

No limite de  $z \gg R$   $\vec{B} \rightarrow \frac{\mu_0 I}{2 z^3} R^2 \hat{z} = \vec{B}_{dp}$

## Capítulo 6: Magnetização da Matéria.

### Diamagnetos, Paramagnetos e Ferromagnetos.

→ Magnetismo como já vimos pode ser explicado em termos de cargas elétricas em movimento ou correntes em "fios". De fato na matéria existe pequenos correntes elétricas como as elétrons orbitando um núcleo e o "spin".  
(visão clássica!)

Microscopicamente estas correntes podem ser despozadas e consideramos apenas pequenos dipolos magnéticos que podem ou não ser orientados na presença de campo.

Em resumo: → Para: Parafuso grego (proximidade, paralelo)

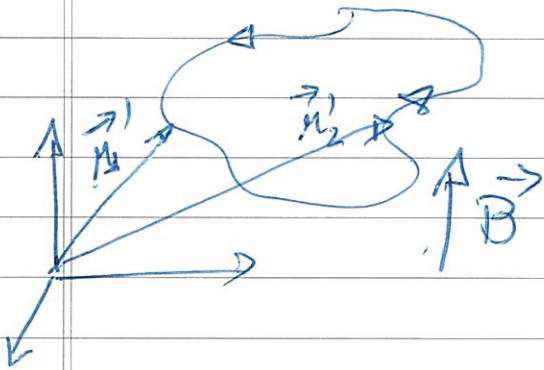
Paramagnetos: Material adquire magnetização  $\vec{M}$  na direção de  $\vec{B}$ . Quando o campo é removido  $\vec{M} \rightarrow 0$  devido a desordem térmica. (Exemplo: Sódio)

→ Dia: Parafuso grego para afastamento.  
Diamagnetos: Alinhamento antiparalelo. Similar comportamento do caso paramagnético. (Exemplo: Ouro).

Ferromagnetos: Alinham-se ao longo do campo  $\vec{B}$ , mas quando o campo externo  $\vec{B}$  é removido, a magnetização persiste, dependendo da temperatura do material.  
(Exemplo: Ferro). Magnetização ainda depende da história Magnética

Ferrimagnetos: ↑↓↑↑↑↑↑↑ Exemplo:  $\text{Fe}_3\text{O}_4$  (Não cancela completamente)  
Anti-Ferromagnetos: ↑↓↑↓↑↓↑↓ Exemplo:  $\text{Fe}_2\text{O}_3$   
+ cancela!)

## Torque e Força sobre dipolos magnéticos



$$\vec{F} = I \oint d\vec{l} \times \vec{B} = 0$$

Apesar de quando o campo é uniforme, a força sempre nula.

Por outro lado, o torque depende da posição com relação à origem:

$$\vec{N} = \vec{r}' \times \vec{F}(\vec{r}') = I \oint \vec{r}' \times (d\vec{l} \times \vec{B})$$

$$\vec{N} = I \oint (\vec{r}' \cdot d\vec{l}) \vec{B} - I \oint (\vec{B} \cdot \vec{r}') d\vec{l}$$

Usando Stokes:

$$\vec{N} = I \vec{B} \int_S (\underbrace{\vec{\nabla}' \times \vec{r}'}_0) \cdot d\vec{a}' - I \vec{B} \times \int_S d\vec{a}'$$

Outra equação  $\oint (\vec{C} \cdot \vec{r}') d\vec{l}$  na página 216 dos notas de aula

$$\therefore \vec{N} = - I \vec{B} \times \int_S d\vec{a}' = - \vec{B} \times \underbrace{\int_S I d\vec{a}'}_{\vec{m}}$$

$$\therefore \boxed{\vec{N} = \vec{m} \times \vec{B}}$$

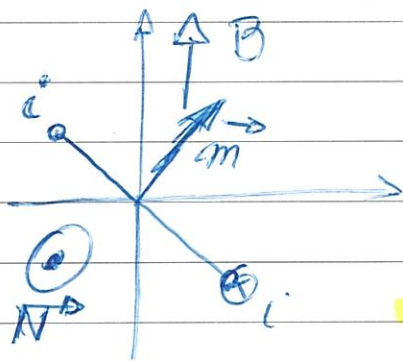
O torque sobre um circuito qualquer de corrente depende da magnetização (momento magnético, ou dipolo)

\* Na presença de  $\vec{B}$  uniforme!

No caso de  $\vec{B}$  não ser uniforme, o campo de um dipolo perfeito (aquele que só tem o termo de dipolo na expansão multipolar) infinitesimal é que dará o torque exato em relação a  $\vec{r}$ .

nota:  $\vec{N}$  é análogo ao caso elétrico  $\vec{N} = \vec{p} \times \vec{E}$

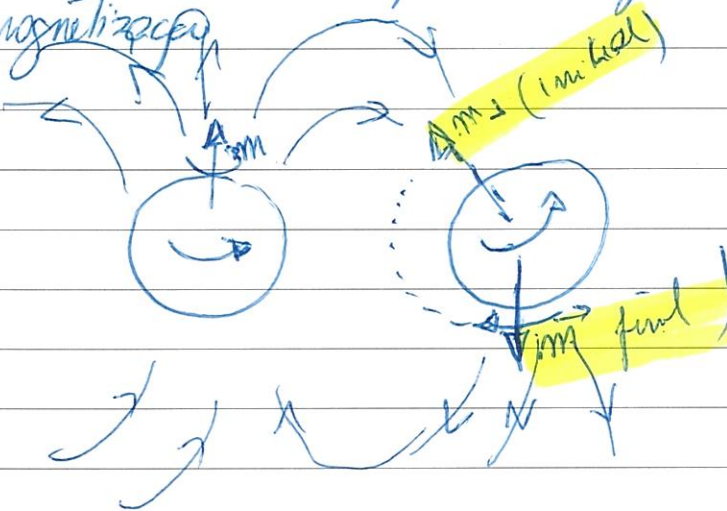
$\vec{m}$  tende a girar p/ ficar paralelo a  $\vec{B}$



Isto é exatamente o esperado em paramagnetismo.

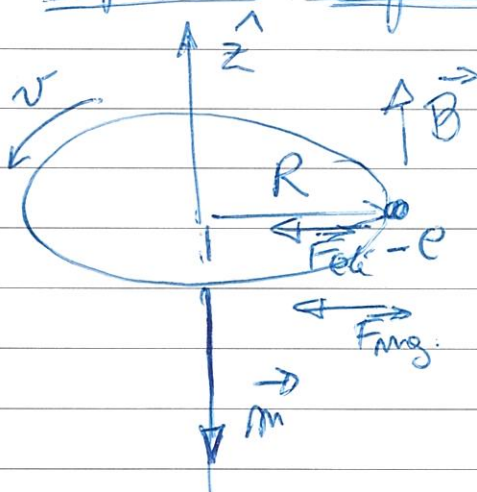
Podemos imaginar cada elétron como um pequeno dipolo magnético.  
(uma esfera carregada girando) (spin)

Em átomos ou moléculas com número ímpar de elétrons o elétron restante desemparelhado do átomo vizinho tende a se alinhar de forma oposta e neutralizar a magnetização.



Obviamente este alinhamento ainda é incompleto devido a efeito térmico.

## Efeito do Campo magnético em orbitas atômicas



Assumindo órbita circular.

$$I = \frac{-e}{T} = -e \frac{v}{2\pi R}$$

MAS  $\vec{m} = I \vec{a} = \frac{e v}{2\pi R} \pi R^2 \hat{z}$

$$\boxed{\vec{m} = \frac{-1}{2} e v R \hat{z}}$$

Para uma órbita estável, temos que ~~equilíbrio~~ a resultante é a força eletrostática.

$$m_e \frac{v^2}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{R^2} = m_e \frac{v^2}{R} \quad \left( \vec{F} = m \vec{a} \right)$$

↓ a aceleração  
massa

Na presença de um  $\vec{B}$  externo temos ainda a força magnética

$$\vec{F}_{\text{mag}} = -e (\vec{v} \times \vec{B}) \hat{n}$$

$$\therefore \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{R^2} + e \vec{v} \cdot \vec{B} = m_e \frac{\vec{v}^2}{R}$$

Dependendo da direção de  $\vec{B}$ , a velocidade  $|\vec{v}|$  é maior ou menor, por isto  $\vec{v}$ .

No caso  $\vec{v} > v$  :-

$$e \vec{v} \cdot \vec{B} = \frac{m_e}{R} (\vec{v}^2 - v^2) = \frac{m_e}{R} (\vec{v} + v)(\vec{v} - v)$$

$\Delta v = \bar{v} - v$  sendo pequeno. e  $\therefore \bar{v} + v \approx 2\bar{v}$

$$e \cancel{v} B = \frac{m_e}{R} 2 \cancel{v} \Delta v \Rightarrow \boxed{\Delta v = \frac{e R B}{2 m_e}}$$

Veja que quando ligz  $\vec{B}$ , o elétron aumenta de velocidade. Isto seria consistente com o fato que  $\vec{B}$  não realiza trabalho?

Na verdade veremos que um campo magnético é capaz de induzir um campo elétrico (Cap. 7) e este é quem de fato acelera o elétron!

$$\boxed{\Delta \vec{m} = -\frac{1}{2} e (\Delta v) R \hat{z} = -\frac{e^2 R^2}{4 m_e} \vec{B}}$$

Neste caso, vemos que  $\vec{B}$  diminui  $\vec{m}$ .

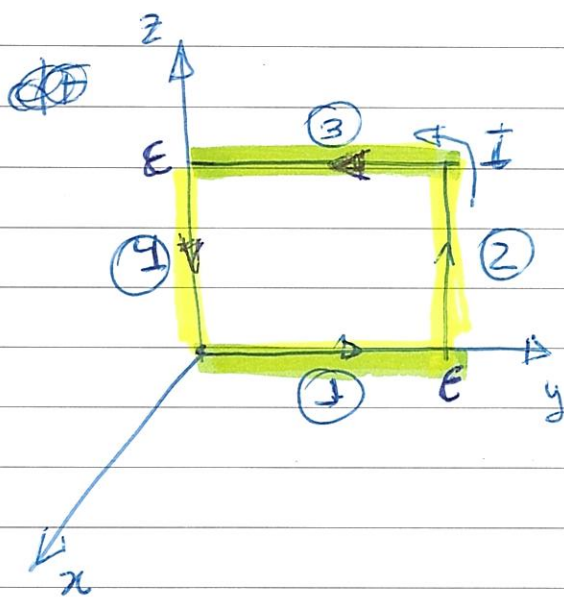
$\vec{B}$  leva a uma diminuição de  $\vec{m}$  e portanto uma diminuição do campo magnético criado pela própria órbita. Este é o chamado diamagnetismo.

Normalmente as órbitas não estão alinhadas com o campo. Neste caso, cada momento de dipolo orbital se cancela na soma. Na presença de um campo existe um alinhamento parcial anti-paralelo. Este efeito é <sup>tipicamente</sup> muito menor que o do paramagnetismo (Existem com spin desemparelhados). É mais facilmente observado no caso de átomos e moléculas com um número par de elétrons; pois o efeito de spin é cancelado!



Outra forma de Calcular  
Força sobre dipolo Mag.

Pr/225/



Força sobre uma espira quadrada  
de lado  $a$  (infinitesimal) (pelo 6.4)

$$\vec{F} = I \oint d\vec{\ell} \times \vec{B}$$

$$d\vec{F} = I dy \hat{y} \times \vec{B}(0, y, 0) + I dz \hat{z} \times \vec{B}(0, a, z) + (-I) dy \hat{y} \times \vec{B}(0, y, a) + (-I) dz \hat{z} \times \vec{B}(0, 0, z)$$

$$\therefore d\vec{F} = I \left\{ -dy \hat{y} \times [\vec{B}(0, y, a) - \vec{B}(0, y, 0)] + dz \hat{z} \times [\vec{B}(0, a, z) - \vec{B}(0, 0, z)] \right\}$$

$\approx \epsilon \frac{\partial \vec{B}}{\partial z}$   
 $\approx \epsilon \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} \Big|_{(0,0,z)}$

$$\therefore \vec{F} = I \int \left\{ \right\}$$

$$\vec{F} = I \epsilon^2 \left\{ \hat{z} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} - \hat{y} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} \right\}$$

Lembre-se que  $\int dy \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} \Big|_{0,y,0} \approx \epsilon \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} \Big|_{0,0,0}$  e  $\int dz \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} \Big|_{0,0,z} \approx \epsilon \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} \Big|_{0,0,0}$

ou  $\vec{F} = \underbrace{I \epsilon^2}_m$

Mag dipolo mag

|                                   |                                   |                                   |   |                                   |                                   |                                   |
|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|---|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| $\hat{x}$                         | $\hat{y}$                         | $\hat{z}$                         |   | $\hat{x}$                         | $\hat{y}$                         | $\hat{z}$                         |
| 0                                 | 0                                 | 1                                 | - | 0                                 | 1                                 | 0                                 |
| $\frac{\partial B_x}{\partial y}$ | $\frac{\partial B_y}{\partial y}$ | $\frac{\partial B_z}{\partial y}$ |   | $\frac{\partial B_x}{\partial z}$ | $\frac{\partial B_y}{\partial z}$ | $\frac{\partial B_z}{\partial z}$ |

$$\vec{F} = m \left\{ \hat{y} \frac{\partial B_x}{\partial y} - \hat{x} \frac{\partial B_y}{\partial y} - \hat{x} \frac{\partial B_z}{\partial z} - \hat{z} \frac{\partial B_x}{\partial z} \right\}$$

Podemos obter p/ o termo  $-\hat{x} \left( \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \right)$  e

lembrar que  $\nabla \cdot \vec{B} = 0 \therefore \frac{\partial B_x}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial y} - \frac{\partial B_z}{\partial z}$

$$\therefore \vec{F} = m \left\{ \hat{x} \frac{\partial B_x}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial B_x}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial B_x}{\partial z} \right\}$$

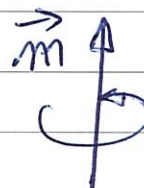
isto é o mesmo coisa que  $\vec{F} = m \nabla B_x$

Como  $\vec{m} = m \hat{x}$  então  $\vec{F} = \nabla (\vec{m} \cdot \vec{B})$  pois  $\vec{m} \cdot \vec{B} = m B_x$

Mostramos o resultado p/  $\boxed{\vec{F} = \nabla (\vec{m} \cdot \vec{B})}$

este é análogo ao caso elétrico  $\vec{F} = \nabla (\vec{p} \cdot \vec{E})$

Modelo de Gilbert



Modelo de Ampere

ANALOGIA (ERRADA)

Figuram. Correto!

Campo de um objeto magnetizado



$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \hat{r}_0}{r_0^2}$$

Potencial Veto  
Campo de um dipolo magnético.

Suponha agora que o objeto tenha uma densidade de magnetização  $\vec{M}(\vec{r}')$  por unidade de volume.

$$\therefore \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times \hat{r}}{r^2} dV'$$

Noti a espantosa similaridade de formulaço, comparado com o caso de um dielétrico e como determinamos  $\vec{V}(\vec{r})$  a partir de  $\vec{P}(\vec{r}')$ .

Novamente podemos explorar  $\nabla' \frac{1}{r} = \frac{\vec{r}}{r^3}$

análogo  $\nabla' = -\nabla$

$$\therefore \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V [\vec{M}(\vec{r}') \times (\nabla' \frac{1}{r})] dV'$$

facil mostrar!

(ver regra 7 do grad. vetorial).

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{1}{r} [\vec{\nabla}' \times \vec{M}(\vec{r}')] dV' - \int_V \vec{\nabla}' \times \left[ \frac{\vec{M}(\vec{r}')}{r} \right] dV'$$

verso da 224

Da mesma forma que antes, a segundo integral poder ser simplificado usando  $\vec{v} \times \vec{c}$  com  $\vec{c}$  constante (problema 1.60(b))

$$\therefore \int_V (\vec{\nabla} \cdot (\vec{v} \times \vec{c})) dV = \int_S (\vec{v} \times \vec{c}) \cdot d\vec{a} = \int_S (d\vec{a} \times \vec{v}) \cdot \vec{c}$$

regra 6

$$= \oint_S d\vec{a} \times \vec{v} \cdot \vec{c}$$

$$\int_V [\vec{c} \cdot (\nabla \times \vec{v}) - \vec{v} \cdot (\nabla \times \vec{c})] dV = \left[ \int_V (\nabla \times \vec{v}) dV \right] \cdot \vec{c}$$

$$\therefore \int_V (\nabla \times \vec{v}) dV = - \oint_{\text{Sup.}} \vec{v} \times d\vec{a}$$

Deu a forma 
$$-\int_{\text{Vol}} \nabla' \times \left[ \frac{\vec{M}(\vec{r}')}{r} \right] d\text{Vol}' = + \oint \frac{\vec{M} \times d\vec{a}'}{r}$$

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \int_{\text{Vol}} \left[ \nabla' \times \frac{\vec{M}(\vec{r}')}{r} \right] d\text{Vol}' + \oint \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times d\vec{a}'}{r} \right]}$$

Para o termo de Volume temos  $\vec{J}_M = \nabla \times \vec{M}$

Para o termo de Superfície temos  $\vec{K}_M = \vec{M} \times \hat{n}$

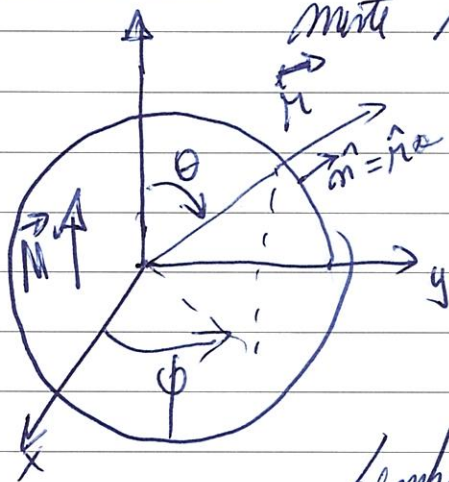
onde  $\hat{n}$  é o vetor normal à superfície:  $d\vec{a}' = \hat{n} da'$

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{Vol}} \frac{\vec{J}_M(\vec{r}')}{r} d\text{Vol}' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \frac{\vec{K}_M(\vec{r}')}{r} d\vec{a}'}$$

Com  $\vec{M}$  obtemos  $\vec{A}$  e assim obtemos  $\vec{B}$ .

Ex. 6.1 !!

Encontrar o campo de uma esfera uniforme  
mente magnetizada (Magnetização uniforme).



$$\vec{M} = M \hat{z}$$

$$\vec{J}_M = \nabla \times \vec{M} = 0 \quad \text{pois } M = \text{cte.}$$

$$\vec{K}_M = \vec{M} \times \hat{n} = M \sin \theta \hat{\phi}$$

lembrando do ~~exemplo~~ exemplo 5.11, uma esfera  
com distribuição de carga é quando no do

$$\vec{K} = \vec{v} \times \vec{v} = \vec{v} \times \vec{\omega} \times \vec{R} = \vec{v} \omega R \sin \theta \hat{\phi}$$

fazendo  $\vec{v} \omega R = |\vec{M}|$  ou  $\vec{M} = \vec{v} R \omega$

Temos que  $\boxed{\vec{B} = \frac{2}{3} \mu_0 \vec{M}}$  dentro da esfera.

$\vec{m} = \vec{B}_{\text{fora}} = \frac{4\pi R^3 \vec{M}}{3}$  ou o campo de um dipolo

Veja em mais detalhes o caso  $r > R$  da coroa esférica quando (Ex. 5.11 e Prob. 5.36)

Eq. 5.66 do Griffiths:  $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 R^4 \omega \sin \theta}{3 r^2} \hat{\phi}$  ou

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 R^3 M \sin \theta}{3 r^2} \hat{\phi}$$

onde  $M = \vec{v} \omega R$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{4\pi R^3 M \hat{z} \times \hat{r}}{r^3}$$

Note que o momento ~~total~~ de dipolo da esfera tem  $\vec{m} = M \hat{z} \cdot \text{Vol}$

$$\vec{m}_{\text{tot}} = \frac{4\pi R^3 M \hat{z}}{3} \quad \text{ou seja}$$

$$\boxed{\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \hat{r}}{r^2}}$$

exatamente o potencial vetor de um dipolo perfeito.