

dentro, $V(z) = \frac{R\epsilon}{2\epsilon_0 z} [(R+z) - (R-z)] = \frac{R\epsilon}{\epsilon_0}$

Se lembrarmos que $q = 4\pi R^2 \epsilon$..

Fora da esfera

$$V(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{z}$$

Dentro da esfera

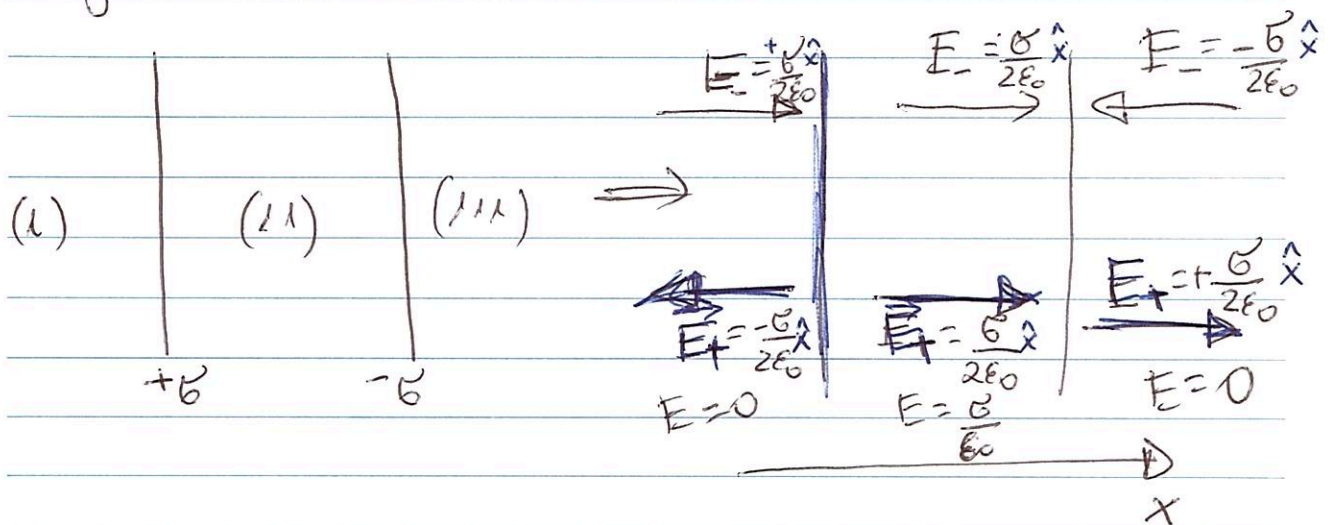
$$V(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}$$

Como já esperávamos!!

Apesar de um pouco mais trabalhoso que no caso de uma Gauss! Achar V por integração direta, ainda é muito mais fácil que $\vec{E}$!!

Condições de Continuidade eletrostática em superfícies

Veja o caso de



Note que Quando estamos passando de uma superfície para outra, o campo $E_{\perp}$ tem sempre uma descontinuidade de $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$

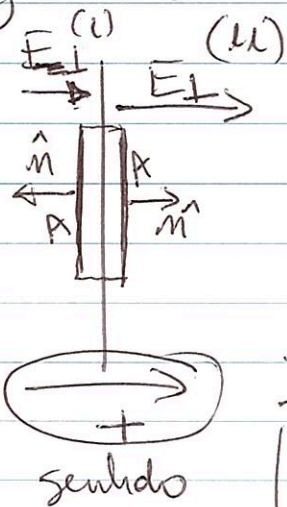
$$(i) E=0 \quad (ii) E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad \text{e} \quad (iii) E=0$$

$$\therefore E_{(i)} - E_{(ii)} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} ; \quad E_{(ii)} - E_{(i)} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} ; \quad E_{(iii)} - E_{(ii)} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

o o o

O mesmo ocorre no caso da carga esférica! Uma descontinuidade em $\vec{E}$.

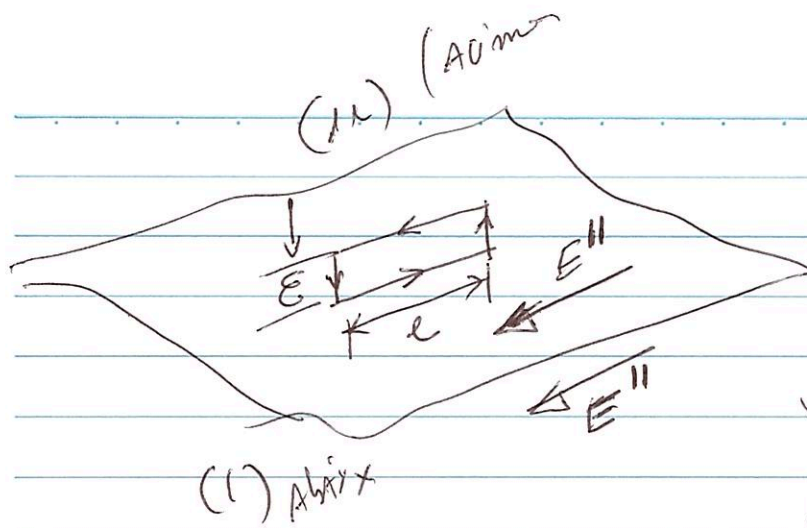
Podemos portanto escolher uma superfície com densidade de carga e calcular usando a lei de Gauss.



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{interior a superfície}} = \frac{1 \sigma A}{\epsilon_0}$$

No limite infinitesimal $\rightarrow$ qualquer tipo de superfície.

$$E_{\perp}^{(u)} - E_{\perp}^{(i)} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$



$\nabla \times \vec{E} = 0$

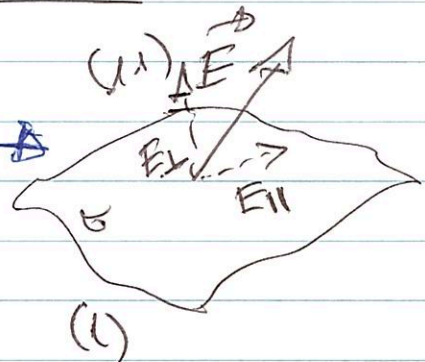
$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ pois $\vec{E}$ é irrotacional!

$E_{(II)}'' \cdot l - E_{(I)}'' \cdot l + \sigma E_{\perp} l = 0$

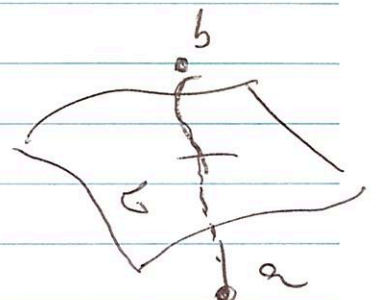
$\epsilon \rightarrow 0 \therefore E_{(II)}'' = E_{(I)}''$

Nota $E_{||}$ sempre ser contínuo!

$\vec{E}_{(ii)} - \vec{E}_{(i)} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}$
 Geral!!



$V_{(ii)} - V_{(i)} = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$
 (M)



Mas $M \rightarrow 0 \quad a = a \therefore$

$-\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow V_{(ii)} = V_{(i)}$

Lembre-se em todos os problemas o potencial é contínuo através de uma superfície carregada!

Deste grupo, vemos que:

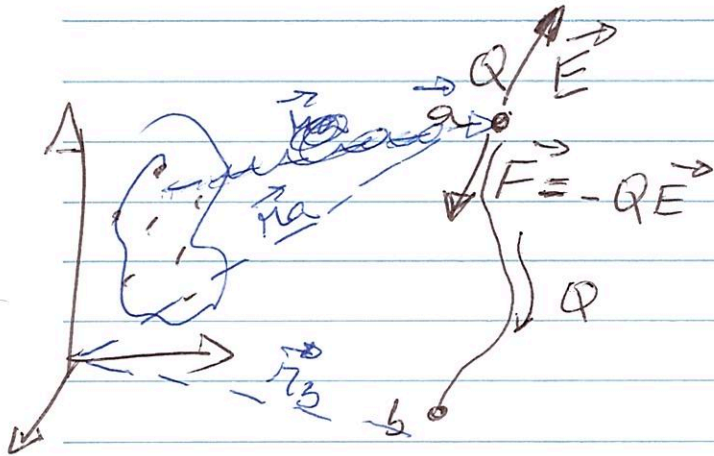
$$\boxed{E_{\perp}^{(II)} - E_{\perp}^{(I)} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad \text{se } \sigma \neq 0}$$

$E_{\perp}$ se contínuo!!

Não havendo ~~descontinuidade~~ densidade de carga superficial
 não temos descontinuidade do campo. É só por o
 caso da superfície da esfera com distribuição
volumétrica homogênea de carga.

Trabalho e Energia Eletrostática

Trabalho de $\vec{F}$ para mover uma carga.



$$\therefore W = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

$$W = - \int Q \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$W = -Q \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = Q[V(b) - V(a)]$$

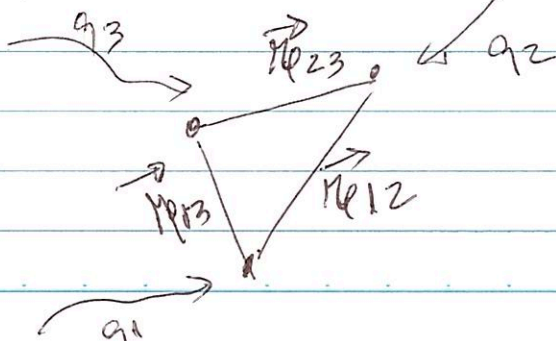
$$\therefore \boxed{V(b) - V(a) = \frac{W}{Q}}$$

Q/ Trazer do infinito $W = Q[V(\vec{r}) - V(\infty)_{\text{ref.}}]$

$$\boxed{W = QV(\vec{r})}$$

$\therefore$ Potencial é a Energia potencial eletrostática por unidade de carga.

P/ uma distribuição de cargas



Trabalho apenas (1) e (2)

$$W_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_2 \left(\frac{q_1}{r_{12}} \right)$$

Trabalho agora (3) na presença de (1) e (2)

$$W_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_3 V_{1,2}(\vec{r}_3)$$

$$V_{1,2}(\vec{r}_3) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{r_{13}} + \frac{q_2}{r_{23}} \right)$$

Daí a 4ª carga j' tem

$$W_4 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_4 \left(\frac{q_1}{r_{14}} + \frac{q_2}{r_{24}} + \frac{q_3}{r_{34}} \right)$$

Somando, até agora os 4 trabalhos

$$W = \sum_{i=1} W_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_1 q_4}{r_{14}} + \right.$$

$$\left. \frac{q_2 q_3}{r_{23}} + \frac{q_2 q_4}{r_{24}} + \frac{q_3 q_4}{r_{34}} \right)$$

$$\therefore W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j>i}}^n \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

$j > i$ e $j' /$
não contar duas

vezes o mesmo
par!!

Mas se contarmos, podemos $\div 2$

$$\therefore W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{r_{ij}} \right)$$

↳ Note mais que $W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i V(\vec{r}_i)$

8/ um conjunto contínuo de cargas...

$$W = \frac{1}{2} \int \rho V(\vec{r}) dV$$

↙ volume ≠ potencial!

Podemos resolver eliminando V e ρ para dar lugar a $\vec{E}$.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \therefore \quad W = \frac{\epsilon_0}{2} \int (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) V dV$$

Podemos levar da integração por partes:

$$\vec{\nabla} \cdot (f \vec{A}) = f (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} f)$$

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot (f \vec{A}) dV = \oint_S f \vec{A} \cdot d\vec{a} = \int_V f (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) dV + \int_V \vec{A} \cdot \vec{\nabla} f dV$$

$\oint_S$ Teorema de Gauss $\int_V$ Vol $\int_V$ Vol

$$\therefore \int_{\text{Vol}} (\nabla \cdot \vec{A}) dV = - \int_{\text{Vol}} \vec{A} \cdot \nabla f dV + \oint_S f \vec{A} \cdot d\vec{a}$$

Subst. $\vec{A}$ por $\vec{E}$ e f por V

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \left[- \int_V \vec{E} \cdot (\nabla V) dV + \oint_S V \vec{E} \cdot d\vec{a} \right]$$

mas $\nabla V = -\vec{E}$..

$$\boxed{W = \frac{\epsilon_0}{2} \left(\int_V E^2 dV + \oint_{S(V)} V \vec{E} \cdot d\vec{a} \right)}$$

Solução exata
p/ qualquer
volume!

Note que p/ distâncias grandes $\vec{E} \rightarrow \frac{1}{r^2}$;

mas $V \rightarrow \frac{1}{r}$, O volume vai com r^3 enquanto que

a área vai com r^2

P/ o caso em que $r \gg r'$ (região da dist. da carga)

então o segundo integral tende a

zero!
contribui muito
menos que o
do volume!

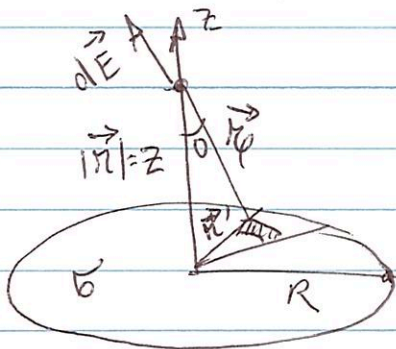
$$\boxed{W \rightarrow \frac{\epsilon_0}{2} \int_{(V \text{ grande})} E^2 dV} \quad \text{ou} \quad \boxed{W = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 dV}$$

Tudo
exato!

Exemplo 2/ Cálculo de V e $\vec{E}$

pg 69

Vamos calcular o valor de ~~potencial~~ ~~potencial~~ ~~potencial~~ em uma distribuição de cargas no plano de um disco.



$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r_e}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma da}{(z^2 + r'^2)^{1/2}}$$

Note! e tome cuidado, V não tem componente como no caso de $\vec{E}$!!!

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma r' dr' d\phi}{(z^2 + r'^2)^{1/2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sigma 2\pi \int_0^R \frac{r' dr'}{(z^2 + r'^2)^{1/2}}$$

$$\left[V = \frac{1}{2 \cdot 4\pi\epsilon_0} \sigma 2\pi \left[\sqrt{z^2 + r'^2} \right] \right]_0^R = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[(z^2 + R^2)^{1/2} - z \right]$$

Note que s/ $z \gg R$ recuperamos o resultado de uma carga pontual como esperado!

$$V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[z \left(1 + \frac{R^2}{z^2} \right)^{1/2} - z \right] \text{ em série de Taylor}$$

$$V \approx \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[z + \frac{1}{2} \frac{R^2}{z} - \dots - z \right] \approx \frac{\sigma R^2}{4\epsilon_0 z} = \frac{q R^2}{4\pi R^2 z} = \frac{q}{4\pi R^2 z}$$

$$= \frac{q}{4\pi R^2 z}$$

tilibra

$$\vec{E} = -\nabla V \quad \therefore \quad \vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial z} \hat{z} \quad \text{O campo no direço } \underline{\underline{\hat{z}}}$$

Nota que nos estamos calculando a componente do campo na direção, por exemplo, ou fora do Eixo!

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{z}{(z^2 + R^2)^{1/2}} \right] \hat{z}$$

p/ $z \ll R$ recuperamos o campo p/ uma placa plana infinita!

$$\vec{E} \approx \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{n}$$

CONDUTORES

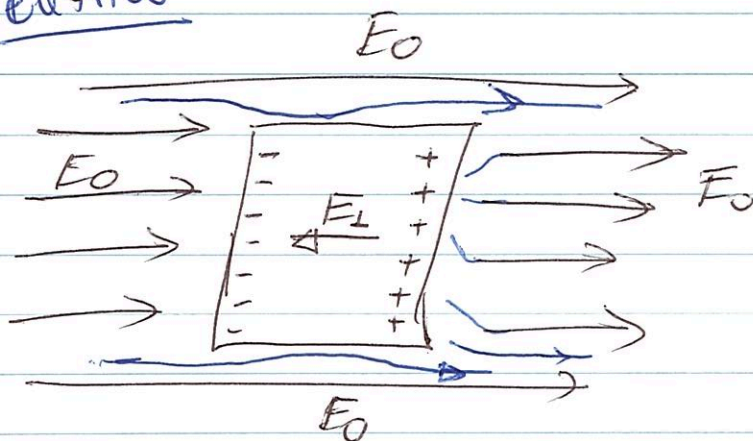
1) Isolantes: Os elétrons são ligados ao material a cada átomo do material, não existindo elétrons livres para mover-se.

2) Em condutores, existe um ou mais elétrons por átomo que estão "livres" p/ mover-se através do material.

(1) $E = 0$ dentro de um condutor.

A primeira ideia é que se existisse campo dentro do condutor, as cargas sofreriam uma força e então não estaríamos na situação eletrostática.

De uma forma mais geral podemos verificar o caso de um condutor na região de um campo elétrico $\vec{E}_0$ externo.



Próximo do condutor, o campo externo também é afetado!

As cargas movem até que $\vec{E}_1$ com ele completamente

$\vec{E}_0$ na região interna do condutor. Lembrando que esp. is. muita são as eletrons que se movem.

(ii) $\rho = 0$ dentro de um condutor :

De Lei de Gauss temos: $\nabla \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0$. Mas

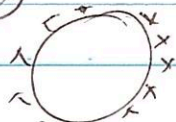
$$\text{se } \vec{E} = 0 \Rightarrow \boxed{\rho = 0}$$

$$\sum (q^+ + q^-) = 0$$

importante

(iii) Qualquer carga residual está na superfície.

Em termo da energia total, isto faz sentido pois o sistema tende minimizar a energia. Considere



$$V = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{R}$$

Com $\frac{q}{9} \Rightarrow W = \frac{3}{20} \pi \epsilon_0 R \dots$

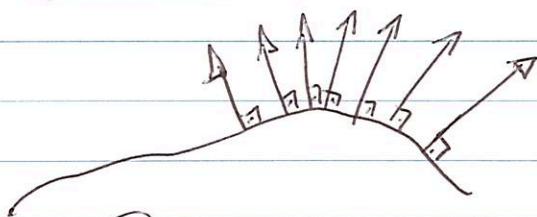
pg 72/

(iv) Um condutor é uma superfície equipotencial!

$$V(\vec{b}) - V(\vec{a}) = - \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0 \quad \text{sendo}$$

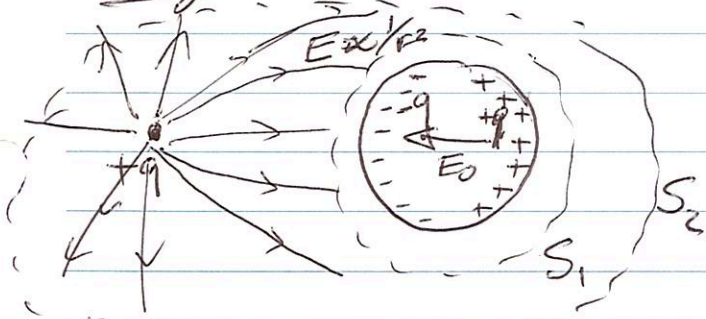
$\vec{a}$ e $\vec{b}$ qualquer ponto na superfície $\therefore V(\vec{a}) = V(\vec{b})$

(v) $\vec{E}$ é sempre perpendicular à superfície logo fora do condutor!



Como contrário, qualquer componente $E_{||}$ produziria uma mudança na distribuição de cargas!

Cargas induzidas



$$\oint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{a} = 0 = \frac{(+q - q)}{\epsilon_0}$$

$$\oint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{q}{\epsilon_0} \rightarrow \text{cálculo como S1 antes!}$$

No entanto, existe uma força de atração entre $+q$ e a esfera neutra!! Esta ~~força~~ força ser calculada mais adiante no curso!