

Integração por Partes

Usa a regra da derivada de produto de funções:

$$\frac{d}{dx}(fg) = f\left(\frac{dg}{dx}\right) + g\left(\frac{df}{dx}\right)$$

$$\therefore \int_a^b \frac{d}{dx}(fg) dx = \underbrace{fg \Big|_a^b}_{\text{T. Fundamental do Cálculo}} = \int_a^b f\left(\frac{dg}{dx}\right) dx + \int_a^b g\left(\frac{df}{dx}\right) dx$$

$$\therefore \left[\int_a^b f\left(\frac{dg}{dx}\right) dx = - \int_a^b g\left(\frac{df}{dx}\right) dx + fg \Big|_a^b \right]$$

Podemos explorar o mesmo conceito q/ os Teoremas fundamentais.

$$\nabla \cdot (f \vec{A}) = f(\nabla \cdot \vec{A}) + \vec{A} \cdot \nabla f \quad \text{aplicando Gauss.}$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_V \nabla \cdot (f \vec{A}) dV &= \int_V f(\nabla \cdot \vec{A}) dV + \int_V \vec{A} \cdot (\nabla f) dV \\ &= \oint_S f \vec{A} \cdot d\vec{a} \end{aligned}$$

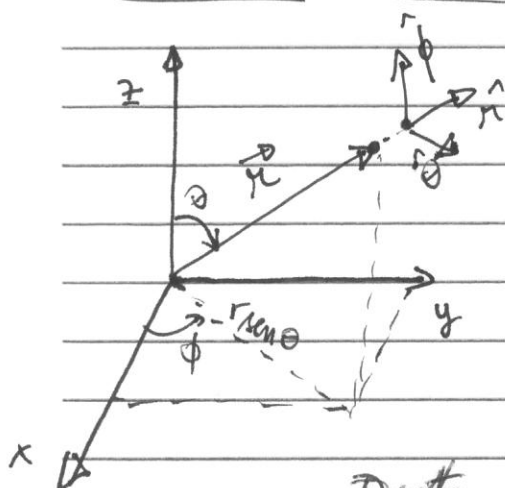
$$\therefore \left[\int_V f(\nabla \cdot \vec{A}) dV = \oint_S f \vec{A} \cdot d\vec{a} - \int_V \vec{A} \cdot (\nabla f) dV \right]$$

Note que a última equação foi a integral do volume de um produto de uma função f com um gradiente de um vetor ($f \nabla \cdot \vec{A}$), que é uma integral do produto escalar de dois vetores; o vetor $\vec{A}$ com o gradiente da função f . ($\vec{A} \cdot \nabla f$).

Veja-se o caso de um sólido de massa e a condição de contorno que neste caso é a Superfície do Volume em questão !!

Isto é muito comum !!

Coordenadas Curvilíneas e Coordenadas Esféricas



$$\left. \begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi \\ y &= r \sin \theta \sin \phi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned} \right\} \text{geometricamente}$$

note que $|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r$

Desta forma, podemos obter as componentes em termos de x, y, z

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\theta = \arccos \left[\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right]$$

$$\phi = \arctan \left[\frac{y}{x} \right]$$

Para representar um vetor em um novo sistema de coordenadas, precisamos expressar:

$$\vec{A} = A_r \hat{r} + A_\theta \hat{\theta} + A_\phi \hat{\phi}$$

Mas quem é $\hat{r}$, $\hat{\theta}$ e $\hat{\phi}$?

Podemos analisar o caso de $\vec{r} = x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z} =$
 $r \sin \theta \cos \phi \hat{x} + r \sin \theta \sin \phi \hat{y} + r \cos \theta \hat{z}$

Usando o conceito de ^{pequenos deslocamentos} ~~derivadas~~ podemos obter $\hat{r}$, $\hat{\theta}$ e $\hat{\phi}$

ou seja $d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} dr \therefore \hat{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r}$; $\hat{\theta} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}$;

e $\hat{\phi} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} / \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} \right|$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \sin \theta \cos \phi \hat{x} + \sin \theta \sin \phi \hat{y} + \cos \theta \hat{z}$$

$$\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \right|^2 = \sin^2 \theta \cos^2 \phi + \sin^2 \theta \sin^2 \phi + \cos^2 \theta = 1$$

$$\therefore \hat{r} = \sin \theta \cos \phi \hat{x} + \sin \theta \sin \phi \hat{y} + \cos \theta \hat{z}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = r \cos \theta \cos \phi \hat{x} + r \cos \theta \sin \phi \hat{y} - r \sin \theta \hat{z}$$

$$\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right|^2 = r^2 \cos^2 \theta \cos^2 \phi + r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \phi + r^2 \sin^2 \theta = r^2$$

$$\hat{\theta} = \cos \theta \cos \phi \hat{x} + \cos \theta \sin \phi \hat{y} - \sin \theta \hat{z}$$

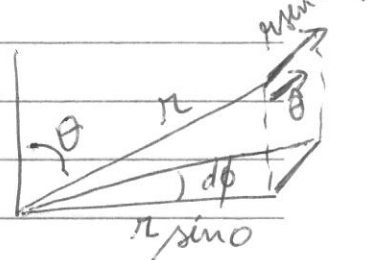
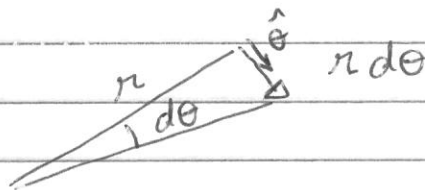
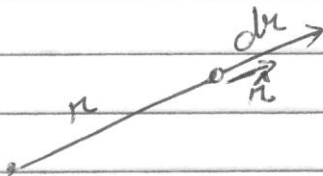
$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = -r \sin \theta \sin \phi \hat{x} + r \sin \theta \cos \phi \hat{y} + 0 \hat{z}$$

$$\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} \right|^2 = r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi + r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi = r^2 \sin^2 \theta$$

$$\hat{\phi} = -\sin \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y}$$

Podemos verificar que $\hat{i} \cdot \hat{j} = \delta_{i,j}$ No sistema esférico

Manipulando as eq. Anteriores é possível escrever $\hat{x}$ em termos de $\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi}$.
Deslocamentos neste sistema de coordenadas. etc.



$$d\vec{r} = dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta} + r \sin \theta d\phi \hat{\phi}$$

$$dV = dr d\theta d\phi = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$

A área na superfície de uma esfera de raio R tem $dr = 0$

$$d\vec{a} = d\theta d\phi \hat{r} = r^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{r}$$

Neste novo sistema de coordenadas, também queremos estabelecer uma regra p/ os derivados vetoriais ou seja (Gradiente, divergente, Rotacional e Laplaciano).

8/0 Gradiente

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial T}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial T}{\partial z} \hat{z}$$

Podemos escrever $\frac{\partial T}{\partial x}$ de $T(r, \theta, \phi)$ em termo da regra da cadeia.

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial r} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right) + \frac{\partial T}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial T}{\partial \phi} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial r} \left(\frac{\partial r}{\partial y} \right) + \dots$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial T}{\partial r} \left(\frac{\partial r}{\partial z} \right) + \dots$$

~~Para~~ Escrevendo $\hat{x}$, $\hat{y}$ e $\hat{z}$ em termos de $\hat{r}$, $\hat{\theta}$ e $\hat{\phi}$ teremos depois de uma longa algebra

$$\boxed{\nabla T = \frac{\partial T}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \phi} \hat{\phi}}$$

Será ainda mais complicada analisar a tarefa na forma direta do caso de

$$\nabla \cdot \vec{v}; \nabla \times \vec{v} \text{ e } \nabla^2 T.$$

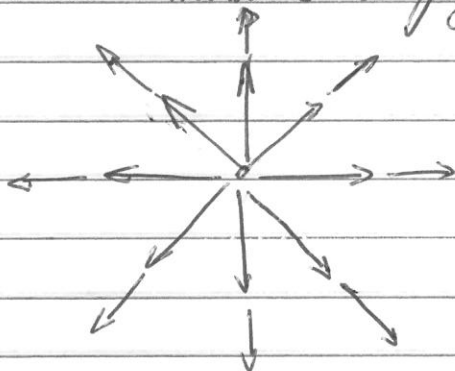
O Apêndice A do Griffiths mostra um método geral e mais simples.

O caso das coordenadas cilíndricas ficam como exercício.

A Função delta de Dirac

Vimos a alguns autos o problema de calcular a divergência de $\vec{v} = \frac{1}{r^2} \hat{r}$.

Sobemos que $\vec{v}$ diverge ~~de fato~~ em algum lugar a origem como mostra a figura abaixo



E quando calculamos a divergência em coord. cartesianas (Ex. 1.16) ou esféricas temos o mesmo resultado

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{1}{r^2} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (1) = 0$$

Mas como se a função $\vec{v}$ diverge, então como obtemos zero? Tente agora calcular a integral de superfície

No teorema da divergência p/ uma superfície de raio R qualquer.

$$\oint \vec{v} \cdot d\vec{a} = \int \left(\frac{1}{R^2} \hat{r} \right) \cdot (R^2 \sin\theta d\theta d\phi \hat{r})$$

$$\oint_{S(R)} \vec{v} \cdot d\vec{a} = \int_0^\pi (\underbrace{\sin \theta d\theta}_2) \left(\int_0^{2\pi} \underbrace{d\phi}_{2\pi} \right) = 4\pi$$

Mas $\int_{V(S)} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} dV = 0 !!!$

Como fica o Teo. da divergência? Estaria errado?
A resposta é não, simplesmente a função divergência não se comporta bem na origem. Devemos obter

$$\int (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) dV = 4\pi !!!$$

Tratamos de uma função p/ a divergência que seja zero em qualquer ponto, menos na origem e sua integral de volume igual a 4π p/ qualquer volume centrado na origem.

Esta é a função Delta de Dirac

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ \infty & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$$\text{e } \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

De fato multiplicando uma função qualquer pela função $\delta(x)$ obtemos o valor da função na origem.

$$f(x) \delta(x) = f(0) \delta(x)$$

$$\text{Ou } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx}_1 = f(0)$$

$$\delta(x-a) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq a \\ \infty & \text{se } x = a \end{cases} \quad \therefore \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a) dx = 1$$

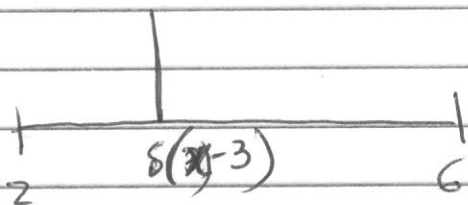
$$\therefore f(x) \delta(x-a) = f(a) \delta(x-a)$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x-a) dx = f(a)}$$

De fato a integral não precisa ir de $-\infty$ a $+\infty$, mas a função Delta ~~é~~ deve estar centralizada dentro do intervalo.

Exemplo

$$\int_2^6 \underbrace{(3x^2 - 2x - 1)}_{f(x)} \delta(x-3) dx = f(3) = 3 \times 9 - 6 - 1 = \underline{\underline{20}}$$



$$\text{Ou } x-3=y \quad \therefore dx=dy$$

$$\therefore \int_{-1}^3 \underbrace{[3(y+3)^2 - 2(y+3) - 1]}_{f(y)} \delta(y) dy = f(0) = 27 - 6 - 1 = \underline{\underline{20}}$$

Problema 1.45 a // Mostre que $x \frac{d}{dx}(\delta(x)) = -\delta(x)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{x \frac{d}{dx}(\delta(x))}_{u} \underbrace{dx}_{dv} = uv \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} v du$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{d}{dx}(\delta(x)) dx = x \delta(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx$$

0

$$\therefore \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{x \frac{d}{dx}(\delta(x))}_1 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} [-\delta(x)] dx$$

$$\therefore \boxed{x \frac{d}{dx}(\delta(x)) = -\delta(x)}$$

Em 3D

$$\delta^3(\vec{r}) = \delta(x) \delta(y) \delta(z)$$

$$\text{onde } \vec{r} \equiv x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z}$$

$$\int_{\text{todo o espaço}} \delta^3(\vec{r}) dV = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \delta(y) \delta(z) dx dy dz = 1$$

$$\therefore \int f(\vec{r}) \delta^3(\vec{r} - \vec{a}) dV = f(\vec{a})$$

$$\therefore \text{se } f(\vec{r}) = \nabla \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r^2} \right) = 4\pi \delta^3(\vec{r})$$

$$\underbrace{\int_{\text{todo espaço}} \nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right) dV}_{\text{}} = \int_S \frac{1}{r^2} \hat{r} \cdot d\vec{a} = \underline{4\pi}$$

$$\underbrace{\int_{\text{Todo espaço}} 4\pi \delta^3(\vec{r}) dV}_{\text{}} = \underline{4\pi}$$