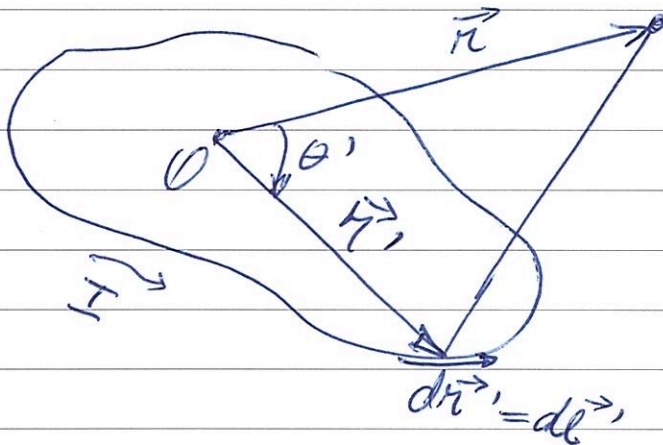


Isolando que

$$f(s) = \frac{k}{\mu_0 \omega s^3}$$

Expansão Multipolar

Vamos considerar um circuito de corrente fechado e qualquer por onde passe uma corrente estacionária I .



$$\cos \theta' = \hat{r} \cdot \hat{r}'$$

Vamos calcular o vetor potencial magnético em $\vec{r}$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta'}} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r} \right)^n P_n(\cos \theta')$$

Da mesma forma que na expansão multipolar (cap. 3) quando r é suficiente mente grande.

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{1}{r} d\vec{l}' = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \oint (r')^n P_n(\cos \theta') d\vec{l}'$$

$$A(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\frac{1}{r} \oint d\vec{l}' + \frac{1}{r^2} \oint r' \cos \theta' d\vec{l}' + \frac{1}{r^3} \oint (r')^2 \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta' - \frac{1}{2} \right) d\vec{l}' + \dots \right]$$

↓ Monopolo
↓ Dipolo
↓ Quadrupolo

Nota: Multipolo: $\vec{A}_{Mon} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint d\vec{l}' = 0$

↳ Como já havíamos discutido não existe termo de multipolo magnético (b¹_{mag}) contínuo do em elétrico (eletrostática).

Dipolo: $\vec{A}_{dip} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \oint \vec{r}' \cos \theta' d\vec{l}' = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \oint (\hat{n} \cdot \vec{r}') d\vec{l}'$

Vamos simplificar:

Fazendo um vetor área se $\vec{Q} = \int_S d\vec{a}$

Se for um plano $|\vec{Q}| = \text{área}$.

pegando $\vec{c}$ constante e $\vec{v} = \vec{c} T$ sendo

T uma função escalar. Vamos aplicar Stokes no vetor $\vec{v}$.

$$\int_S (\nabla \times \vec{v}) \cdot d\vec{a} = \oint_{\vec{r}} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \oint_{\vec{r}} (T d\vec{l}) \cdot \vec{c} \quad (1)$$

Além disso

$$\begin{aligned} \int_S (\nabla \times \vec{v}) \cdot d\vec{a} &= \int_S \nabla \times (\vec{c} T) \cdot d\vec{a} = \int_S (\nabla T \times \vec{c}) \cdot d\vec{a} \\ &= \int_S (d\vec{a} \times \nabla T) \cdot \vec{c} = \oint_S d\vec{a} \times \nabla T \quad (2) \end{aligned}$$

Este resultado vale p/ qualquer vetor $\vec{C}$.

Deste forma. usando (1) e (2)

$$\oint T d\vec{e} = - \int_S \nabla T \times d\vec{e}$$

Supondo $T = \vec{C} \cdot \vec{R}$ $\vec{C} = \text{cte}$

$$\nabla(\vec{C} \cdot \vec{R}) = (\vec{C} \cdot \nabla) \vec{R} + \underbrace{\vec{C} \times (\nabla \times \vec{R})}_0 + \text{termos nulos por ter deriv. de } \vec{C}$$

$$\cancel{\nabla(\vec{C} \cdot \vec{R})} (\vec{C} \cdot \nabla) \vec{R} = \left(C_x \frac{\partial}{\partial x} + C_y \frac{\partial}{\partial y} + C_z \frac{\partial}{\partial z} \right) (x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z})$$

$$(\vec{C} \cdot \nabla) \vec{R} = C_x \hat{x} + C_y \hat{y} + C_z \hat{z} = \vec{C}$$

$$= \nabla(\vec{C} \cdot \vec{R}) = \vec{C}$$

$$\oint (\vec{C} \cdot \vec{R}) d\vec{e} = - \int_S \vec{C} \times d\vec{e} = - \vec{C} \times \underbrace{\int_S d\vec{e}}_{\vec{C} \times \vec{a}}$$

Voltando p/ o approximation de dipolo:

$$\vec{A}_{\text{dip}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \oint (\underbrace{\vec{R} \cdot \vec{R}'}_{\text{constante}}) d\vec{e}' = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} (-\hat{r} \times \int_S d\vec{e}')$$

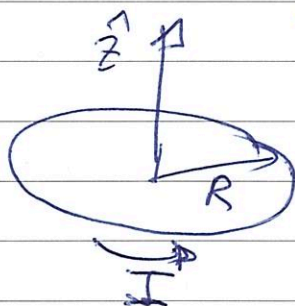
$$\vec{A}_{\text{dip}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \underbrace{\left(I \int_S d\vec{e}' \right)}_{r^2} \times \hat{r} \quad \rightarrow \text{é constante!}$$

Podemos chamar de $\vec{m} = I \int d\vec{a} = I \vec{a}$

o momento de dipolo magnético

$$\therefore \boxed{\vec{A}_{\text{dipolo}}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \hat{r}}{r^2}}$$

Como exemplo, podemos calcular o momento mag $\vec{m}$ de um espiral circular.

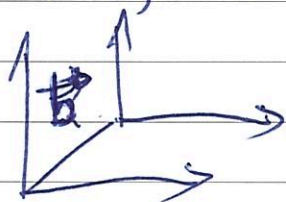


$$\vec{m} = I \pi R^2 \hat{z}$$

$$\vec{A}_d(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I \pi R^2}{4\pi} \frac{\hat{z} \times \hat{r}}{r^2}$$

$$\vec{A}_d(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I R^2}{4 r^2} \hat{\phi}$$

Lembre-se que no caso de momento de dipolo elétrico a mudança de coordenadas dá



$$\vec{P} = \int \vec{r}' \rho(\vec{r}') dV' = \int (\vec{r} - \vec{b}) \rho(\vec{r}') dV'$$

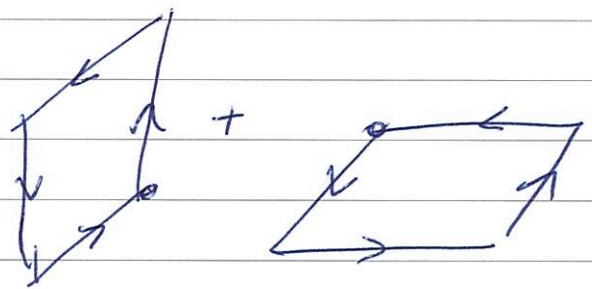
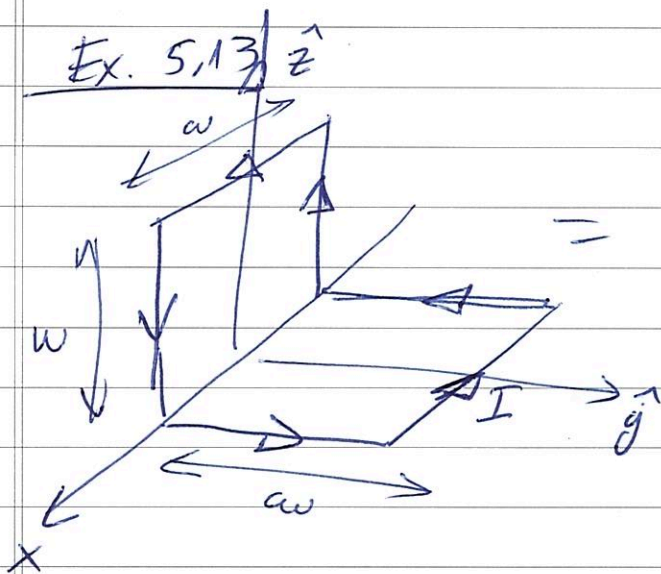
$$= \vec{P} - Q \vec{b}$$

↳ soma das cargas

Aqui $\vec{m} = I \int d\vec{a}$

$d\vec{a}$ é invariante com a transf de coordenadas!

→ Note que aqui o monopolo não existe!
é realmente espantoso isto!



$$\vec{m} = I\omega^2 \hat{y} + I\omega^2 \hat{z}$$

$$\therefore |\vec{m}| = \sqrt{2} I\omega^2 \text{ à } 45^\circ$$

$[z=y]$

Calculamos agora o campo magnético de dipolo

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left(\frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} \right) =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\underbrace{\nabla \left(\frac{1}{r^3} \right) \times (\vec{m} \times \vec{r})}_{\text{I}} + \frac{1}{r^3} \underbrace{\nabla \times (\vec{m} \times \vec{r})}_{\text{II}} \right]$$

$$\text{I} \quad -3 \frac{\vec{r}}{r^5} \times (\vec{m} \times \vec{r}) = -3 \frac{1}{r^5} \left[\vec{m} (\vec{r} \cdot \vec{r}) - \vec{r} (\vec{m} \cdot \vec{r}) \right]$$

$$= \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r}) \vec{r} - 3\vec{m} r^2}{r^5}$$

$$\text{II} \quad \frac{1}{r^3} \nabla \times (\vec{m} \times \vec{r}) = \frac{1}{r^3} \left[(\nabla \cdot \vec{r}) \vec{m} - (\nabla \cdot \vec{m}) \vec{r} + (\vec{r} \cdot \nabla) \vec{m} - (\vec{m} \cdot \nabla) \vec{r} \right]$$

→ olhe pg 216!

$$= \frac{1}{R^3} [3\vec{m} - \vec{m}] = \frac{2\vec{m}}{R^3}$$

$$\therefore \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{R^3} [2\vec{m} - 3\vec{m} + 3(\vec{m} \cdot \hat{r})\hat{r}]$$

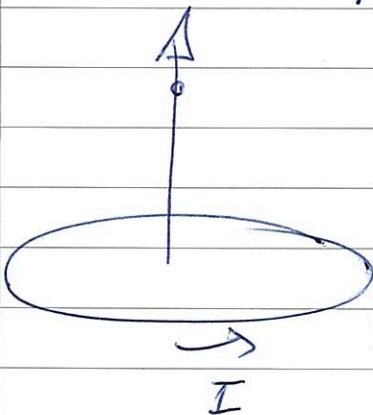
$$\boxed{\vec{B}_{\text{dip}} = \frac{\mu_0}{4\pi R^3} [3(\vec{m} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{m}]}$$

→ Usando este resultado podemos calcular o campo de uma espira usando o formalismo de dipolo.

$$\vec{m} = I\pi R^2 \hat{z}$$

$$\vec{B}_{\text{dip}} = \frac{\mu_0}{4\pi R^3} I\pi R^2 [3(\hat{z} \cdot \hat{r})\hat{r} - \hat{z}]$$

$$= \frac{\mu_0 I R^2}{4R^3} [3\cos\theta \hat{r} - \hat{z}]$$



No eixo $\hat{z}$ $\hat{r} = \hat{z}$ e $\cos\theta = 1$

$$\therefore \vec{B}_{\text{dip}}(z) = \frac{\mu_0 I R^2}{4z^3} \hat{z}$$

Usando Biot-Savart obtemos o valor exato.

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \hat{z} \quad (\text{pg 189 notas de aula})$$