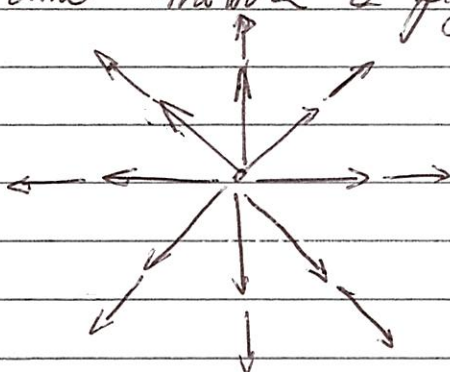


O caso das coordenadas cilíndricas ficam como exercício.

A Função delta de Dirac

Vimos a alguns autos o problema de calcular a divergência de $\vec{v} = \frac{1}{r^2} \hat{r}$.

Sabemos que $\vec{v}$ diverge ~~de fato~~ em algum lugar e a origem como mostra a figura abaixo



E quando calculamos a divergência em coord. cartesianas (Ex. 1.16) ou esféricas temos o mesmo resultado

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{1}{r^2} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (1) = 0$$

Mas como se a função ^{$\vec{v}_r$} diverge, então como obtemos zero? Tente agora calcular a integral de superfície

No teorema da divergência p/ uma superfície de raio R qualquer.

$$\oint \vec{v} \cdot d\vec{a} = \int \left(\frac{1}{R^2} \hat{r} \right) \cdot (R^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{r})$$

$$\oint_{S(R)} \vec{r} \cdot d\vec{s} = \int_0^\pi (\underbrace{\sin\theta d\theta}_2) \left(\int_0^{2\pi} \underbrace{d\phi}_{2\pi} \right) = 4\pi$$

Mas $\int_{V(S)} \vec{r} \cdot \vec{r} dV = 0!!!$

Como fica o Teo. da divergência? Estaria errado?
A resposta é não, simplesmente a função divergência não se comporta bem na origem. Devemos obter

$$\int (\vec{r} \cdot \vec{r}) dV = 4\pi !!!$$

Podemos de uma função δ a divergência que seja zero em qualquer ponto, menos na origem e sua integral de volume igual a 4π δ qualquer volume centrado na origem.

Esta é a função Delta de Dirac

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ \infty & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$$\text{e } \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

De fato multiplicando uma função qualquer pela função $\delta(x)$ obtemos o valor da função na origem.

$$f(x) \delta(x) = f(0) \delta(x)$$

$$\text{Ou} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx}_1 = f(0)$$

$$\delta(x-a) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq a \\ \infty & \text{se } x = a \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a) dx = 1$$

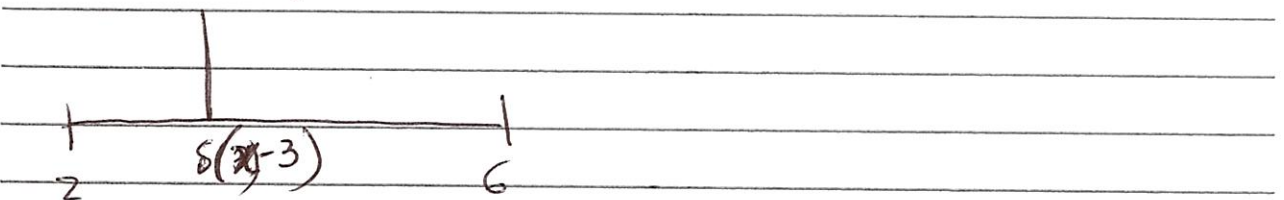
$$\therefore f(x) \delta(x-a) = f(a) \delta(x-a)$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x-a) dx = f(a)}$$

De fato a integral não precisa ir de $-\infty$ a $+\infty$, mas a função Delta ~~é~~ é ~~está~~ está que está centralizada dentro do intervalo.

Exemplo

$$\int_2^6 \underbrace{(3x^2 - 2x - 1)}_{f(x)} \delta(x-3) dx = f(3) = 3 \times 9 - 6 - 1 = \underline{\underline{20}}$$



$$\text{Ou} \quad x-3 = y \quad \therefore \quad dx = dy$$

$$\therefore \int_{-1}^3 \underbrace{[3(y+3)^2 - 2(y+3) - 1]}_{f(y)} \delta(y) dy = f(0) = 27 - 6 - 1 = \underline{\underline{20}}$$

Problema 1.45 a // Mostre que $x \frac{d}{dx}(\delta(x)) = -\delta(x)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{x \frac{d}{dx}(\delta(x))}_{u} \underbrace{dx}_{dv} = uv \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} v du$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{d}{dx}(\delta(x)) dx = x \delta(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx$$

0

$$\therefore \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{d}{dx}(\delta(x)) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} [-\delta(x)] dx$$

$$\therefore \boxed{x \frac{d}{dx}(\delta(x)) = -\delta(x)}$$

Em 3D

$$\delta^3(\vec{r}) = \delta(x) \delta(y) \delta(z)$$

$$\text{onde } \vec{r} \equiv x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z}$$

$$\int_{\text{todo o espaço}} \delta^3(\vec{r}) dV = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \delta(y) \delta(z) dx dy dz = 1$$

$$\therefore \int f(\vec{r}) \delta^3(\vec{r} - \vec{a}) dV = f(\vec{a})$$

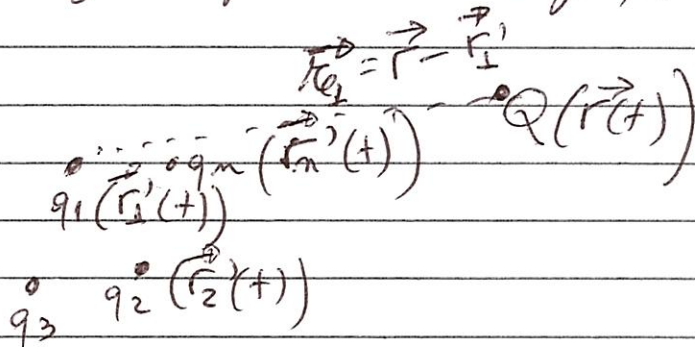
$$\therefore \text{se } f(\vec{r}) = \nabla \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r^2} \right) = 4\pi \delta^3(\vec{r})$$

$$\int_{\text{todo espaço}} \nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right) dV = \int_S \frac{1}{r^2} \hat{r} \cdot d\vec{a} = 4\pi$$

$$\int_{\text{Todo espaço}} 4\pi \delta^3(\vec{r}) dV = 4\pi$$

ELETRÓSTATICA

Força sobre uma carga prova devido a uma distribuição de cargas (dependente do tempo).



Podemos usar o princípio da superposição

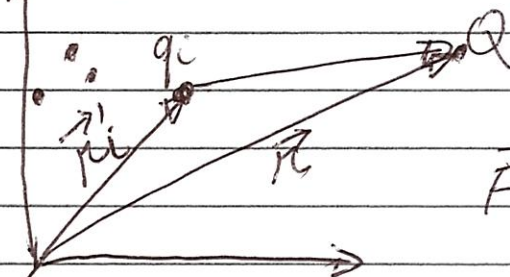
$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 + \dots + \vec{F}_n = \sum_i \vec{F}_i$$

A força elétrica obedece, com base experimental, a uma Lei que, assim como na gravidade, depende do inverso do quadrado da distância; a Lei de Coulomb.

$$\boxed{\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2} \hat{r}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}')}$$

Cargas em movimento podem levar a um problema

Complicado que será abordado no Cap. 10



$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1 Q}{r_1^2} \hat{r}_1 + \frac{q_2 Q}{r_2^2} \hat{r}_2 + \dots \right)$$

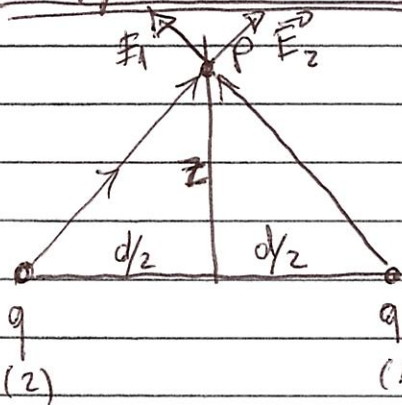
$$\vec{F} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1 \vec{r}_1}{r_1^2} + \frac{q_2 \vec{r}_2}{r_2^2} + \frac{q_3 \vec{r}_3}{r_3^2} + \dots \right)$$

$$\boxed{\vec{F} = Q \vec{E}}$$

$$\text{Onde } \boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i \vec{r}_i}{r_i^2}}$$

Este é o campo elétrico gerado pela distribuição de cargas que surge e força é proporcional. Note, que o módulo e ~~direção~~ sentido da força dependem apenas da carga de prova Q , p'o campo elétrico não depende da carga de prova.

Exemplo do Ex 2.2



$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

$$\vec{E} = \frac{2}{4\pi\epsilon_0} q \frac{\cos\theta}{\left(\frac{d^2}{4} + z^2\right)} \hat{z}$$

$$\therefore \vec{E} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} q \frac{z}{\left(z^2 + \frac{d^2}{4}\right)^{3/2}} \hat{z}$$

$$\text{ou } \boxed{\vec{E} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{q}{z^2} \frac{\hat{z}}{\left(1 + \frac{d^2}{4z^2}\right)^{3/2}}}$$

Note que $\frac{d}{z} \ll 1 \Rightarrow \frac{d^2}{z^2} \ll \ll 1$

$$\therefore \vec{E} \sim \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{z^2} \hat{z} \quad \text{O que equivale a 2 cargas pontuais no origem.}$$

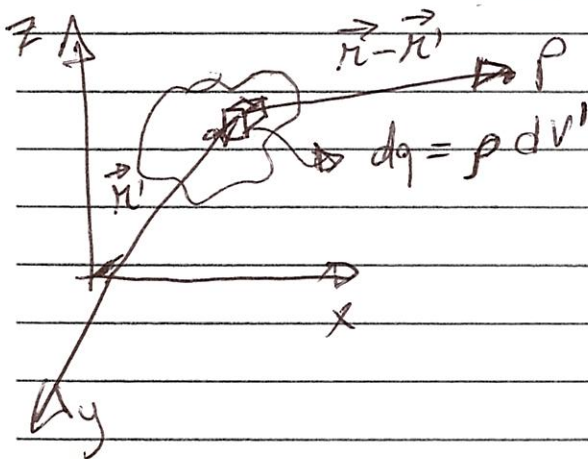
Se queremos uma aproximação melhor, devemos expandir em série de Taylor.

$$x = \frac{d^2}{4z^2} \Rightarrow (1+x)^{-3/2} = 1 - \frac{3}{2!} x + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 2!} x^2 - \dots$$

$$\therefore \vec{E} \sim \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{z^2} \left(1 - \frac{3d^2}{8z^2} + \frac{15d^4}{128z^4} - \dots \right) \hat{z}$$

muito pequenos!!

Distribuição contínua de cargas

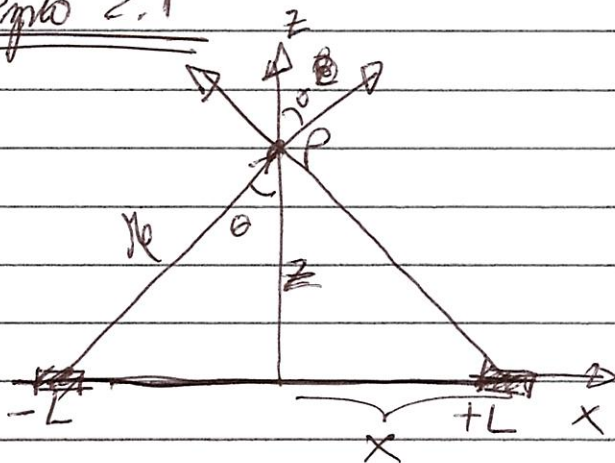


→ Note que se for uma carga pontual, ainda podemos usar esta notação, multiplicando apropriadamente a $\rho(\vec{r})$ pela função $\delta(\vec{r})$ → delta de Dirac!

$$\therefore \sum \rightarrow \int \quad \text{e temos} \quad \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dq$$

Distribuição linear $\rightarrow dq = \lambda dl'$
 superfície $\rightarrow dq = \sigma da'$
 volume $\rightarrow dq = \rho dv'$

Exemplo 2.1



$$d\vec{E} = 2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\lambda dx}{r^2} \right) \cos\theta \hat{z}$$

$$\cos\theta = \frac{z}{r} = \frac{z}{(z^2 + x^2)^{1/2}}$$

$$\therefore E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^L \frac{2\lambda z}{(z^2 + x^2)^{3/2}} dx$$

Podemos tentar chutar a solução (com o tempo d'aural)
 ou fazermos pelo método de subst. de variáveis.

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^L \frac{2\lambda z}{z^3 \left[1 + \left(\frac{x}{z} \right)^2 \right]^{3/2}} dx \quad \text{fazendo } \frac{x}{z} = \tan\theta$$

$$\text{temos no denominador } [1 + \tan^2\theta]^{3/2} = [\sec^2\theta]^{3/2} = \sec^3\theta$$

$$dx = z \sec^2\theta d\theta \therefore$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \frac{2\lambda z^2 \sec^2 \theta d\theta}{z^3 \sec^3 \theta} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \frac{2\lambda \cos \theta d\theta}{z}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{2\lambda \sin \theta}{z} \right]_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda}{z} \frac{x}{\sqrt{z^2 + x^2}} \Big|_0^L$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda L}{z(z^2 + L^2)^{1/2}} \hat{z}$$

Obviamente $\lambda / z \gg L$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda L}{z^2} \hat{z} \Rightarrow q = 2\lambda L$$

Como já
esperávamos
 $q = \int_{-L}^L \lambda dl$

Novamente é como se
toda a carga estivesse em um ponto
na origem.

Já $\lambda / L \rightarrow \infty$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda L}{z \sqrt{1 + \frac{z^2}{L^2}}} \hat{z} \Rightarrow \vec{E} \rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda L}{z} \hat{z}$$