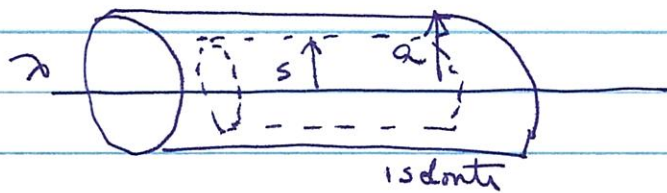


Example 4.4

Note que este prob. é muito Simétrico e ∴ aplicamos Gauss



$$\vec{D} = ?$$

$$\vec{D}(2\pi s L) = \underbrace{\lambda L}_{q_{\text{enc.}}} \Rightarrow \boxed{\vec{D} = \frac{\lambda}{2\pi s} \hat{s}} \quad s < a$$

Como $\vec{P} = 0$ fora do isolante.

$$\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \vec{D}$$

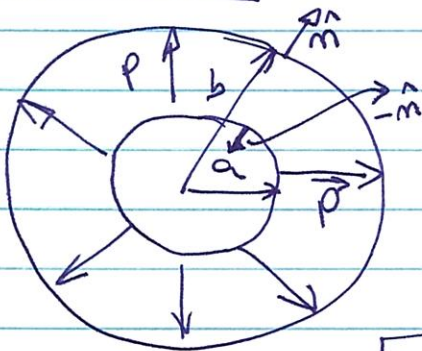
lembrando $\vec{D} \equiv \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

$$\therefore \boxed{\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 s} \hat{s}} \quad r/s > a$$

Note que não podemos encontrar $\vec{E}$ no dielétrico se não sabemos como é $\vec{P}$.

Exerc. 4.15

Simetria esf. IDEM GAUSS



$$\vec{P}(\vec{r}) = \frac{k}{r} \hat{r} \quad \checkmark \quad \oint \vec{F} = 0$$

2) Encontre P_b e ϕ_b .

$$\boxed{P_b = -\nabla \cdot \vec{P} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{k}{r} \right) = -\frac{k}{r^2}}$$

$$\phi_b = \vec{P} \cdot \hat{n} = \begin{cases} +P \hat{n} = \frac{k}{b} & r/s > b \\ -P \cdot \hat{n} = -\frac{k}{a} & r/s < a \end{cases}$$

Aplicando Gauss : $\oint_{S_{\text{Gauss}}} \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{1}{\epsilon_0} (Q_p + Q_{\text{Free}})$

↳ dados do problema!

a) $r < a$

$Q_p = 0 \therefore \boxed{\vec{E} = 0} \text{ e } \boxed{\vec{D} = 0}$

b) $r > b$ $Q_{\text{enc}} = 0$ (lembrando que

$Q = \int_{S_a} \vec{P}_a \cdot d\vec{a} + \int_{S_b} \vec{P}_b \cdot d\vec{a}$

$\therefore \boxed{\vec{E} = 0}$
 $\boxed{\vec{D} = 0}$

$Q = 4\pi\kappa b^2 - 4\pi\kappa a^2 + -\kappa \int_a^b \frac{4\pi r^2}{r^2} dr = 0$

c) $a < r < b$

$Q_p = \int_{S(a)} \left(\frac{-\kappa}{a} \right) \cdot da + \int_{S(r)} \left(\frac{-\kappa}{r^2} \right) \cdot d\tau$

$Q_p = \int_{S(a)} \vec{E} \cdot d\vec{a} + \int_V -\nabla \cdot \vec{P} \cdot d\tau$

$Q_p = -\frac{\kappa}{a} \int da + \int \frac{-\kappa}{r^2} r^2 \sin\theta d\theta d\phi$

$Q_p = \left(\frac{-\kappa}{a} \right) 4\pi a^2 + 4\pi \int_a^r -\kappa dr$

$\boxed{Q_p = 4\pi\kappa (-a - r + a) = -4\pi\kappa r}$

$\therefore \vec{E} = \frac{-4\pi\kappa r}{4\pi r^2 \epsilon_0} \hat{r} \therefore \boxed{\vec{E} = -\frac{\kappa}{\epsilon_0 r} \hat{r}}$

b) Encontrar $\vec{D}$

$\oint \vec{D} \cdot d\vec{r} = Q_{free} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{D} = 0}$ Todo ponto!

porque é suficiente para determinar $\vec{D}$?

Mas $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{E} = -\frac{\vec{P}}{\epsilon_0}}$

$\therefore \vec{E} = 0$ p/ $r < a$ e $r > b$; $\boxed{\vec{E} = -\frac{k}{\epsilon_0 r} \hat{r} \text{ p/ } a < r < b}$

4.3.2 Diferença entre $\vec{D}$ e $\vec{E}$

Nota $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f$ e $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

Mas!

$\vec{D}(\vec{r}) \neq \frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{r}_0}{r^2} \rho_f(\vec{r}') dV'$

Podemos agora usar a div. p/ calcular $\vec{D}$; Mas

$\nabla \times \vec{D} = \nabla \times (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \epsilon_0 \nabla \times \vec{E} + \nabla \times \vec{P}$

Como $\nabla \times \vec{E} = 0$ então

$\boxed{\nabla \times \vec{D} = \nabla \times \vec{P}}$

$\nabla \times \vec{P} \neq 0$ (não mais zero!)

Voltemos ao exercício 4.11

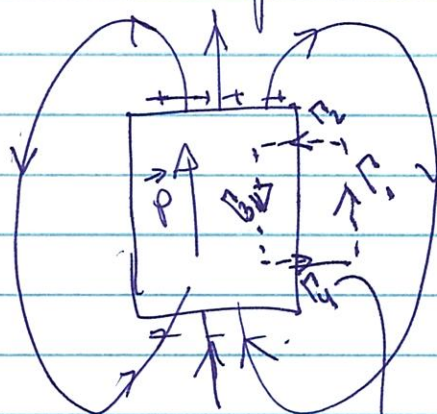
Em Exer. 4.4 e Prob. 4.15 OK! $\nabla \times \vec{P} = 0$

Como $\rho_{free} = 0 \Rightarrow \oint \vec{D} \cdot d\vec{r} = 0 \Rightarrow \vec{D} = 0$

$\therefore \boxed{\vec{E} = \left(-\frac{1}{\epsilon_0}\right) \vec{P}}$ dentro. Todo ponto

$\vec{E} = 0$ fora $\leftarrow$ Obviamente isto está errado!
Em algum lugar $\vec{D} \neq 0$!!

Podem fazer $\vec{E} \cdot \vec{P} \rightarrow 0$



Na $\nabla \times P_0 \hat{z} = 0 \Rightarrow$ (distú do del.)

$\nabla \times P = 0 \Rightarrow$ (fora!)
pois $P = 0$

$\nabla \times \vec{D} \neq 0$ onde?

$\oint \vec{P} \cdot d\vec{r} \neq 0$
 $\oint (\nabla \times \vec{P}) \cdot d\vec{r} \neq 0$
 $\therefore \nabla \times \vec{P} \neq 0$

Nos pontos $\vec{D}$

Lembrando que $\nabla \times \vec{E} = 0 \Rightarrow V$

Como $\nabla \times \vec{D} \neq 0$ não

podemos criar um campo ϕ equivalente de

pois que $\vec{D} \leftarrow -\nabla \phi$ ~~ERRADO!~~
* se tem simetria $\nabla \times \vec{D} = 0$ então use Gauss
na interface Atômica

4.3.3 Condições de Fronteira

Da mesma forma que em $\vec{E}$ temos agora

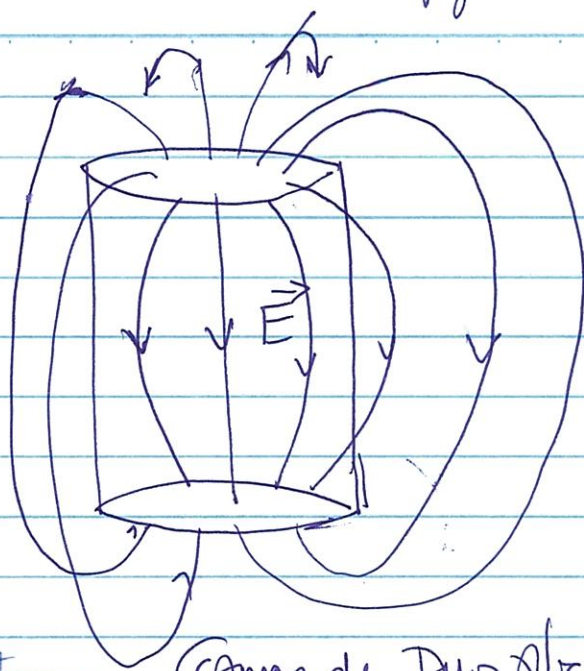
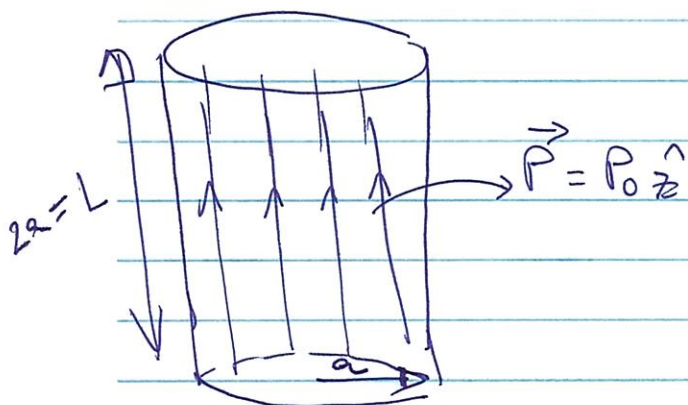
$$\boxed{D_{\text{Acima}}^{\perp} - D_{\text{Abaixo}}^{\perp} = Q_f} \quad (\text{descontinuidade do campo perpendicular})$$

A partir de $\oint \vec{D} \cdot d\vec{r} = Q_f$

Usando $\nabla \times \vec{D} = \nabla \times \vec{P}$ temos

$$\boxed{D_{\text{Acima}}^{\parallel} - D_{\text{Abaixo}}^{\parallel} = P_{\text{Acima}}^{\parallel} - P_{\text{Abaixo}}^{\parallel}}$$

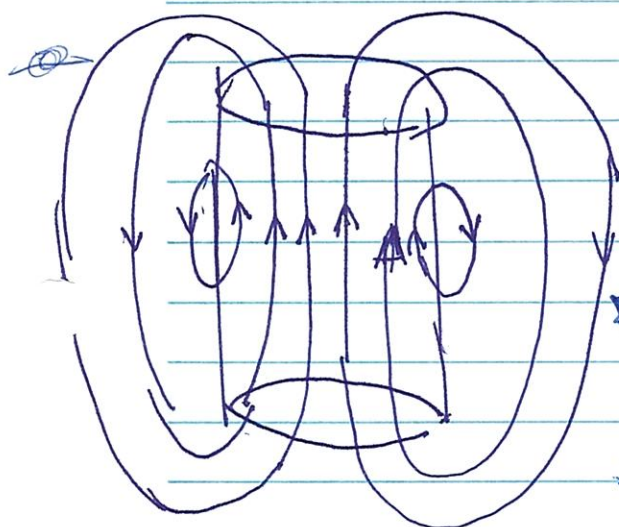
Ex 4.17



* Note ^{linhas} $\vec{E}$
começam e terminam em
cargas

(Campo de Duas placas
Planas!! Note os Efeitos
do lado pois
 $L = 2a$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$



Como $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_{free} = 0$
as linhas de $\vec{D}$ são contínuas

*** Note linhas de $\vec{D}$ começam e
terminam em cargas livres
que não tem, portanto
são contínuas.

Dieletricos LINEARES

Vimos que podemos caracterizar $\vec{P} = \alpha \vec{E}$ onde
 α não necessita ser uma constante.

No entanto é razoável pensar que $\vec{P} = \vec{P}(\vec{E})$ e resposta é polarização depende de $\vec{E}$.

Vamos dar gl o caso em que $E \rightarrow 0 \quad \vec{P} \rightarrow 0$.
Ou seja não olhamos gl o caso onde existe uma polarização permanente após aplicar campo sobre o material. Este é o caso da Ferro eletricidade (ex: Fe, Co, Ni)

Normalmente temos $\vec{P} = \chi(\vec{E}) \vec{E}$ ou $\vec{P} = \chi_0 \epsilon_0 \vec{E}$

onde $\chi(\vec{E})$ é a susceptibilidade elétrica do material.

Mucha parte dos materiais são eletricamente isotrópicos (fluidos, sólidos policristalinos e amorfos e alguns cristais).

Não olhamos gl o caso Anisotrópico onde P e χ dependem da direção.

gl isotrópicos
permissividades
elétrica do
material

$$\vec{D} = \epsilon(\vec{E}) \vec{E}$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 \vec{E} + \chi(\vec{E}) \vec{E}$$

$$\epsilon(\vec{E}) = \epsilon_0 + \chi(\vec{E})$$

onde

→ todos com mesmo
dimensões
(unidades)

Se ~~$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$~~
 $\vec{D} = \epsilon(\vec{E}) \vec{E}$

Se $\chi(\vec{E}) = \text{cte} = \chi$ então (matéria dos materiais)

$$\boxed{\vec{P} = \chi \vec{E}} \quad \text{e} \quad \boxed{\vec{D} = \epsilon \vec{E}}$$

$$\therefore \boxed{\epsilon = K \epsilon_0 \quad \therefore \quad K = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = 1 + \frac{\chi}{\epsilon_0}}$$

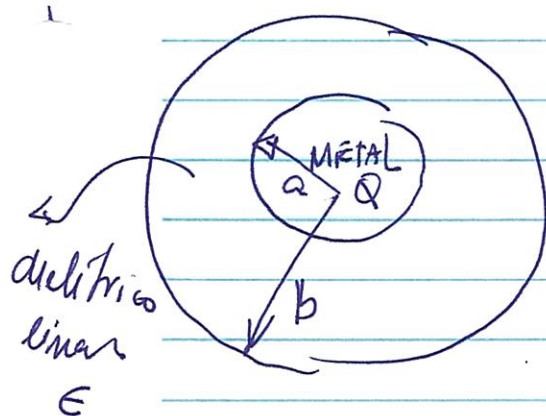
K é a permissividade relativa ou constante dielétrica

MATERIAL	K
VÁCUO	1.00000 <u>exato</u>
Ar (seco)	1.00052
Vapor ÁGUA	1.00587
Água (0°C)	88.8
H ₂ O (20°C)	80.1
KTaNbO ₃	34000

↑
sustentabilidade zero por
vácuo não tem nada!
(nem éter!!!)

😊

Exemplo 4.5



Qual o potencial no centro do esfera?

Precisamos calcular $V = - \int_{\infty}^0 \vec{E} \cdot d\vec{l}$

No entanto, não conhecemos $\vec{P}$, a
nem que se conhecemos conhecimentos
de $\vec{E}$

Levemos que $\vec{P} = \epsilon_0 \vec{E}$

Por outro lado conhecemos Q que, portanto podemos
calcular $\vec{D}$

8/ $r < a$ metal:

$$\vec{E} = 0; \quad \vec{P} = 0 \quad \text{e} \quad \vec{D} = 0 \quad \text{pois} \quad \oint \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q_{\text{enc}} \quad (\text{Gauss}).$$

8/ $r > a$

$$\vec{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{r} \quad \text{em todo o espaco usando} \quad \oint \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q$$

Nota! Só estamos considerando 8/ calcular $\vec{D}$ as cargas livres, Não importa as cargas polarizadas!

Agora usamos $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ 8/ calcular como é $\vec{E}$:

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{\hat{r}}{r^2} & \text{8/ } r < b \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{\hat{r}}{r^2} & \text{8/ } r > b \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \therefore V &= - \int_{\infty}^0 \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_{\infty}^b \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right) dr - \int_b^a \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \right) dr \\ &\quad - \int_a^0 0 dr = \frac{Q}{4\pi} \left(\frac{1}{\epsilon_0 b} + \frac{1}{\epsilon a} - \frac{1}{\epsilon b} \right) \end{aligned}$$

Não foi necessário calcular $\vec{P}$ para obter $\vec{E}$ neste caso. Mas como agora conhecemos $\vec{E}$,

$$\vec{P} = \chi \vec{E} \Rightarrow \vec{P} = \frac{Q\chi\hat{r}}{4\pi\epsilon r^2}$$

Escrevendo

$$\chi = \chi_e \epsilon_0$$



susceptibilidade do material
em termos de ϵ_0 .

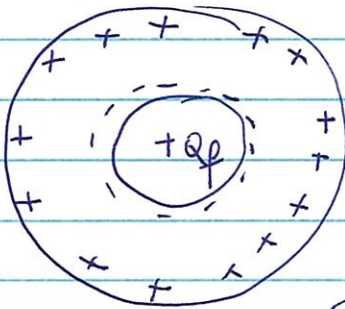
$$\epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi_e)$$

Então

$$\vec{P} = \frac{Q \cancel{\epsilon_0} \chi_e}{4\pi \cancel{\epsilon_0} (1 + \chi_e)} \frac{\hat{r}}{r^2}$$

$$\rho_b = -\nabla \cdot \vec{P} = 0 \quad (\text{lembrando } \nabla \cdot \frac{\hat{r}}{r^2} = 0!)$$

$$\sigma_b = \vec{P} \cdot \hat{n} = \begin{cases} \frac{Q \chi_e}{(1 + \chi_e)} \frac{1}{4\pi b^2} & (\text{superfície externa}) \\ -\frac{Q \chi_e}{(1 + \chi_e)} \frac{1}{4\pi a^2} & (\text{superfície interna!}) \end{cases}$$



Note que as cargas $-\sigma_b$ estão tentando diminuir ao máximo o E

(Depende de χ_e) ou quantas cargas podem ser polarizadas. Para "concluir" o campo no dielétrico

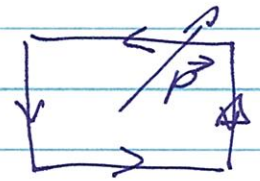
Ou seja o dielétrico é um mau condutor!

Substituindo a casca isolante por um condutor "isolado", a polarização seria máxima e o campo E dentro da casca seria zero! (Que obviamente sabemos!)

Portanto, vemos que o efeito do dielétrico é reduzir o campo.

Tendo um espaço inteiro preenchido por um dielétrico homogêneo e linear ∴

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f \quad \nabla \times \vec{D} = 0$$



$$\oint \vec{P} \cdot d\vec{l} \Rightarrow \nabla \times \vec{P} = 0$$

Portanto é como se não tivéssemos nenhuma polarização. Neste espaço o campo é reduzido por um certo valor ~~como se~~ do caso onde não existe dielétrico!

Sabemos que

$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}_{vac}$ onde $\vec{E}_{vac}$ é produzido por Q_f sem dielétrico no meio.

$$\therefore \text{Se } \vec{D} = \epsilon \vec{E} \therefore \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}_{vac}$$

$$\therefore \vec{E}_{dil} = \frac{\vec{D}}{\epsilon} = \frac{\epsilon_0 \vec{E}_{vac}}{\epsilon}$$

$$\text{Logo } k = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \therefore \boxed{\vec{E}_{dil} = \frac{1}{k} \vec{E}_{vac}}$$

→ O campo foi reduzido por um fator k do caso do vácuo!

Exatamente o que ocorre em um capacitor quando substituímos o vácuo por um dielétrico? A capacitância aumenta pelo valor k !

$$C = \frac{Q}{V_{\text{vácuo}}!}$$

$$\text{se } \vec{E}_{\text{diel}} = \frac{\vec{E}_{\text{vac}}}{k}$$

$$\therefore V = \Delta V = \frac{1}{k} V_{\text{vácuo}}$$

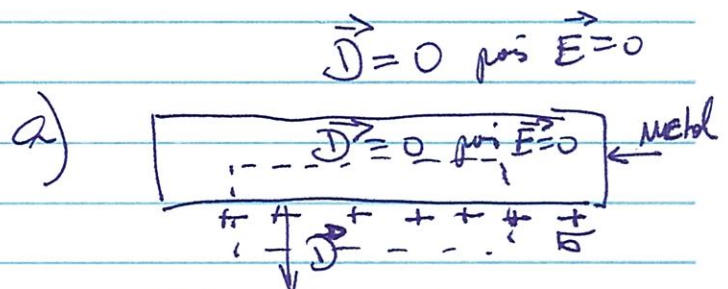
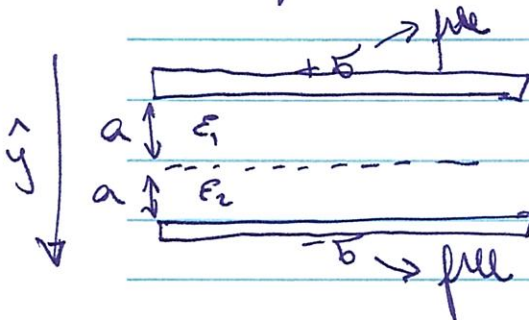
$$C_{\text{diel}} = \frac{Q}{\frac{1}{k} V_{\text{vácuo}}} = k C_{\text{vácuo}}$$

ou de fato $Q_{\text{diel}} = k Q_{\text{vácuo}}$

Podemos armazenar mais carga no capacitor com dielétrico ou seja, mais energia!

$$W = \frac{1}{2} C V^2$$

Exemplo 1 Ex. 4.18



$$\int \vec{D} \cdot d\vec{a} = Q_{\text{free}}$$

$$\therefore DA = bA$$

$$\therefore \vec{D} = b \hat{y}$$

É óbvio que dá o mesmo resultado considerando a placa metálica do baixo

b) O campo elétrico em cada dielétrico

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad \therefore \quad \vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon} \quad \therefore \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_1} \hat{y} \\ \vec{E}_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_2} \hat{y} \end{array} \right.$$

Note a similaridade do caso onde temos vácuo $E_{vac} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$

sendo $\epsilon_1 = 2$ e $\epsilon_2 = \frac{3}{2}$

$$\epsilon_1 = 2\epsilon_0 \quad \text{e} \quad \epsilon_2 = \frac{3}{2}\epsilon_0$$

$$\therefore E_1 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad \text{e} \quad E_2 = \frac{2\sigma}{3\epsilon_0}$$

c) A polarização será: $\vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E}$

mas $\epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \Rightarrow \kappa = 1 + \chi_e$

$$\therefore \vec{P} = (\kappa - 1) \epsilon_0 \vec{E} \quad \therefore \quad \boxed{\vec{P}_1 = (\kappa - 1) \epsilon_0 \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{2} \hat{y}}$$

$$P_2 = \left(\frac{3}{2} - 1\right) \frac{2\sigma}{3} \Rightarrow \boxed{\vec{P}_2 = \frac{\sigma}{3} \hat{y}}$$

d) $V = E_1 a + E_2 a = \frac{\sigma a}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \right) = \frac{\sigma a}{\epsilon_0} \left(\frac{7}{6} \right)$

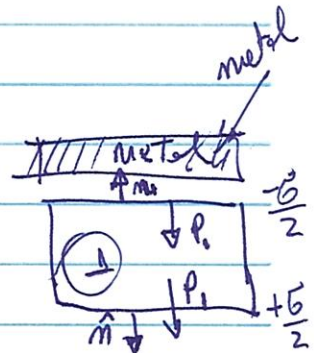
e) $\rho_b = 0$; Homogeneo! $P = ctu!$ $\therefore \nabla \cdot \vec{P} = 0$

$$\sigma = \vec{P} \cdot \hat{n}$$

Dieltro (1)

$$\sigma_b = +\frac{\epsilon}{2} \hat{y} \cdot (-\hat{y}) = -\frac{\epsilon}{2} \quad (\text{parte superior})$$

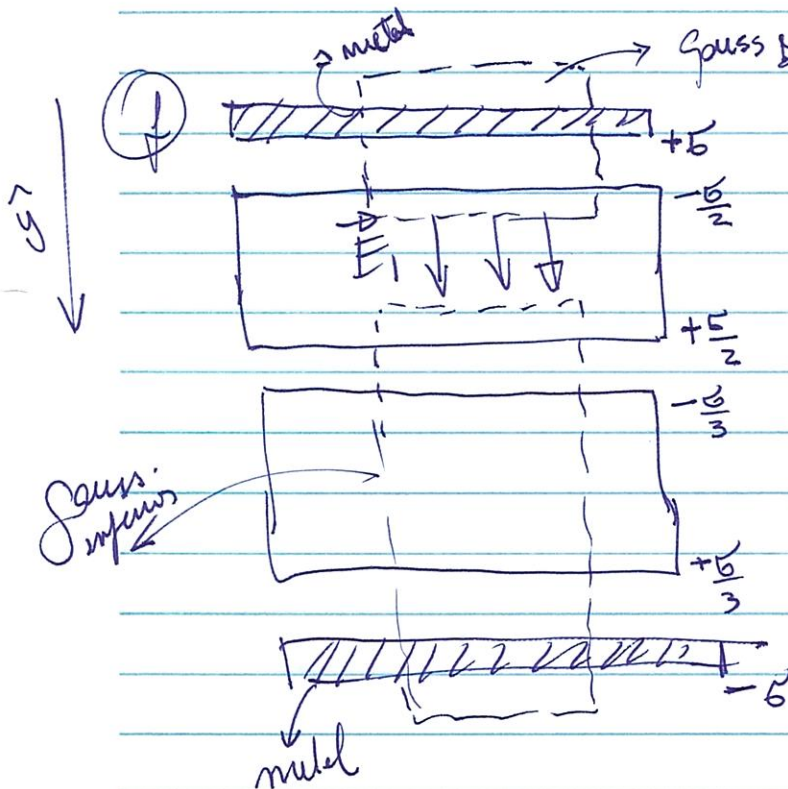
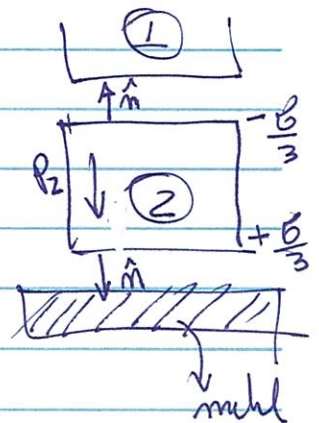
$$\sigma_b = +\frac{\epsilon}{2} \hat{y} \cdot (+\hat{y}) = +\frac{\epsilon}{2} \quad (\text{parte inferior})$$



Dieltro (2)

$$\sigma_b = +\frac{\epsilon}{3} \hat{y} \cdot (-\hat{y}) = -\frac{\epsilon}{3} \quad (\text{superior})$$

$$\sigma_b = +\frac{\epsilon}{3} \hat{y} \cdot (+\hat{y}) = +\frac{\epsilon}{3} \quad (\text{inferior})$$



$$Q_{\text{Gauss sup}} = +\epsilon - \frac{\epsilon}{2} = +\frac{\epsilon}{2}$$

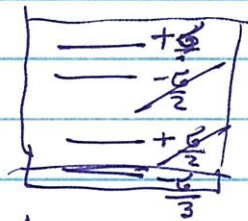
$$Q_{\text{Gauss inf}} = +\frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} - \epsilon = -\frac{\epsilon}{2}$$

$$\therefore A \cdot \vec{E} = \frac{QA}{\epsilon_0} = \frac{\epsilon}{2\epsilon_0}$$

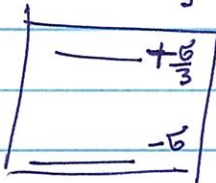
$$\vec{E}_1 = \frac{\epsilon}{2\epsilon_0} \hat{y}$$

ATENÇÃO! Você chegou a mesma conclusão usando o Princípio da superposição!

De forma equivalente na região (2)



Gauss sup $\Rightarrow \sigma - \frac{\sigma}{3} = + \frac{2\sigma}{3}$



Gauss inf $\Rightarrow \frac{\sigma}{3} - \sigma = - \frac{2\sigma}{3}$



$$\vec{E}_{(2)} = \frac{2\sigma}{3\epsilon_0} \hat{y}$$

O problema do valor de Fronteira em Dielétricos Lineares

Nos dielétricos lineares, sabemos que ρ_b é proporcional às cargas livres ou melhor, à densidade de cargas livres

$$\rho_b = -\nabla \cdot \vec{P} = -\nabla \cdot (\underbrace{\chi_e \epsilon_0 \vec{E}}_{\vec{P}}) = -\nabla \cdot \left(\frac{\chi_e \epsilon_0 \vec{D}}{\epsilon} \right)$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$\rho_b = -\nabla \cdot \left(\frac{\chi_e}{1+\chi_e} \vec{D} \right) = \frac{-\chi_e}{1+\chi_e} \underbrace{\nabla \cdot \vec{D}}_{\rho_f}$$

$\epsilon = \epsilon_0(1+\chi_e)$

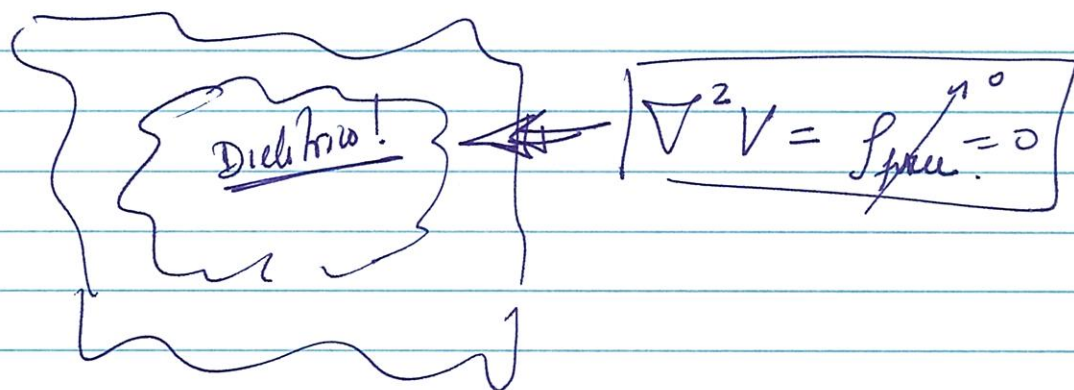
$$\boxed{\rho_b = -\frac{\chi_e}{1+\chi_e} \rho_f}$$

Se não tem cargas livres dentro do dielétrico

então $\boxed{\rho_b = 0}$ o que é razoável!!

Vimos do próprio exemplo anterior que isto
não vale p/ $\underline{\underline{E_b}}$!!

Desta forma, dentro do dielétrico o potencial obedece
à equação de Laplace



Podemos usar desta forma os métodos de solução
do Capítulo 3

Somente re-escrevendo as equações de contorno

$$\boxed{\epsilon_{diel} E_{acim}^\perp - \epsilon_{ext} E_{ext}^\perp = \sigma_f}$$

$$\boxed{D_{acim}^\perp - D_{ext}^\perp = \sigma_f}$$

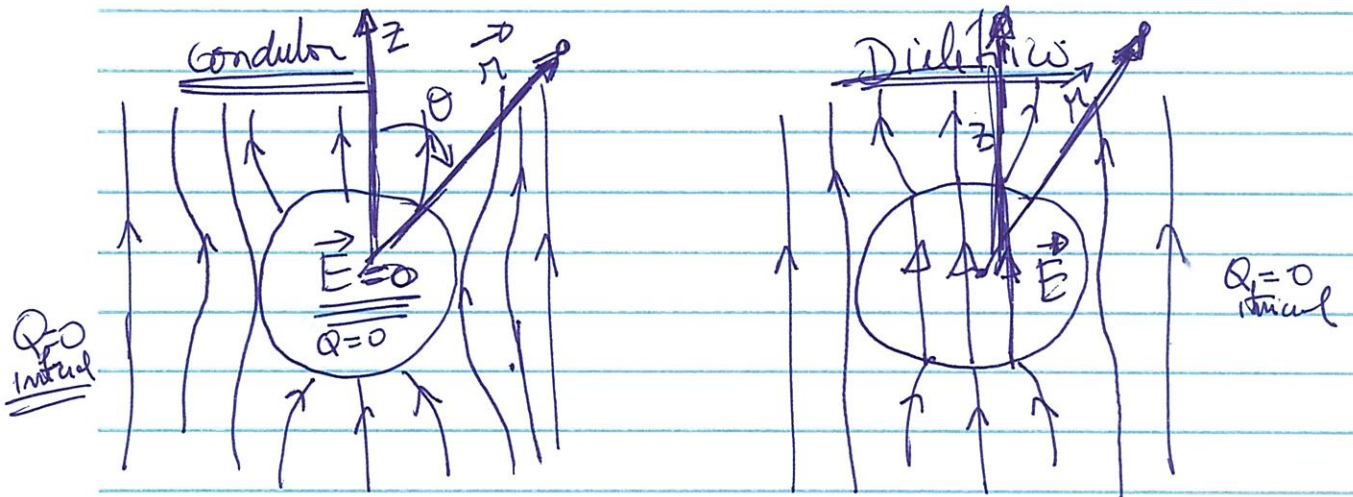
$$\epsilon_{\text{vacuo}} \frac{\partial V_{\text{vacuo}}}{\partial n} - \epsilon_{\text{diel}} \frac{\partial V_{\text{diel}}}{\partial n} = -\sigma_f$$

Onde $V_{\text{vacuo}} = V_{\text{diel}}$ (potencial é contínuo!)

Ex. 4.7

Esfere dielétrica no campo elétrico externo. $\vec{E}_0$

Encontrar o campo dentro da esfera dielétrica



$$V_{\text{in}}(r, \theta) \quad \text{p/ } r \leq R \quad \text{e} \quad V_{\text{out}}(r, \theta) \quad \text{p/ } r \geq R$$

$$(i) \quad V_{\text{in}} = V_{\text{out}} \quad \text{p/ } r = R$$

$$(ii) \quad \epsilon \frac{\partial V_{\text{in}}}{\partial r} = \epsilon_0 \frac{\partial V_{\text{out}}}{\partial r} \quad \text{p/ } r = R \quad \text{NÃO tem carga livre!}$$

$$(iii) \quad V_{\text{out}} \rightarrow -E_0 r \cos \theta \quad \leftarrow \quad \vec{E}_0 = -\frac{\partial V}{\partial z} \quad (\text{longe da dielétrica})$$

$$\therefore V_{\text{in}}(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta) \quad \left\{ \text{pois } \frac{1}{r^{l+1}} \rightarrow \infty \text{ quando } r \rightarrow 0 \right\}$$

Usando (iii)

$$V_{out}(r, \theta) = \underbrace{-E_0 r \cos \theta}_{\text{Término / Satisfaz}} + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta)$$

Aplicando (i) (condição de cont. na superfície).

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_l R^l P_l(\cos \theta) = -E_0 R \cos \theta + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{R^{l+1}} P_l(\cos \theta).$$

lembrando que $P_1(\cos \theta) = \cos \theta$

$$\textcircled{I} \left\{ \begin{array}{l} A_l R^l = \left(\frac{B_l}{R^{l+1}} \right) \quad \forall l \neq 1 \\ A_1 R = -E_0 R + \frac{B_1}{R^2} \end{array} \right.$$

Usando (ii) (Derivada!)

$$\kappa = \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0} \right) \sum_{l=0}^{\infty} l A_l R^{l-1} P_l(\cos \theta) = -E_0 \cos \theta - \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(l+1) B_l}{R^{l+2}} P_l(\cos \theta)$$

$$\textcircled{II} \left\{ \begin{array}{l} \kappa l A_l R^{l-1} = -\frac{(l+1) B_l}{R^{l+2}} \quad \forall \text{ todo } l \neq 1 \\ \kappa A_1 R^0 = -E_0 - \frac{2B_1}{R^3} \end{array} \right.$$

Resolvendo os dois sistemas p/ $l \neq 1$

$$A_l = \frac{B_l}{R^{2l+1}} \quad \text{de (I)}$$

$$\therefore \frac{-k l B_l}{R^{l+2}} + \frac{(l+1) B_l}{R^{l+2}} = 0 \quad \text{(II)}$$

$$B_l \left(\frac{k l + l + 1}{R^{l+2}} \right) = 0 \quad \text{como } k > 0 \text{ então}$$

$$B_l = 0 \Rightarrow A_l = 0$$

p/ $l=1$

$$A_1 = -E_0 + \frac{B_1}{R^3} \quad \text{(I)}$$

$$-k E_0 + \frac{k B_1}{R^3} = -E_0 - \frac{2 B_1}{R^3} \quad \text{(II)}$$

$$\frac{(2+k) B_1}{R^3} = (k-1) E_0 \Rightarrow B_1 = \frac{(k-1)}{(k+2)} R^3 E_0$$

$$\vec{E}_{in} = \frac{3}{k+2} \vec{E}_0 \quad \text{cte!!!}$$

$$A_1 = -\frac{3 E_0}{(k+2)}$$

$$V_{in}(r, \theta) = \frac{-3 E_0}{k+2} r \cos \theta = \frac{-3 E_0}{k+2} z$$