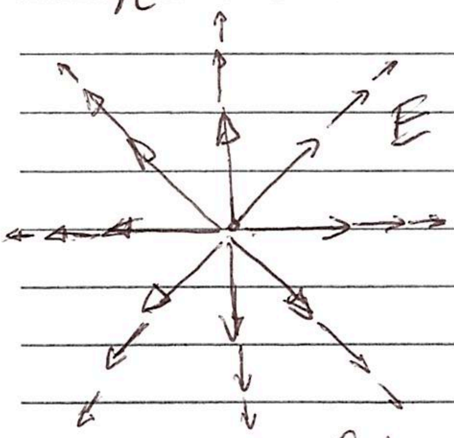
# Divergência e Rotacional de Um Campo Eletrostático

P/ uma carga pontual temos

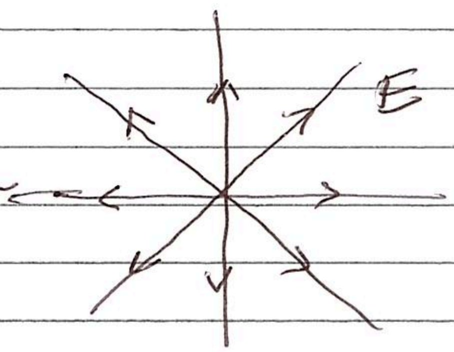
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}$$

Percebemos que a magnitude do campo cai com $\frac{1}{r^2}$.




(a)

ou




(b)

(a) e (b) são de fato iguais pois indicamos explicitamente que a magnitude de E decai com $\frac{1}{r^2}$ em a. Mas em (b) podemos imaginar a densidade de linhas a uma certa distância

Esta é dada por $\rho_{linhas} = \frac{n}{2\pi r}$ (no plano)

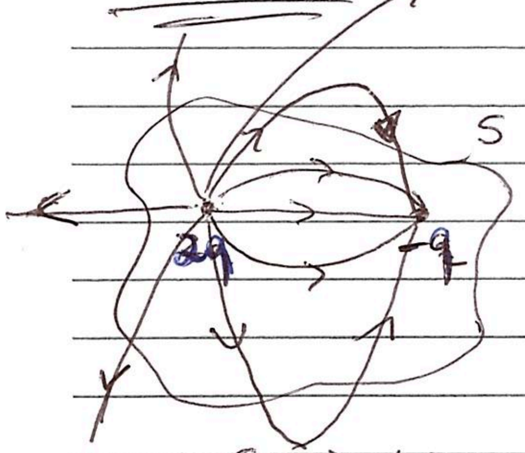
Mas no volume $\rho_{linhas} = \frac{n\,r}{4\pi r^3}$ Note que a densidade vai com $\propto \frac{1}{r^2}$, o que representa corretamente a mag. do campo!

Se desenharmos uma superfície em torno da carga, mediremos com a integral o número de linhas total o que será proporcional à carga total:

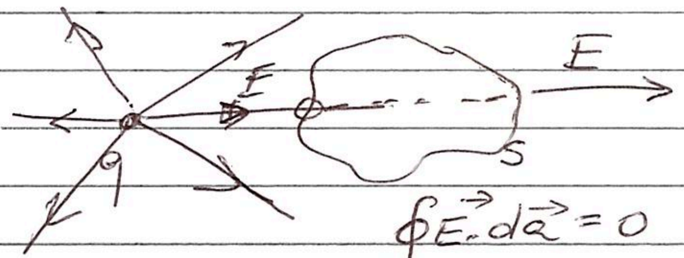
$$\Phi_E \equiv \int_S \vec{E}\cdot d\vec{a}$$

ou seja $\Phi_E$ é uma medida proporcional à $q$

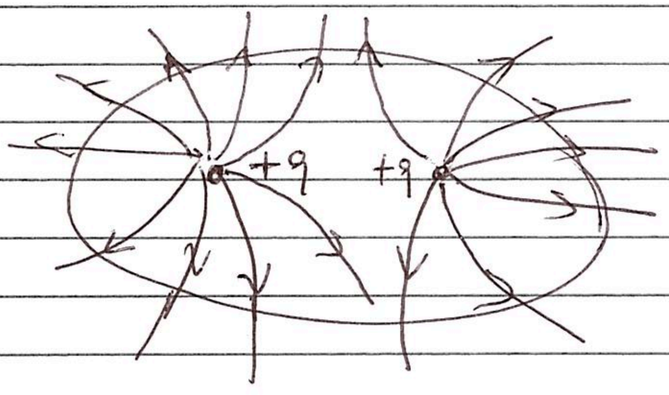
3 casos!




$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{a} \propto q$$




$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{a} = 0$$




$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{a} \propto 2q$$

Este é a essência do Teo. da Divergência ou Teorema de Gauss.

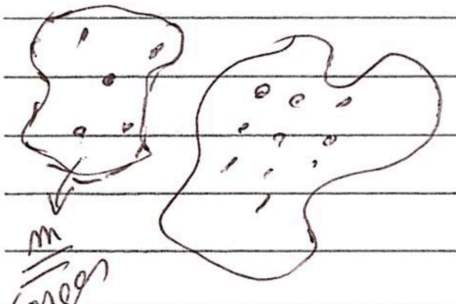
$$\boxed{\Phi_E \equiv \oint \vec{E}\cdot d\vec{a} = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r^2}\hat{r}\right)\cdot\left(r^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\phi \, \hat{r}\right)}$$

$$\boxed{= \frac{1}{\varepsilon_0} q}$$

A constante de proporcionalidade é exatamente a permissividade elétrica no vácuo.

Se pelo princípio de superposição podemos adicionar os campos $\vec{E}$ gerado por cada carga.

$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i$ então




$$\oint E\cdot da = \sum_{i=1}^{n}\left(\oint \vec{E}_i\cdot d\vec{a}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n-m}\left(\frac{1}{\varepsilon_0} q_i\right) = \frac{1}{\varepsilon_0} Q_{interno}$$

Podemos ainda aplicar a lei de Gauss p/ qualquer lei de força com $\propto \frac{1}{r^2}$ como a da Gravitação universal!

Aplicando o Teo. da Divergência,

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{a} = \int_V (\nabla\cdot\vec{E})\, dV = \frac{1}{\varepsilon_0}\underbrace{\int_V \rho \, dV}_{= Q_{interna}}$$

é. $\boxed{\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$ Lei de Gauss na forma diferencial!

Exemplo 2.9 a)

p/ $\vec{E} = kr^3\hat{r}$ a) $\rho = ?$

$\therefore \nabla\cdot\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$

$\therefore \boxed{\nabla\cdot\vec{E} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 E_r\right) = \frac{k}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^5\right) = \frac{k}{r^2}5r^4 = 5kr^2}$

$\boxed{\rho = 5k\varepsilon_0 r^2}$

Podemos testar!

$\oint \vec{E}\cdot d\vec{a} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int \rho\, dV$

sendo simetria esférica.

$\cancel{4\pi} r^2 E_r = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V 5k\varepsilon_0 r^2\, r^2 \operatorname{sen}\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi = \frac{1}{\cancel{\varepsilon_0}}\cancel{5}k\frac{\cancel{\varepsilon_0}r^5}{\cancel{5}}\cancel{4\pi}$

$\therefore E_r = kr^3 \quad \therefore \boxed{\vec{E} = kr^3\hat{r}}$

$\therefore \boxed{q_R = 4\pi k\varepsilon_0 R^5}$ quantidade de carga em uma esfera de raio R

## Divergência de $\vec{E}$

Podemos calcular a divergência de $\vec{E}$ usando a definição p/ $\vec{E}(r)$

$$E(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\substack{\text{Todo}\\ \text{espaço}}} \frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\, \rho(\vec{r}\,')\, dV'$$

Lembrando que p/ a região externa à r' $\rho = 0$ !!

$$\therefore \; \nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \nabla \cdot \left( \frac{\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2} \right) \rho(\vec{r}\,')\, dV'$$

onde $\vec{\mathscr{r}} = \vec{r} - \vec{r}\,'$

Mas sabemos que $\nabla \cdot \left( \frac{\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2} \right) = 4\pi\, \delta^3(\vec{\mathscr{r}})$

$$\therefore \; \nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int 4\pi\, \delta^3(\vec{r}-\vec{r}\,')\, \rho(\vec{r}\,')\, dV'$$

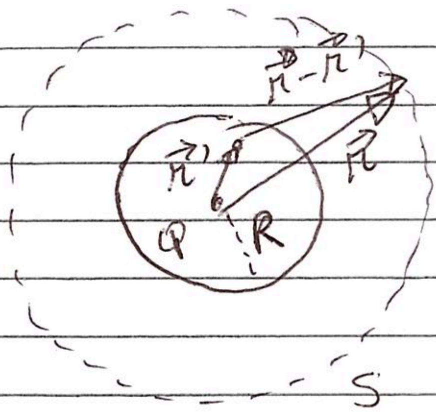
$\rho(\vec{r}\,')$

$$\therefore \; \nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\, \rho(\vec{r})$$

$$\therefore \; \boxed{\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\, \rho(\vec{r})}$$

Note que p/ todos os efeitos o divergente depende de $\underline{\underline{\rho(\vec{r})}}$ MAS a integral no Teo. de Gauss leva em conta a carga total somente até $\underline{\underline{\vec{r}'}}$.

Ex. Podemos calcular o campo elétrico em vários pontos do espaço p/ uma distribuição homogênea de carga em uma esfera sólida.



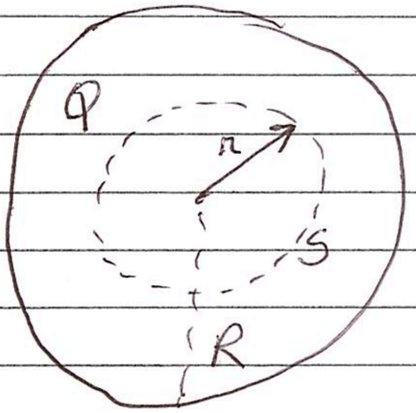

Podemos calcular p/ cada elemento infinitesimal usando o formalismo do exercício 2.7 ou

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{a} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{interno} = \frac{1}{\epsilon_0}\int_{\underline{\underline{V'}}} \rho(\vec{r}')\,dV'$$

$$4\pi r^2 E_r = \frac{1}{\epsilon_0}\underbrace{\int \rho(\vec{r}')\,dV'}_{Q} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{r}}$$

Dentro da esfera.

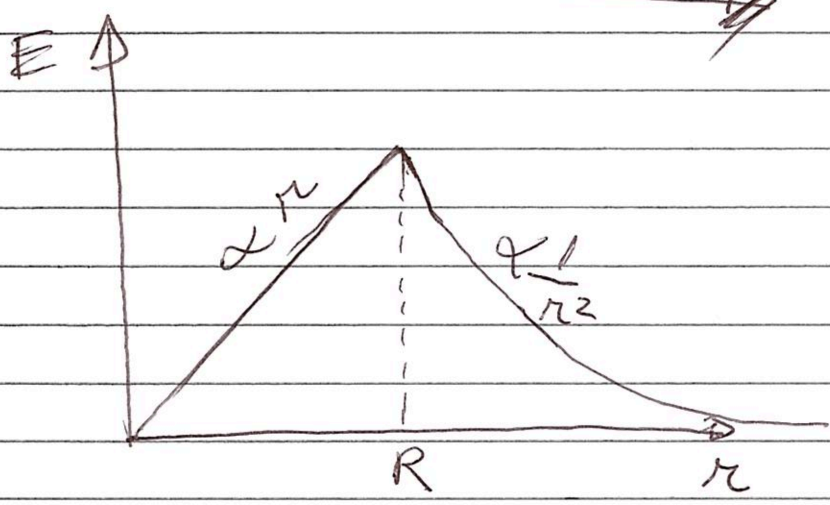



$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{a} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{V'(S)} \rho(\vec{r}\,')\,dV'$$

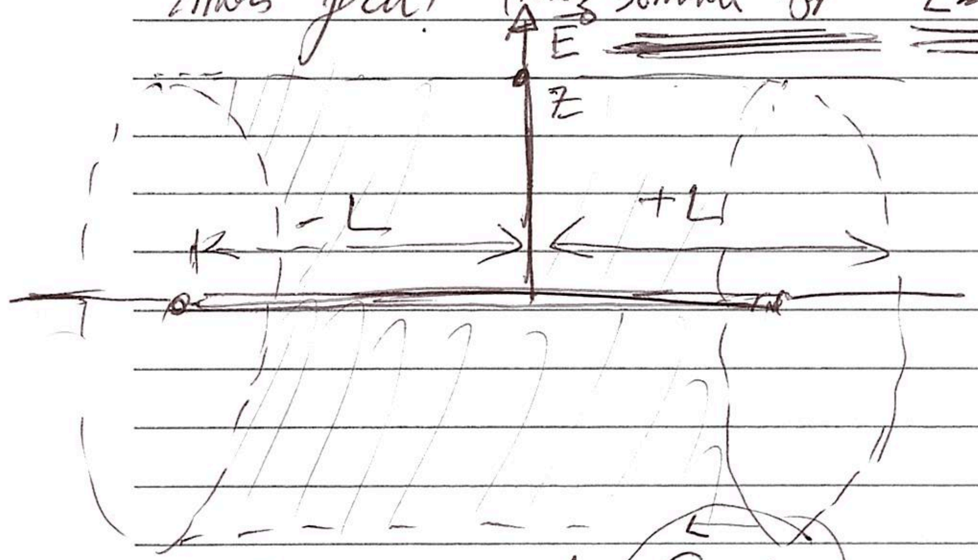
$$E\,4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\overbrace{\frac{Q}{\frac{4\pi R^3}{3}}}^{\rho}\int_0^r r^2\,\text{sen}\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$$

$$E\,4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}\frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q\,\vec{r}}{R^3}}$$



Podemos tentar recuperar o caso da ~~fio ut~~ distribuição de carga no fio de forma muito mais fácil! (mas somente se $L \gg z$ !!!! ☠)



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{-L}^{L} \lambda \, dl$$

cuidado não confundir e calcular com volume!!

$$E_z \, 2\pi z (\cancel{2L}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \lambda \cancel{2L} \Rightarrow \boxed{E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \lambda \frac{\hat{z}}{z}}$$

se $\boxed{z \ll L}$

Como havíamos obtido antes por uma integração razoavelmente trabalhosa.

NOTE!! Neste caso $E$ não vai com $\frac{1}{z^2}$ e sim $E \propto \frac{1}{z}$

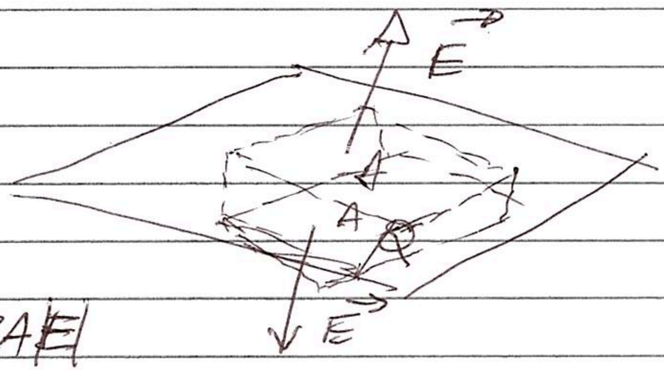
O LIVRO resolve no Exemplo 2.3 o caso de um cilindro de cargas longo e com densidade variável $\rho = ks$ onde $s$ é a distância radial!

Neste caso é necessário integrar cuidadosamente!!

(infinito!)

Temos ainda a placa plana com dens. uniforme $\sigma$

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{a} = \frac{1}{\varepsilon_0} Q$$




$$\therefore \oint \vec{E}\cdot d\vec{a} = 2A|\vec{E}|$$

$$\therefore \quad 2AE = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \text{mas} \quad Q = \sigma A$$

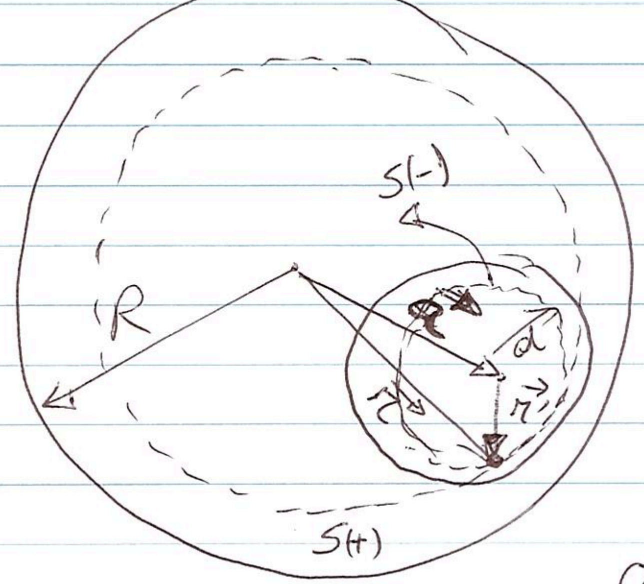
$$\therefore \quad \boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{n}}$$

É interessante notar que neste caso não importa quão distante se vá a partir da placa que sempre teremos um campo elétrico constante. Desta forma parece que no limite de $z \to \infty$ $E \not\to \frac{1}{z^2}$

Isto sugere quanto mais nos distanciamos da superfície mais cargas entrarão no campo de visão.

Importante: O Teorema de Gauss poderá ser usado diretamente apenas para simetrias bem específicas como a esférica, cilíndrica e planar. Podemos no entanto utilizar combinações para resolver problemas mais complexos usando o princípio da superposição.

Exemplo: Esfera Não condutora, carregada uniform. e com buraco!!




① $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_+(\vec{r}) + \vec{E}_-(\vec{r})$

Princípio da superposição.

$\vec{r} = \vec{a} + \vec{r}'$

$\hat{\xi} = \dfrac{\vec{a} + \vec{r}}{|\vec{a} + \vec{r}'|}$

$$\rho_\pm = \pm \frac{q}{\frac{4}{3}\pi (R^3 - d^3)}$$

$$\therefore \text{p/ } E_+(\vec{r}) \to \oint_{S(+)} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{a} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{V(S+)} \rho_+ \, dV$$

Note que $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}(\vec{a} + \vec{r}') = E_+ \hat{\xi}$

$$\therefore E_+ 4\pi |\vec{a} + \vec{r}'|^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho_+ \frac{4}{3}\pi |\vec{a} + \vec{r}'|^3$$

$$\therefore E_+ = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \rho_+ \frac{4}{3}\pi |\vec{a} + \vec{r}'|$$

$$\therefore \vec{E}_+ = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{(R^3 - d^3)} |\vec{a} + \vec{r}'| \hat{\xi}$$

Da mesma forma p/ $E_-(\vec{r}) \Rightarrow \oint_{S(-)} \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{a} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{V(S-)} \rho_- \, dV$

$$\therefore \vec{E}_- = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{(R^3 - d^3)} \vec{r}'$$

tilibra