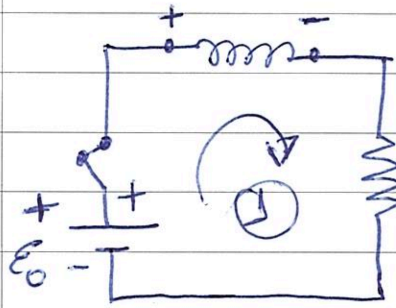
~~A~~ contra-f.e.m aparece se opondo. Neste caso, a analogia do indutor com a massa em um sistema massa ~~mola~~ p/ o indutor é perfeito.
meio dissipativo

Exemplo 7.12 || Calcular $I(t)$ para o circuito RL.



a) Ligamos a chave em $t=0$ ∴ $I(0)=0$

$$\mathcal{E}_0 - L\frac{dI}{dt} = RI$$

$\mathcal{E}_0$ → fem ext; $L\frac{dI}{dt}$ → contra fem

1 Malha de Kirchoff.

$$L\frac{dI}{dt} + RI = \mathcal{E}_0$$

(Usando Euler) Desta vez

$I(t) = I_H + I_{part}$ ou NH

$I_H = Ae^{\lambda t} \Rightarrow L\cancel{A}\lambda + R\cancel{A} = 0 \quad \lambda = -\frac{R}{L}$

$I_H(t) = Ae^{-R/L\, t}$

$I_{NH} = B \Rightarrow 0 + RB = \mathcal{E}_0 \therefore B = \frac{\mathcal{E}_0}{R}$

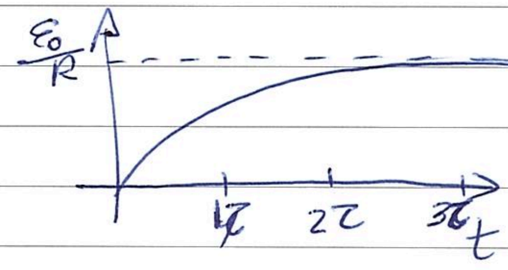
$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} + Ae^{-R/L\, t}$$

$$I(0) = 0 \Rightarrow \frac{\mathcal{E}_0}{R} + A = 0 \therefore A = -\frac{\mathcal{E}_0}{R}$$

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R}\left(1 - e^{-R/L\, t}\right)$$

ou $\tau = \frac{L}{R}$. (constante de tempo).

$$\boxed{I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$



(b) Se tentarmos desligar a chave abruptamente, digamos em um tempo τ onde ~~a~~ a corrente no circuito já é da ordem de $I \approx \frac{\varepsilon_0}{R}$ então temos que

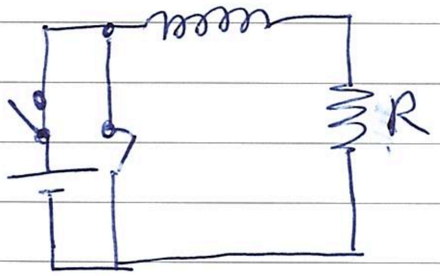
$\frac{dI}{dt} \sim \frac{\varepsilon_0/R}{\delta t}$ Note que neste caso, quando menor for

$$\delta t \to 0 \qquad \frac{dI}{dt} \to \infty$$

Ou seja a força contra eletromotriz fica enorme, tão grande que a corrente tenta vencer a rigidez dielétrica do ar (quando é suficientemente alta) gerando faíscas.

Olhando a corrente no circuito $I(t) \sim 0$, o ato de desligar a chave ou ligar não provocará nada dramático.

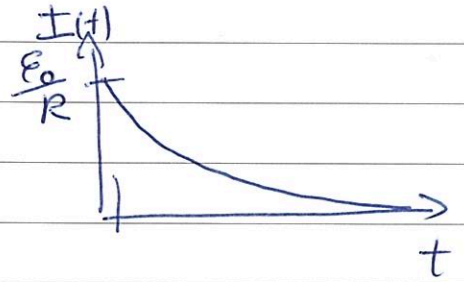
c)



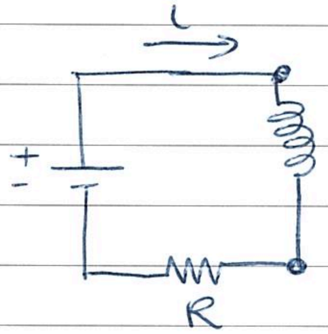
$$I(0) = \frac{\varepsilon_0}{R} \qquad \frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L} I$$

$$I(t) = I_0 \, e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$\boxed{I(t) = \frac{\varepsilon_0}{R} e^{-\frac{R}{L}t}}$$



Energia em Campo Magnético



Para passar uma corrente I, devemos fazer um trabalho contra a força eletromotriz gerada no indutor. Esta energia é de fato armazenada no indutor de forma equivalente ao sistema de massa ~~massa~~. Equivalente à energia cinética/potencial de massa

$$\mathcal{E}_{contra} = -L\frac{dI}{dt}$$

indica que é o trabalho feito por nós (fonte) contra a f.e.m.

$$\boxed{dW = -\mathcal{E}_{contra}\, dq} \Rightarrow \boxed{\frac{dW}{dt} = -\mathcal{E}_{contra}\frac{dq}{dt} = -\mathcal{E} I}$$

$$\therefore \frac{dW}{dt} = LI\frac{dI}{dt} \Rightarrow \int_0^W dW = L\int_0^I I'\,dI'$$

$$\therefore \boxed{W = \frac{1}{2}LI^2}$$

Podemos pensar em reescrever o trabalho em termos de outras quantidades.

$$\mathcal{E} = -L\frac{dI}{dt} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad \text{mas} \quad \frac{d\Phi}{dt} = L\frac{dI}{dt} \quad \text{ou seja}$$

$$\Phi = LI$$

Portanto $W = \frac{1}{2}\Phi I$

Mas podemos calcular Φ a partir do campo $\vec{B}$ e do potencial Vetor $\vec{A}$

$$\Phi = \int_S \vec{B}\cdot da = \int_S (\nabla \times \vec{A})\cdot da = \oint_{\Gamma(S)} \vec{A}\cdot d\vec{l}$$

$$\therefore LI = \oint_{\Gamma(S)} \vec{A}\cdot d\vec{l} \Rightarrow W = \frac{1}{2} I \oint_{\Gamma(S)} \vec{A}\cdot d\vec{l}$$

ou Ainda $\quad W = \frac{1}{2}\oint(\vec{A}\cdot\vec{I})\,dl$

Podemos generalizar p/ o caso volumétrico como

$$\boxed{W = \frac{1}{2}\int_{Vol}(\vec{A}\cdot\vec{J})\,dVol}$$

Lembrando que $\nabla\times\vec{B} = \mu_0\vec{J}$

$$W = \frac{1}{2\mu_0}\int \vec{A}\cdot(\nabla\times\vec{B})\,dVol$$

Usando: $\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot(\nabla\times\vec{A}) - \vec{A}\cdot(\nabla\times B)$

$$\vec{A}\cdot(\nabla\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot\vec{B} - \nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{B})$$

$$W = \frac{1}{2\mu_0}\left[\int B^2\,dVol - \int \nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{B})\,dVol\right]$$

$\downarrow$

Teo. do divergente

$$W = \frac{1}{2\mu_0}\left[\int B^2\,dVol - \oint_S (\vec{A}\times\vec{B})\cdot d\vec{a}\right]$$

Note que como podemos fazer a região tão grande quanto quiser p/ englobar todo $\vec{J}$, a primeira integral não muda pois não importa se integrarmos em uma região onde $\vec{B} \to 0$. Já no caso da $\oint_S$, fazendo esta casca ir p/ infinito, lá $\vec{A}\times\vec{B} \to 0 \;\therefore\; \oint \to 0$.

Reduzindo:

$$\boxed{W = \frac{1}{2\mu_0}\int_{\text{todo espaço}} B^2 \, d\text{Vol}}$$

Note que $\vec{B}$ não realiza trabalho, mas estamos falando de energia armazenada em $\vec{B}$. Como?

Não existe nenhuma inconsistência. Para criar $\vec{B}$ onde $\vec{B}=0$, aparece $\vec{E}$ devido a lei da indução de Faraday já que $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \neq 0$.

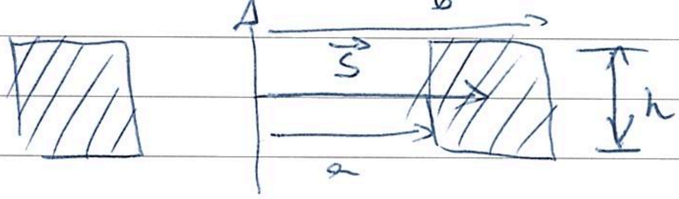
Este $\vec{E}$ é contrário à criação de $\vec{B}$, desta forma o trabalho é feito contra este $\vec{E}$. (a força contra-eletromotriz)

Note a similaridade

$$W_{ele} = \frac{1}{2}\int V\rho \, d\text{vol} = \frac{\varepsilon_0}{2}\int E^2 \, d\text{vol}$$

$$W_{Mag} = \frac{1}{2}\int (\vec{A}\cdot\vec{J}) \, d\text{vol} = \frac{1}{2\mu_0}\int B^2 \, d\text{vol}$$

Probl. 7.27 Calcule a Energia armazenada no Toroide do Exemplo 7.11



$$\vec{B} = \frac{\mu_0 N I}{2\pi s}\hat{\phi}$$

$$W = \frac{1}{2\mu_0}\int_{(\text{Todo espaço})} B^2 \, d\text{vol} = \frac{1}{2\mu_0}\frac{\mu_0^2 N^2 I^2}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_a^b \frac{1}{s^2} h s \, d\phi \, ds$$

$$\boxed{W = \frac{1}{\cancel{2\mu_0}}\frac{\mu_0 N^2 I^2}{4\pi^2}\, \cancel{2\pi} h \ln\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{1}{4\pi}\mu_0 N^2 I^2 h \ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

(Note fora do solenoide $\vec{B} = 0$!)

Usando agora o resultado p/ $L = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$

$$\boxed{W = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{4\pi}\mu_0 N^2 h \ln\left(\frac{b}{a}\right) I^2}$$

Prob 7.29 Na aula passada havíamos resolvido a descarga do circuito RL.

a) $I(t) = \frac{\varepsilon_0}{R} e^{-\frac{R}{L}t}$

b) $P = I^2 R = \frac{\varepsilon_0^2}{R^2} R e^{-\frac{2Rt}{L}} = \frac{\varepsilon_0^2}{R} e^{-\frac{2R}{L}t}$

Note que $\frac{dW}{dt} = \frac{1}{2} L \frac{d(I^2)}{dt} = \frac{1}{\cancel{2}} \cancel{L} \frac{\varepsilon_0^2}{R^2} e^{-\frac{2Rt}{L}} \left(-\frac{\cancel{2}R}{\cancel{L}}\right)$

$$\boxed{P = I^2 R = -\frac{dW_{(ind)}}{dt}}$$

A potência dissipada no ~~indutor~~ resistor é igual à taxa de variação da energia armazenada no indutor

$$W = \int P\,dt = \frac{\mathcal{E}_0^2}{R^2}\cancel{R}\int_0^\infty e^{-\frac{2R}{L}t}\,dt = \frac{\mathcal{E}_0^2}{R}\left(-\frac{L}{2R}e^{-\frac{2R}{L}t}\right)\Big|_0^\infty$$

$$\boxed{W_{Resist} = \frac{\mathcal{E}_0^2}{R}\left(0 + \frac{L}{2R}\right) = \frac{1}{2}L\left(\frac{\mathcal{E}_0}{R}\right)^2}$$

$$\boxed{W = W_{0\,\text{do indutor}} = \frac{1}{2}L I_0^2 = \frac{1}{2}L\left(\frac{\mathcal{E}_0}{R}\right)^2}$$

7.3 Equações de Maxwell

1- Eletrodinâmica antes de Maxwell.

(i) $\Rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$ (Lei de Gauss)

(ii) $\Rightarrow \nabla \cdot \vec{B} = 0$ (Sem nome).

(iii) $\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ (Lei de Faraday)

(iv) $\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$ (Lei de Ampère)

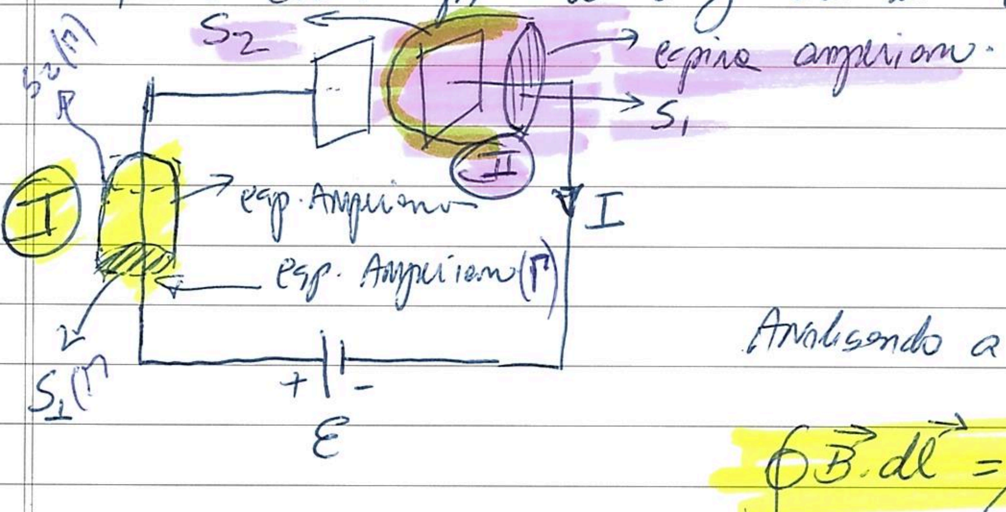
Tudo parecia estar bem, até aplicarmos a divergência às equações III e IV (Lei de Faraday e Lei de Ampère).

III $\quad \underbrace{\nabla\cdot(\nabla\times\vec{E})}_{\text{Div de rot é sempre zero!}} = \nabla\cdot\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{(\nabla\cdot\vec{B})}_{0 \text{ por II}}$ ✓

IV $\quad \underbrace{\nabla\cdot(\nabla\times\vec{B})}_{\substack{\text{zero!}\\ \text{sempre}}} = \mu_0 \underbrace{(\nabla\cdot\vec{J})}_{\text{somente p/ a magnetostática.}}$

⇒ OPS! Isto significa que a lei de Ampère deve estar incompleta!

Fica claro p/ a carga de um capacitor



Analisando a região I

$$\oint_{\Gamma} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{env} = \mu_0 \int_{\substack{S_1(\Gamma)\\ \text{ou}\\ S_2(\Gamma)}} \vec{J}\cdot d\vec{a}$$

ANalisando agora a região (II)

$$\oint_{\Gamma} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{env} = \mu_0 \int_{S_1} \vec{J}\cdot d\vec{a}$$

$$\oint_{\Gamma} \vec{B}\cdot d\vec{l} = 0 = \mu_0 \int_{S_2} \cancel{\vec{J}}^{\,0}\cdot d\vec{a}$$

Inconsistência!

↳ Lei de Ampère só funciona p/ magnetostática (já falamos sobre isto).

Maxwell resolve o problema aplicando a equação da continuidade.

$$\nabla\cdot\vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0 \nabla\cdot\vec{E}\right) = -\nabla\cdot\left(\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$$

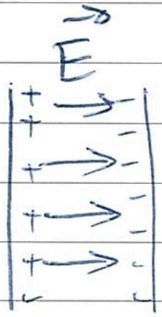
Se combinarmos este resultado, anulamos a divergência extra.

$$\therefore \boxed{\nabla\cdot\left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = 0}$$

(IV) $$\nabla\times\vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \underbrace{\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}_{\Rightarrow \vec{J}_d}$$

↳ Neste caso ao aplicarmos $\nabla\cdot$ na Eq IV, estará OK!

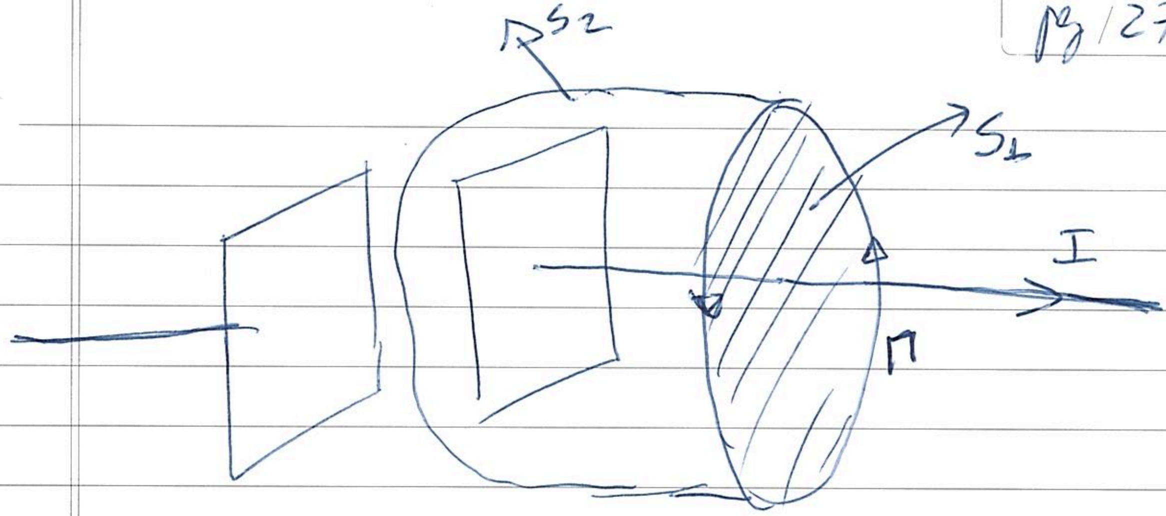
$E = 0$



$E = 0$

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{A\varepsilon_0}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{A\varepsilon_0}\frac{dQ}{dt} = \frac{I}{A\varepsilon_0}$$



Vamos refazer a conta com a lei de Ampère corrigida

$$\oint_{\Gamma} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{env} + \mu_0 \varepsilon_0 \int_{S_1} \underbrace{\left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)}_{0} \cdot d\vec{a} = \boxed{\mu_0 I_{env}}$$

$$\oint_{\Gamma} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \underbrace{\mu_0 \underbrace{I_{env}}_{0}}_{0} + \mu_0 \varepsilon_0 \int \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) \cdot d\vec{a} = \mu_0 \varepsilon_0 \left(\frac{I}{A\varepsilon_0}\right) A = \mu_0 I$$

OK! Não importa a superfície tomada!

claro, se não receberia este nome! Mas levou todo o crédito! :)

Equações de MAXWELL (Após MAXWELL)

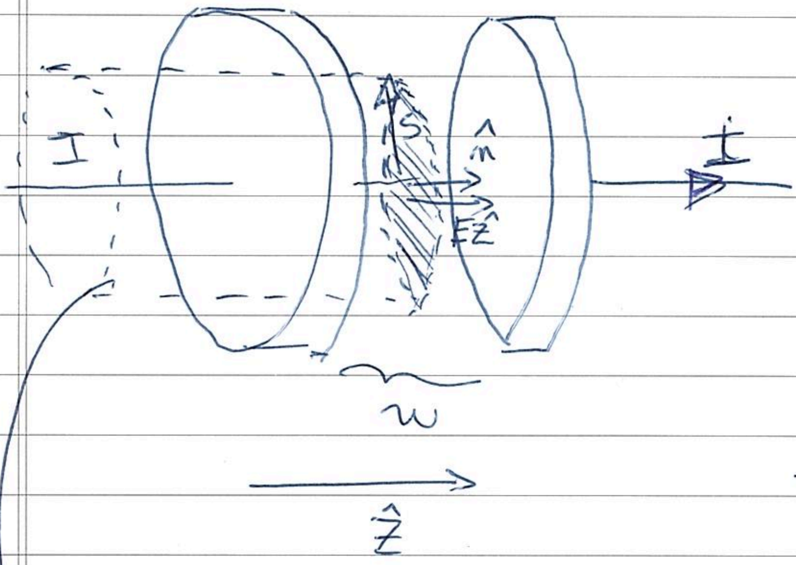
(i) $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$ (Lei de Gauss)

(ii) $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ (sem nome)

(iii) $\vec{\nabla}\times\vec{B} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ (Lei de Faraday)

(iv) $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ (Ampère - Maxwell)

Probl. 7.32



a) $\vec{E} = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0}\hat{z}$

$I_0 = 0$

$\sigma(t) = \frac{Q(t)}{\pi a^2} = \frac{It}{\pi a^2}$

$\therefore \boxed{\vec{E} = \frac{It}{\pi\varepsilon_0 a^2}\hat{z}}$

b) $\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{desl.}$ $\qquad I_{desl} = |\vec{J}_d|\pi s^2$

$I_{desl} = \varepsilon_0 \frac{dE}{dt}\pi s^2 = \frac{I\cancel{\pi}s^2}{\cancel{\pi}a^2}$

$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{desl} \Rightarrow B\,2\pi s = \mu_0 I\frac{s^2}{a^2}$

$\therefore \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2}s\,\hat{\phi}}$