

Equações de Maxwell na Matéria.

As equações de Maxwell conforme apresentamos anteriormente são corretas e completas. No entanto, assim como no caso da magnetostática e eletrostática, em se tratando de campos no interior de materiais existe uma forma mais conveniente de representar tais equações.

Vimos em eletrostática que dipolos elétricos surgem devido a uma polarização do material. Algo similar acontece para o caso de dipolos magnéticos em se tratando da magnetostática.

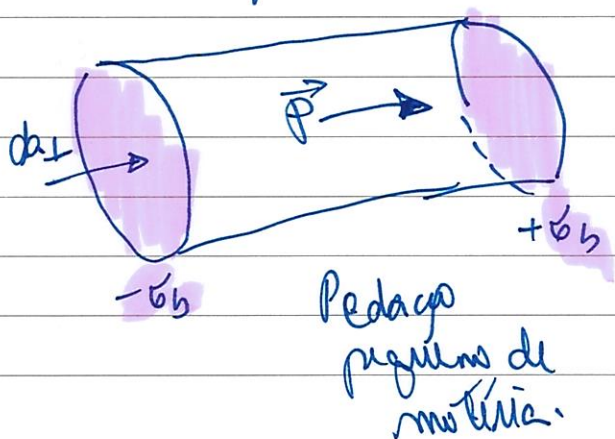
Estes são descritos por:

~~(Ligadas)~~ polarização de cargas (eletrostática): $\vec{P} = -\nabla \phi$

~~(Ligadas)~~ corrente de magnetização na matéria (magnetostática): $\vec{J}_M = \nabla \times \vec{M}$

De fato também existem polarizações de superfície e correntes de superfície.

No caso no eletro, devemos verificar se a polarização não cria um fluxo de algum tipo de carga.



$$\phi_f = \vec{P} \cdot \hat{n}$$

O que acontece se $\vec{P}$ variar ligeiramente no tempo?

$$\frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t} \rightarrow \text{variação em } \vec{P}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\Delta(-\epsilon_P)}{\Delta t} \rightarrow -\frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t} \cdot d\vec{a}_- \\ \frac{\Delta(+\epsilon_P)}{\Delta t} \rightarrow \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t} \cdot d\vec{a}_+ \end{array} \right\} \xrightarrow[\Delta t \rightarrow 0]{\text{no limite}} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \cdot d\vec{a}_- \\ \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \cdot d\vec{a}_+ \end{array} \right.$$

Portanto $\vec{J}_P = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$ ou $dI = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \cdot d\vec{a}$

Podemos verificar que esta corrente de polarização satisfaz a equação da continuidade. (conservação de carga !!)

$$\nabla \cdot \vec{J}_P = \nabla \cdot \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\underbrace{\nabla \cdot \vec{P}}_{-\rho_P}) = -\frac{\partial \rho_P}{\partial t}$$

OK! Satisfaz

Podemos agora separar a contribuição em dois tipos de cargas.

$$\rho = \rho_f + \rho_p = \rho_f - \nabla \cdot \vec{P}$$

O mesmo p/ as densidades de correntes:

$$\vec{J} = \vec{J}_f + \vec{J}_M + \vec{J}_P = \vec{J}_f + \vec{V} \times \vec{M} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

Podemos agora resolver algumas das equações de Maxwell apropriadamente:

Lei de Gauss : $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho_f - \nabla \cdot \vec{P})$
 ou $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f$ onde

$$\vec{D} \equiv \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

Lei de Ampère-Maxwell:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J}_f + \nabla \times \vec{M} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \right) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \left(\underbrace{\frac{\vec{B}}{\mu_0}}_{\vec{H}} - \vec{M} \right) = \vec{J}_f + \frac{\partial}{\partial t} \left(\underbrace{\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}}_{\vec{D}} \right)$$

$$\therefore \nabla \times \vec{H} = \vec{J}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$\vec{J}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

Desta forma, as Equações de Maxwell em qualquer meio, pode ser representada em termos das

Cargas livres

e Correntes livres

$$\begin{aligned} (I) \quad & \nabla \cdot \vec{D} = \rho_f \\ (II) \quad & \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ (III) \quad & \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ (IV) \quad & \nabla \times \vec{H} = \vec{J}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{aligned}$$

$$\vec{J}_d \equiv \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

É claro que para conhecer $\vec{E}$ e $\vec{D}$ no meio, precisamos conhecer o material. Se estes forem lineares então:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} \quad \therefore \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad \text{onde } \epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi_e)$$

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad \begin{array}{l} \rightarrow \text{susceptibilidade} \\ \text{do material.} \end{array} \quad \begin{array}{l} \rightarrow \text{permissividade} \\ \text{do meio (material)} \end{array}$$

$$\rightarrow \text{susceptibilidade} \\ \text{magnética}$$

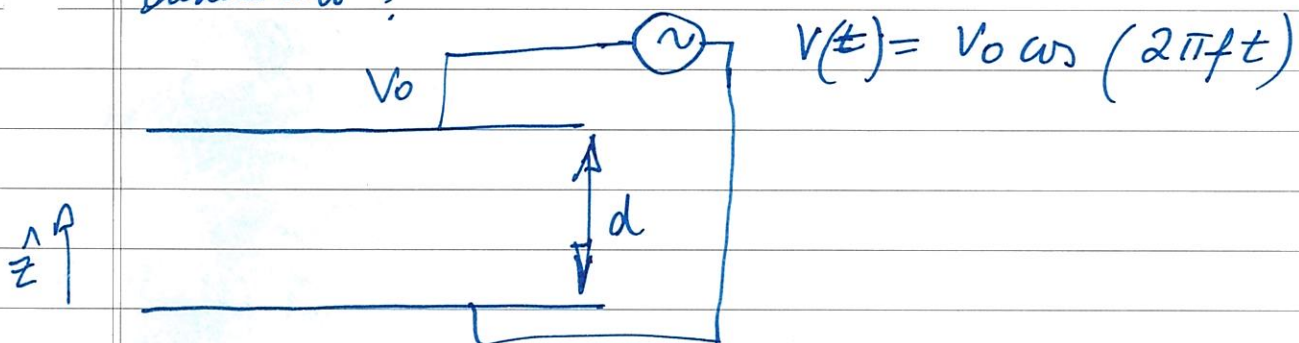
$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B} \quad \text{e} \quad \mu = \mu_0 (1 + \chi_m)$$

$$\rightarrow \text{permeabilidade magnética do meio} \\ \text{(material)}$$

Exemplo : Problema 7.37 (água do MAR)

na frequência de $f = 4 \times 10^8 \text{ Hz}$, $\epsilon = 81 \epsilon_0$ e $\mu = \mu_0$.
 $\rho = 0.23 \, \Omega \cdot \text{m}$.

Qual é o razão entre corrente de condução e corrente de deslocamento?



$$\vec{D} = \epsilon \hat{z} \quad \text{e} \quad \vec{E} = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \hat{z} \Rightarrow V(z) = \frac{\epsilon}{\epsilon} z$$

$$V_A = \frac{\epsilon d}{\epsilon} = |\vec{E}_d| d \quad \therefore \quad |\vec{D}| = \frac{\epsilon V}{d} = \frac{\epsilon V_0 \cos(2\pi f t)}{d}$$

$$\vec{J}_{dis} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\epsilon V_0}{d} \frac{\partial}{\partial t} (\cos(2\pi f t))$$

$$\vec{J}_{dis} = \frac{\epsilon V_0}{d} [-2\pi f \sin(2\pi f t)] \hat{z}$$

$$\vec{J}_{cond} = \epsilon_{cond} \vec{E} = \frac{1}{\rho} \vec{E} \Rightarrow |\vec{J}_{cond}| = \frac{V}{\rho d}$$

$$\vec{J}_{cond} = \frac{V_0}{d \rho} \cos(2\pi f t) \hat{z}$$

Assim entre as amplitudes máximas no ds.

$$\frac{\text{Amp}[\vec{J}_{dis}]}{\text{Amp}[\vec{J}_{cond}]} = \frac{V_0/d \rho}{\epsilon V_0 2\pi f / d} = \frac{1}{2\pi f \epsilon \rho}$$

$$\frac{J_{dis}}{J_{cond}} = \frac{1}{2\pi \times 4 \times 10^8 \times 8.8 \times 10^{-12} \cdot 81 \cdot 0.23} = \underline{\underline{2.4}}$$

Condições de Contorno em Fronteiras

Já tratamos disto p/ os diferentes campos $\vec{E}$, $\vec{D}$, $\vec{B}$ e $\vec{H}$ nos descontinuidades.

Usaremos o teorema integral e no caso de superfícies, um cilindro infinitesimal envolvendo a fronteira.

No caso de integral de linha usamos espira amperiana infinitesimal perpendicular à interface.

Formas integrais das Eq. de Maxwell

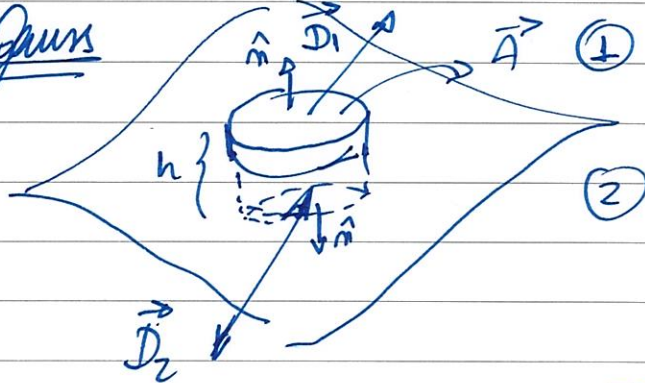
$$(I) \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{a} = Q_{f(\text{env})}$$

$$(II) \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{a}$$

$$(III) \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0$$

$$(IV) \oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{f(\text{env})} + \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} \cdot d\vec{a}$$

① Gauss



$$A(D_1^\perp - D_2^\perp) = Q_f \Rightarrow \boxed{D_1^\perp - D_2^\perp = \epsilon_f} \text{ ou } \vec{D} \cdot \hat{n} = \epsilon$$

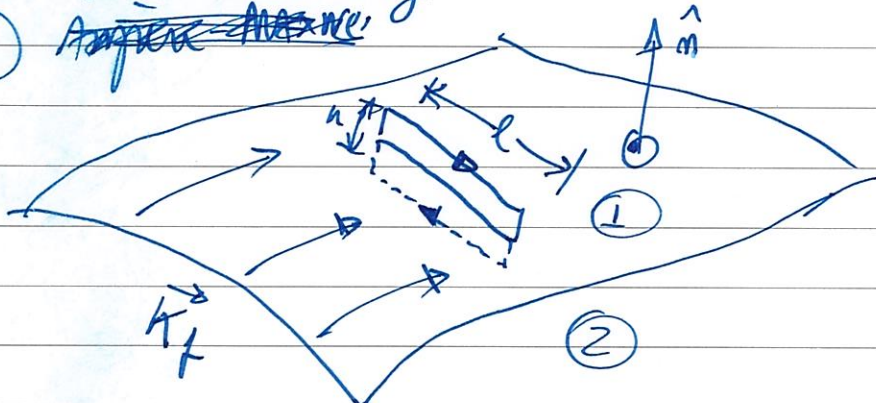
o/ $h \rightarrow 0$ não temos contribuições das laterais!

② O mesmo p/ $\nabla \cdot \vec{B} = 0$

$$\boxed{B_1^\perp - B_2^\perp = 0} \text{ ou } \vec{B} \cdot \hat{n} = 0$$

Lei de Faraday

③ ~~Amperes~~ ~~Maxwell~~



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \Phi$$

$$E_1^\parallel \cdot l - E_2^\parallel \cdot l = -\frac{d}{dt} \Phi = -\frac{d}{dt} (\vec{B} \cdot A_{\text{area}}) = 0 \quad \rightarrow \text{no limite} = 0$$

$$\boxed{E_1'' - E_2'' = 0}$$

A componente paralela do campo deve ser contínua!
Eletrostática!

④ Ampère-Maxwell.

Usando o mesmo raciocínio?

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{\text{enc}} + \frac{d\phi_D}{dt}$$

$$\vec{H}_1 \cdot \vec{l} - \vec{H}_2 \cdot \vec{l} = I_{\text{enc}} = \left(\vec{J}_f \cdot h \vec{l} \right) \cdot \hat{n}$$

Mas $\vec{J}_f \in \vec{K}$ quando $h \rightarrow 0$ (o volume nos interessa; mas a superfície sim!)
se $\hat{n} \perp$ à interface

$$\hat{n} \times \vec{l} = l \hat{s}$$

$\hat{s}$ é perpendicular ao plano da superfície.



$$\therefore (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) \cdot \vec{l} = \vec{J}_f \cdot (\hat{n} \times \vec{l})$$

$$= \vec{K}_f \cdot (\hat{n} \times \vec{l}) \quad (\text{usando regra do produto misto}).$$

$$= \vec{l} \cdot (\vec{K}_f \times \hat{n})$$

$$\therefore \boxed{\vec{H}_1 - \vec{H}_2 = \vec{K}_f \times \hat{n}}$$

A descontinuidade de $\vec{H}$ paralela à superfície é devido à corrente de superfície.

No capítulo 9 Estas equações serão a base p/ a Teoria de reflexão e refração da luz.

Problema 7.42 Condutor perfeito. $\sigma \rightarrow \infty \therefore \vec{E} = 0$
(Estacionário). $(\vec{J} = \sigma \vec{E})$

a) Mostrar que $\vec{B} = 0$ dentro do condutor.
($\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$)

Usando a Equação de Faraday: $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Se $\vec{E} = 0 \therefore \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \vec{B}(\vec{r})$ independe do tempo!

b) Para uma ~~condutor~~ espiral deste condutor, $\Phi = cte.$

Usando ainda a Eq. de Faraday: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$

Se $\vec{E} = 0 \therefore \frac{d\Phi}{dt} = 0 \Rightarrow \boxed{\Phi = cte.}$

c) Um supercondutor é um condutor perfeito. Além disso, o mesmo apresenta $\vec{B} = 0$ dentro do condutor. (Efeito Meissner)

Efeito Meissner ou "Exclusão de fluxo Magnético". Uma

visão seria um diamagnetismo perfeito, no sentido que o campo é cancelado perfeitamente!

Usando Ampère-Maxwell:

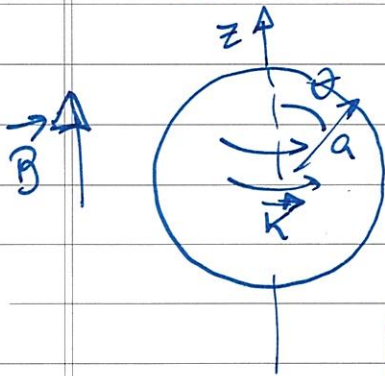
$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \therefore \text{se } \vec{E} = 0 \text{ e } \vec{B} = 0 \therefore$$

$\boxed{\vec{J} = 0}$. Mas existem correntes livres sendo

Onduzidas. Então estas devem estar ^{somente!} na superfície do condutor!

d) A supercondutividade deixa de existir a partir de uma temperatura crítica (T_c). Ou seja $T > T_c$ podemos ter $\vec{B} \neq 0$ dentro do material.

$T > T_c \rightarrow T < T_c$ na presença de campo $\vec{B} = B_0 \hat{z}$



No caso de esfera gigante.

$$\vec{B}_{\text{inside}} = \frac{2}{3} \mu_0 \sigma \omega a \hat{z} \quad \text{para } T > T_c \quad \text{Dipolo Magnético!}$$

$T < T_c$ temos que cancelar o campo dentro.

$$\therefore \sigma \omega a = -\frac{3}{2} \frac{B_0}{\mu_0}$$

$$\text{sendo } \vec{K} = \sigma \vec{V} = \sigma \vec{\omega} \times \vec{r}$$

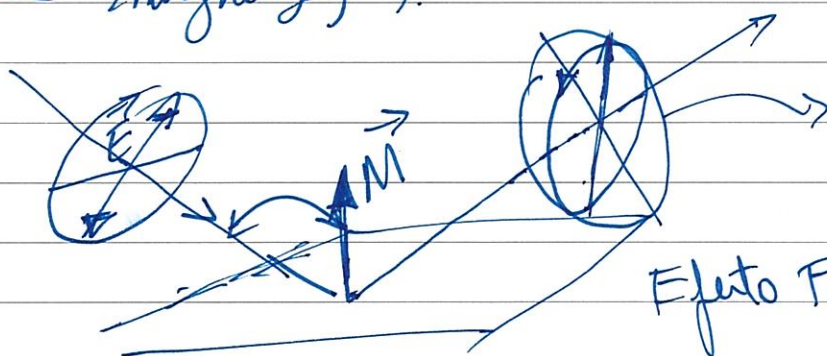
$$\vec{K} = \sigma \vec{V} = \sigma \omega a \sin \theta \hat{\phi}$$

$$\vec{K} = -\frac{3}{2} \frac{B_0}{\mu_0} \sin \theta \hat{\phi}$$

==X==

Um efeito interessante que envolve as condições de contorno discretas e (materiais) no tubo é um experimento de MOKE (Magnetic Optical KERR Effect).

Efeito Magnético óptico onde existe uma mudança na ~~reflexão~~ polarização da luz refletida como função do campo magnético aplicado no material (ou de sua magnetização).



notícia da polarização da luz.

Efeito Faraday e Kerr.