

$$\vec{E} = + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(R^3 - d^3)} \left[\frac{|\vec{a} + \vec{r}|}{|\vec{a} + \vec{r}|} (\vec{a} + \vec{r}) - \vec{r}' \right]$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(R^3 - d^3)} \vec{a}$$

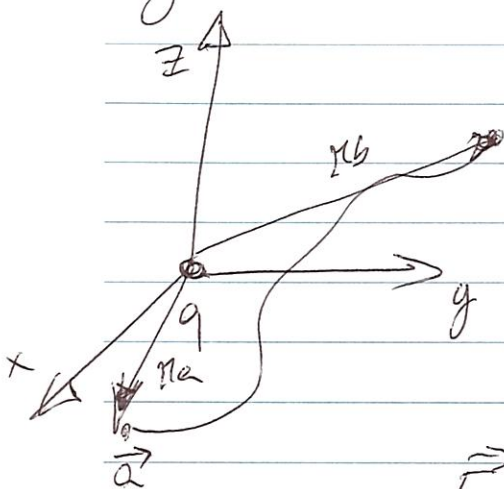


$\vec{E}$ é constante e paralelo ao vetor $\vec{a}$ dentro do buraco!

O rotacional de $\vec{E}$

$$\nabla \times \vec{E} = ?$$

Eu esperava que como qualquer força central, geraria o Rotacional igual a zero! Porém, no entanto, calcular rigorosamente!



$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} \quad \text{força pontual!}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = ?$$

$$d\vec{r} = dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta} + r \sin\theta d\phi \hat{\phi} \therefore \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dr$$

$$\therefore \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \Big|_{r_a}^{r_b} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_a} - \frac{q}{r_b} \right)$$

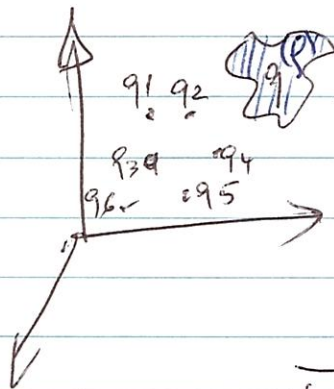
Se pegarmos no circuito fechado qualquer; $\vec{E} = \vec{b}$

$$\therefore r_a = r_b \quad \text{e} \quad \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

Aplicando o Teorema do Rotacional (Teorema de Stokes)

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{S(\Gamma)} (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{a} \quad \therefore \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0}$$

Como podemos aplicar o princípio de superposição



$$\Rightarrow \vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \dots$$

$$\therefore \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla} \times \left(\sum_{i=1}^N \vec{E}_i + \int \rho \frac{dV}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right) = 0$$

$$\therefore \boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0} \text{ sempre!}$$

Isto mostra que $\vec{E}$ é um vetor muito especial pois sempre precisarmos ter $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ desta forma, não é possível uma distribuição de carga que produza $\vec{E} = y\hat{x}$ pois $\boxed{\vec{\nabla} \times y\hat{x} \neq 0!!}$

Existente pelo pto de $\nabla \times \vec{E} = 0$

e portanto $\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$ tems que $\vec{E}$ é um campo conservativo onde $\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$ não depende do caminho escolhido.

Deste forma, é possível escolher uma função de tal forma que o seu gradiente seja exatamente o valor de $\vec{E}$ ou ainda $\vec{\nabla} V = -\vec{E}$ onde

$$\boxed{\nabla V = -\vec{E}}$$

On se, podemos definir

$$\boxed{V(\vec{r}) = - \int_{\vec{O}(\text{referencia})}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell}}$$

$V(\vec{r})$ é o potencial elétrico

$$\begin{aligned} \therefore \Delta V &= V(\vec{b}) - V(\vec{a}) = - \int_{\vec{O}}^{\vec{b}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} + \int_{\vec{O}}^{\vec{a}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \\ &= - \int_{\vec{O}}^{\vec{b}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} - \int_{\vec{a}}^{\vec{O}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \end{aligned}$$

Pelo Teorema fundamental do gradiente (Teo. fund. do Cálculo)

Temos que:

$$\boxed{\Delta V = V(\vec{b}) - V(\vec{a}) = + \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} (\nabla V) \cdot d\vec{e}}$$

Mas como sabemos:

$$\boxed{\Delta V = - \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{E} \cdot d\vec{e}} \quad ;$$

$$-\vec{E} = \nabla V \Rightarrow \boxed{\vec{E} = -\nabla V}$$

Exercício 2.20 | a) Podemos verificar se $\vec{E} = K(x\hat{y} + y\hat{z} + 3xz\hat{z})$ é ou não um campo elétrico!

Devemos lembrar que $\nabla \times \vec{E} = 0$ e verificar ou de outra maneira escolher diferentes caminhos de integração. Se quisermos um caminho de integração diferente, significa que $\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{E} \cdot d\vec{e} \neq \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{E} \cdot d\vec{e} \therefore \vec{E}$ não é campo elétrico!

A primeira opção é mais rápida!

$$\nabla \times \vec{E} = K \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & yz & 3xz \end{vmatrix} = \hat{x} \left[\frac{\partial}{\partial y} (3xz) - \frac{\partial}{\partial z} (yz) \right] + \hat{y} \left[\frac{\partial}{\partial z} (xy) - \frac{\partial}{\partial x} (3xz) \right] + \hat{z} \left[\frac{\partial}{\partial x} (yz) - \frac{\partial}{\partial y} (xy) \right]$$

$$\therefore \nabla \times \vec{E} = \hat{x}[0-2y] + \hat{y}[0-3z] + \hat{z}[0-x] \neq 0$$

$\therefore \vec{E}$ não é campo eletrostático!

Comentários Importantes!

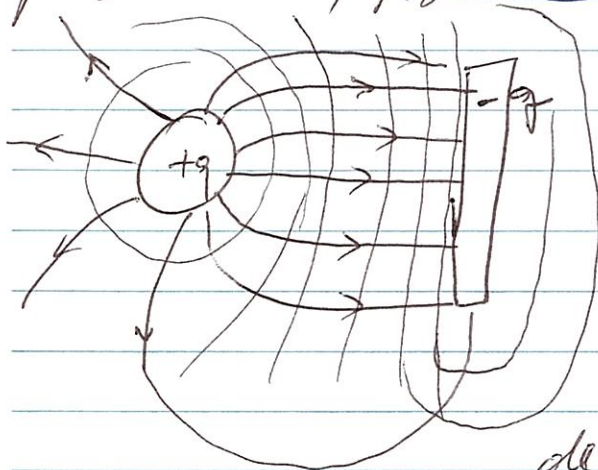
a) Não confunda

potencial elétrico

com energia potencial de um campo elétrico

A energia está ligada ao trabalho sobre uma carga e portanto necessitamos multiplicar por Q . (Venhamos isto adiante!)

b) Potencial permite obter $\vec{E}$ a partir de uma função escalar, fugindo dos componentes de um vetor.



Determinamos $\vec{E}$ pelo gradiente de V ou seja,

$\vec{E} \perp$ A superfície equipotencial!

E segue regras bem específicas devido às regras impostas pela

condição $\nabla \times \nabla V = 0$ //

c) Mudar o ponto de referência O para O' , significa apenas adicionar uma constante. Por outro lado ΔV continua igual

$$V'(\vec{r}) = - \int_{O'}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \underbrace{\int_{O'}^{O} \vec{E} \cdot d\vec{l}}_K - \int_O^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = K + V(\vec{r})$$

$$\therefore V'(\vec{r}) = K + V(\vec{r}) \Rightarrow \boxed{\Delta V' = \Delta V}$$

Além disto, $\nabla V' = \nabla V$ já que $\nabla K = 0$

E portanto natural quase sempre escolher o ponto

$$O = \infty \text{ pois } \vec{E}_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0 \text{ e } V_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0$$

também!

Mas quando a distribuição estende-se até o infinito

Se escolhermos $O = \infty$ temos problemas!

Exemplo plano infinito

$$V(z) = - \int_{\infty}^z \frac{1}{2\epsilon_0} \sigma dz = -\frac{1}{2\epsilon_0} [z - \infty] !!$$

Bom!

Neste caso escolhemos na origem!

No mundo real a distribuição de carga nunca vai até infinito e portanto podemos normalmente escolher $O = \infty$

d) O potencial e o princípio da superposição

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots$$

$$\stackrel{a}{=} \phi$$

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \dots$$

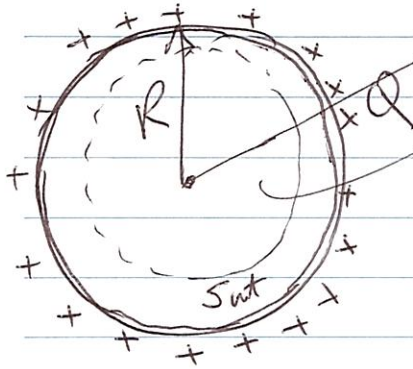
$$V(\vec{r}) = - \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E}_1 \cdot d\vec{\ell} - \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E}_2 \cdot d\vec{\ell} - \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E}_3 \cdot d\vec{\ell} - \dots$$

$$\therefore V(\vec{r}) = V_1(\vec{r}) + V_2(\vec{r}) + V_3(\vec{r}) + \dots$$

Que é uma escalar sem vetores!
Isto facilita demais muitos problemas mais complexos!!

e) Unidade $[V] = \frac{[J]}{[C]} = \frac{\text{Volts}}{[C]} = \frac{[N] \cdot [m]}{[C]}$

Exemplo 2.6

Dentro do esfera $Q = 0$:-

$$\oint_{S_{int}} \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV = 0$$

$$\therefore \boxed{\vec{E}_{int} = 0}$$

Externo

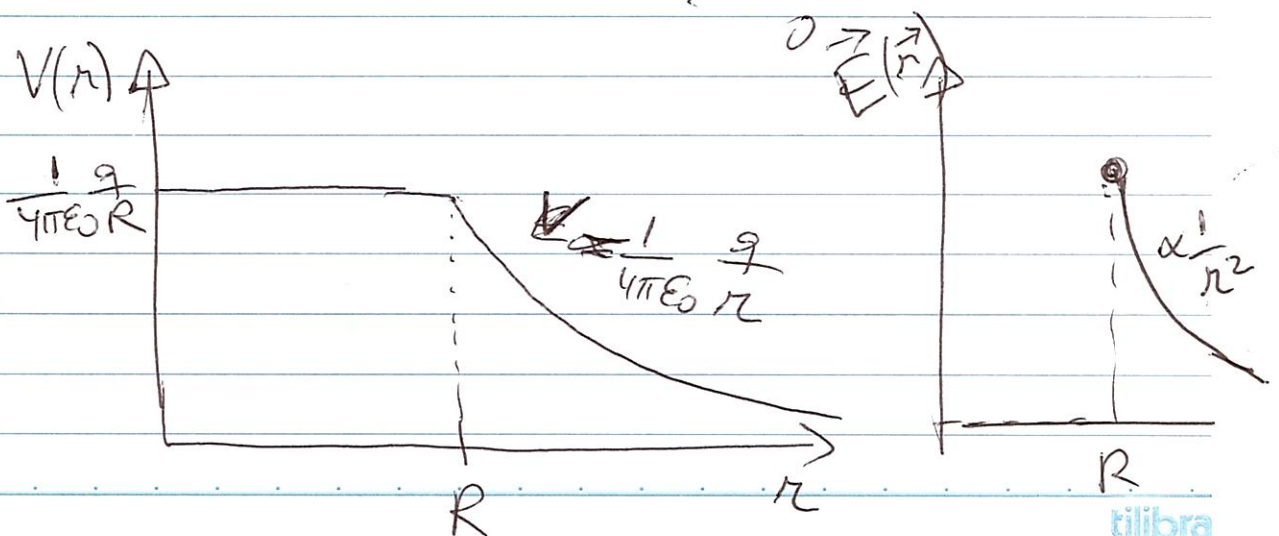
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r}$$

$$V(\vec{r}) = - \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{q}{r^2} dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \Big|_{\infty}^r$$

$$\boxed{V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}}$$

Dentro do esfera temos :

$$\boxed{V(r) = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^R \frac{q}{r^2} dr - \int_R^{r(\text{interno})} (0) dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}}$$



Finalmente vemos que podemos escrever 3 relações

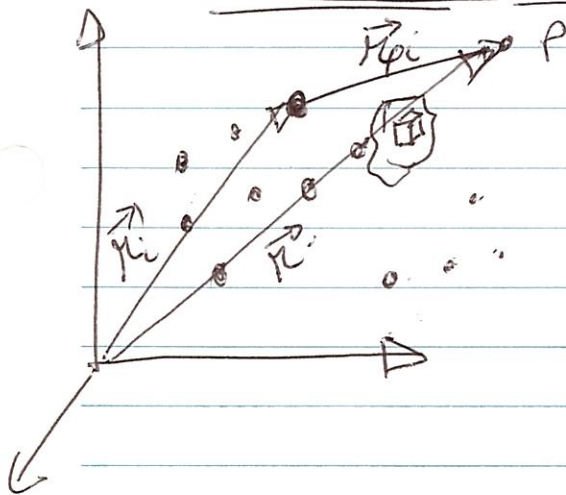
$$\vec{E} = -\nabla V ; \quad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{e} \quad \nabla \times \vec{E} = 0$$

Mas usando a segunda relação temos que

$$\nabla \cdot (-\nabla V) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \therefore \quad \boxed{\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}} \rightarrow \text{Eq de Poisson}$$

$$\text{se } \rho = 0 \Rightarrow \boxed{\nabla^2 V = 0} \rightarrow \text{Eq de Laplace}$$

Cálculo do Potencial de uma distribuição de cargas



Uma carga

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{q(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\vec{r}'$$

$$\boxed{V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}'|}}$$

Ou se a carga estiver na origem do

Sistema

$$\boxed{V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}}$$

Se usarmos $\vec{r} - \vec{r}' = r_{\phi}$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_{\phi}}$$

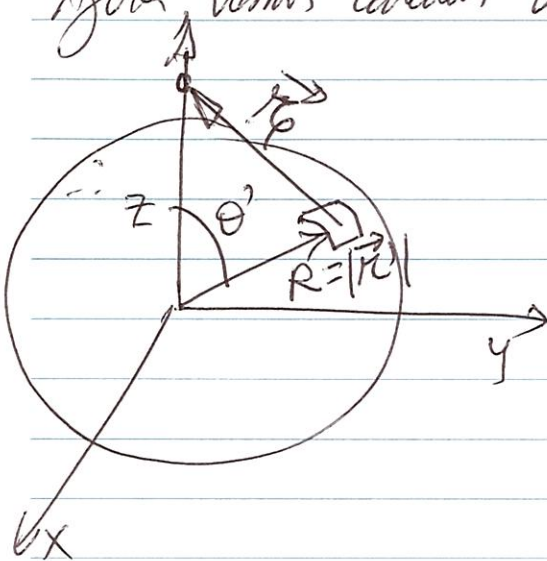
Usando o fato que vale o princípio da superposição neste caso.

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_{\phi i}} \quad \text{ou} \quad V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{r_{\phi}} \rho(\vec{r}') dV'$$

Ex. 2.7 Vamos calcular o potencial p/ uma distribuição uniforme de carga no esp. de uma casca esférica de raio R .

Não que calculamos ~~este problema~~ de forma muito fácil e elegante usando a lei de Gauss para encontrar o campo $\vec{E}$ e depois integrar $\vec{E}$ p/ encontrar V .

Agora vamos calcular diretamente $V(r)$ apartir de $\underline{E}$



$$V(\vec{r}) = V(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma da'}{r_{\phi}}$$

$$r_{\phi}^2 = (\vec{r} - \vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}')$$

$$r_{\phi}^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta'$$

$$r_{\phi}^2 = R^2 + z^2 - 2zR \cos \theta'$$

$$V(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{R^2 \sin\theta' d\theta' d\phi'}{\sqrt{R^2 + z^2 - 2Rz \cos\theta'}}$$

$$V(z) = \frac{2\pi\epsilon R^2}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \frac{\sin\theta' d\theta'}{\sqrt{R^2 + z^2 - 2Rz \cos\theta'}}$$

$$u = R^2 + z^2 - 2Rz \cos\theta' \Rightarrow du = +2Rz \sin\theta' d\theta'$$

$$V(z) = \frac{2\pi\epsilon R^2}{4\pi\epsilon_0 2Rz} \int \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{2\pi\epsilon R^2}{4\pi\epsilon_0 2Rz} \sqrt{u} \Big|_0^\pi$$

$$\therefore V(z) = \frac{\epsilon R}{2\epsilon_0 z} \left[\sqrt{R^2 + z^2 - 2Rz \cos\theta'} \right]_0^\pi$$

$$V(z) = \frac{\epsilon R}{2\epsilon_0 z} \left[\sqrt{R^2 + z^2 + 2Rz} - \sqrt{R^2 + z^2 - 2Rz} \right]$$

$$V(z) = \frac{\epsilon R}{2\epsilon_0 z} \left[\sqrt{(R+z)^2} - \sqrt{(R-z)^2} \right]$$

Note que fora do esfera $z > R$ e mas p/ dentro do esfera $z < R$

fora: $V(z) = \frac{R\epsilon}{2\epsilon_0 z} \left[(R+z) - (z-R) \right] = \frac{R^2\epsilon}{\epsilon_0 z}$

dentro, $V(z) = \frac{R\epsilon}{2\epsilon_0 z} [(R+z) - (R-z)] = \frac{R\epsilon}{\epsilon_0}$

Se lembrarmos que $q = 4\pi R^2 \epsilon$..

Fora da esfera

$$V(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{z}$$

Dentro da esfera

$$V(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}$$

Como já esperávamos!!

Apesar de um pouco mais trabalhoso que no caso de uma Gauss! Achar V por integração direta, ainda é muito mais fácil que $\vec{E}$!!

Condições de Continuidade eletrostática em superfícies

Veja o caso de

