio $\vec{A}$ com o gradiente da função f. $(\vec{A}\cdot\nabla f)$.

Paga-se o preço de um sinal de menos e a condição de contorno que neste caso é a superfície do volume em questão!!

Isto será muito comum!!

Coordenadas Curvilíneas