

A Força Elétrica de uma Corrente

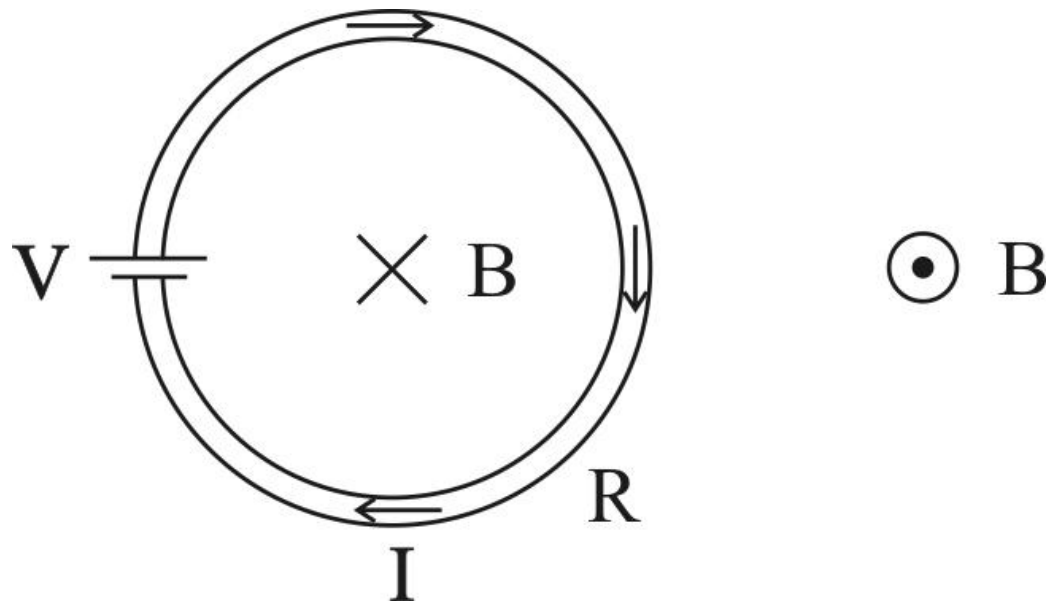
André K. T. Assis

Instituto de Física – UNICAMP

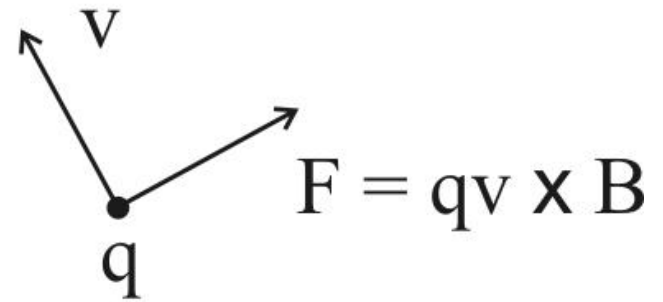
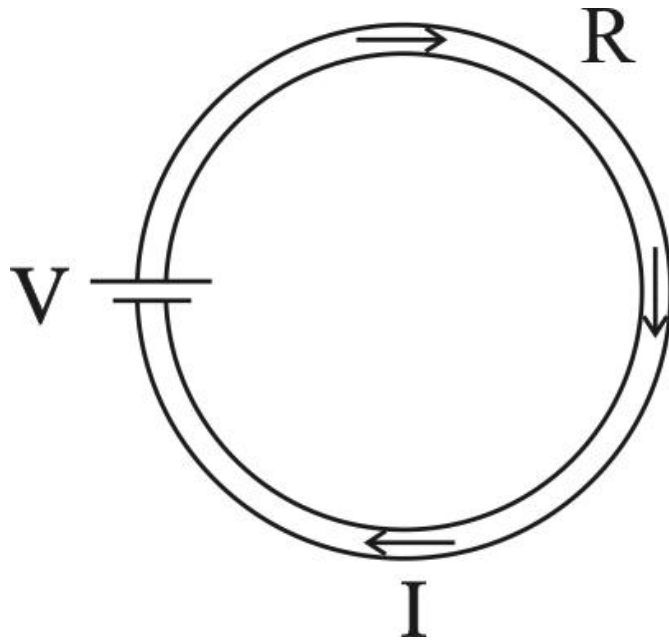
www.ifi.unicamp.br/~assis

Seja uma bateria gerando uma voltagem V e ligada a um fio com resistência R por onde flui uma corrente constante I .

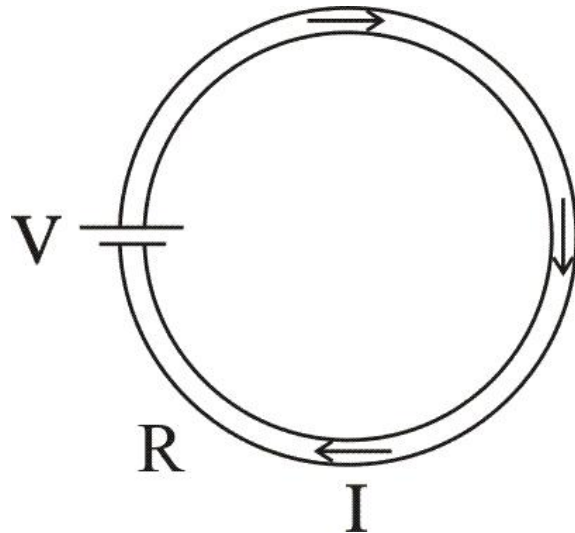
Em geral se afirma que este circuito gera um campo magnético B obtido pela regra da mão direita. Se tivermos por exemplo um circuito circular no qual flui uma corrente no sentido horário, o campo magnético vai estar penetrando o papel no interior do circuito e saindo do papel fora dele:



Se uma carga positiva q estiver deslocando-se em relação ao circuito com uma velocidade v , vai atuar uma força magnética F sobre ela dada por $F = qv \times B$



Perguntas simples que podem ser feitas:



$$\begin{array}{l} \bullet \\ q \\ v = 0 \end{array} \quad \mathbf{F = ?}$$

O circuito vai exercer uma força sobre uma carga externa parada em relação ao fio?

O circuito gera um campo elétrico fora dele?

O fio é neutro em todos os pontos fora da bateria?

Onde estão as cargas que geram o campo elétrico em todos os pontos no interior do fio?

J. C. Maxwell (Tratado de Eletricidade e Magnetismo, 1873, artigo 848):

“Tal ação nunca foi observada.”

R. Clausius (1877): “Aceito como critério o resultado experimental de que uma corrente constante em um condutor fechado estacionário não exerce força em carga parada.”

R. Feynman, The Feynman Lectures on Physics, Vol. 2, Seção 13-6 (1964):

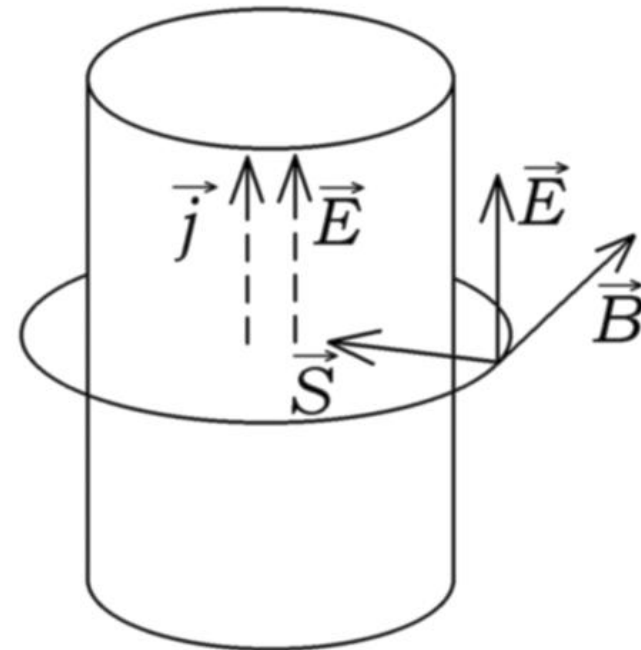
“Em um condutor normal como o cobre (...) não existe campo elétrico fora do fio.”

J. D. Jackson, Classical Electrodynamics, 1975, Exercício 14.13:

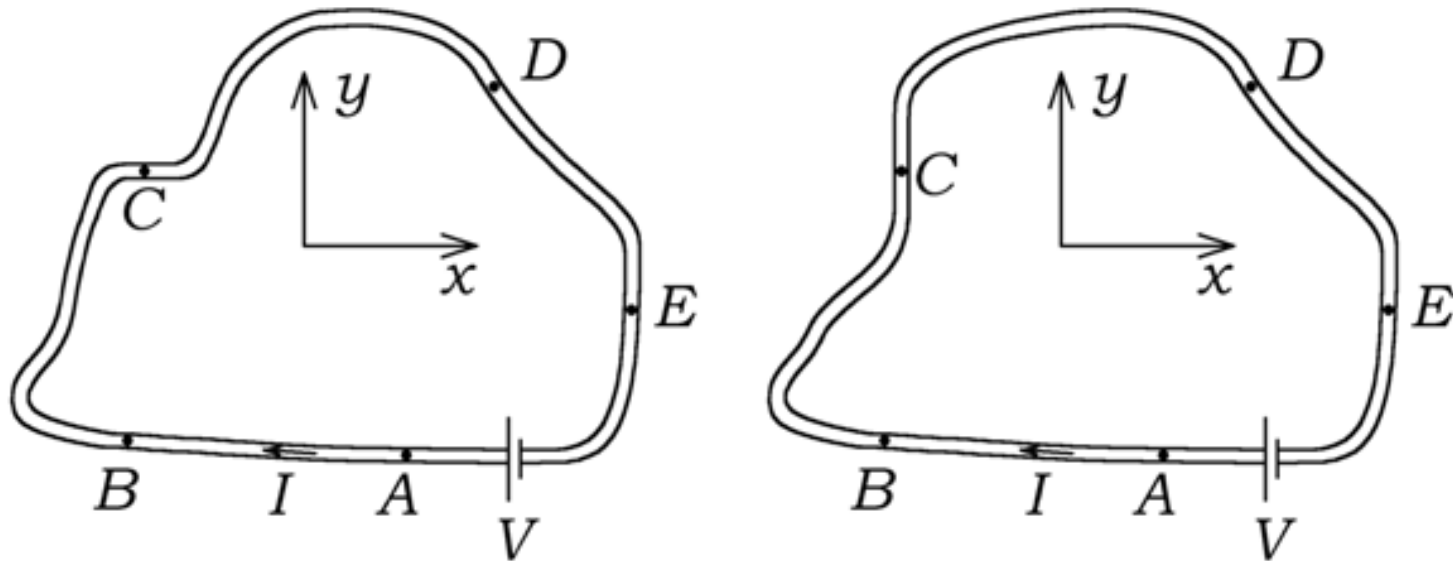
“Para um circuito real os íons positivos parados nos condutores vão produzir um campo elétrico que cancela exatamente o campo elétrico devido às cargas em movimento.”

Contrariamente ao que estes autores disseram, existem motivos para haver um campo elétrico fora do fio:

a) Continuidade da componente tangencial do campo elétrico:



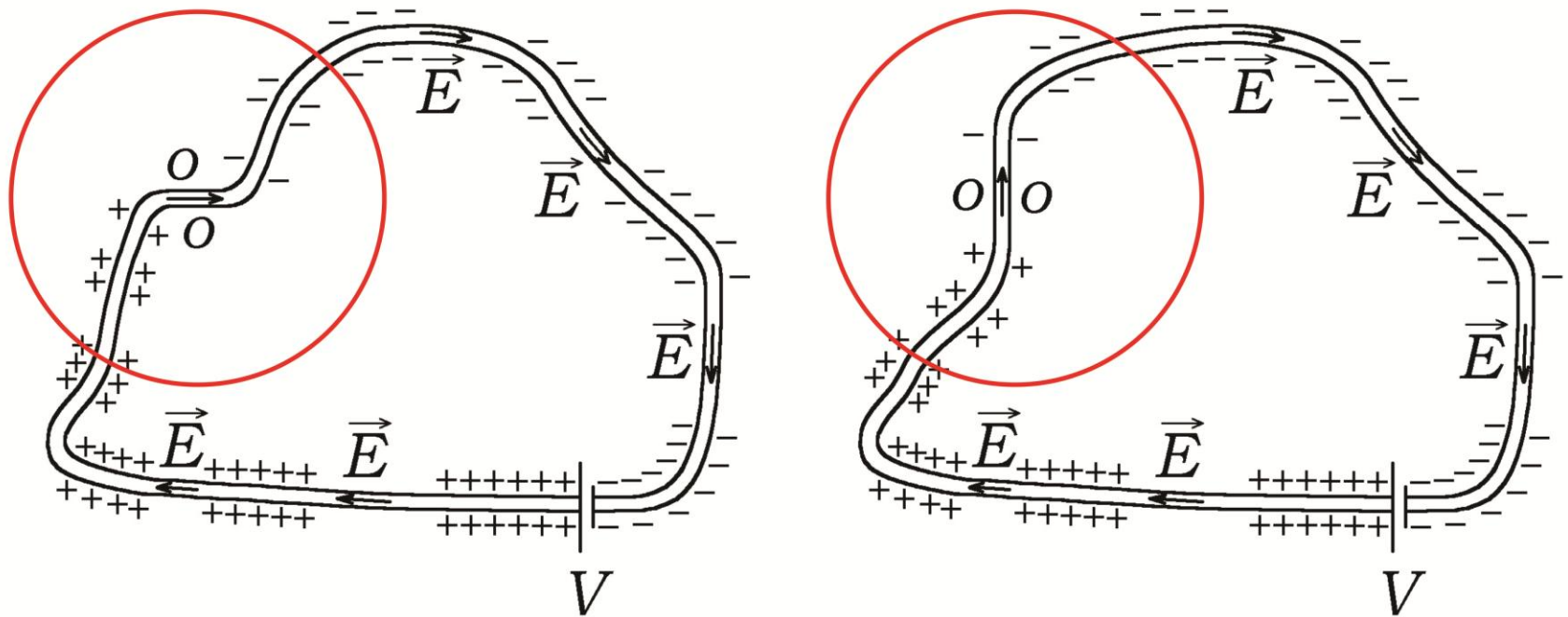
b) Considere o campo elétrico em um ponto C no interior de um fio em duas situações diferentes:



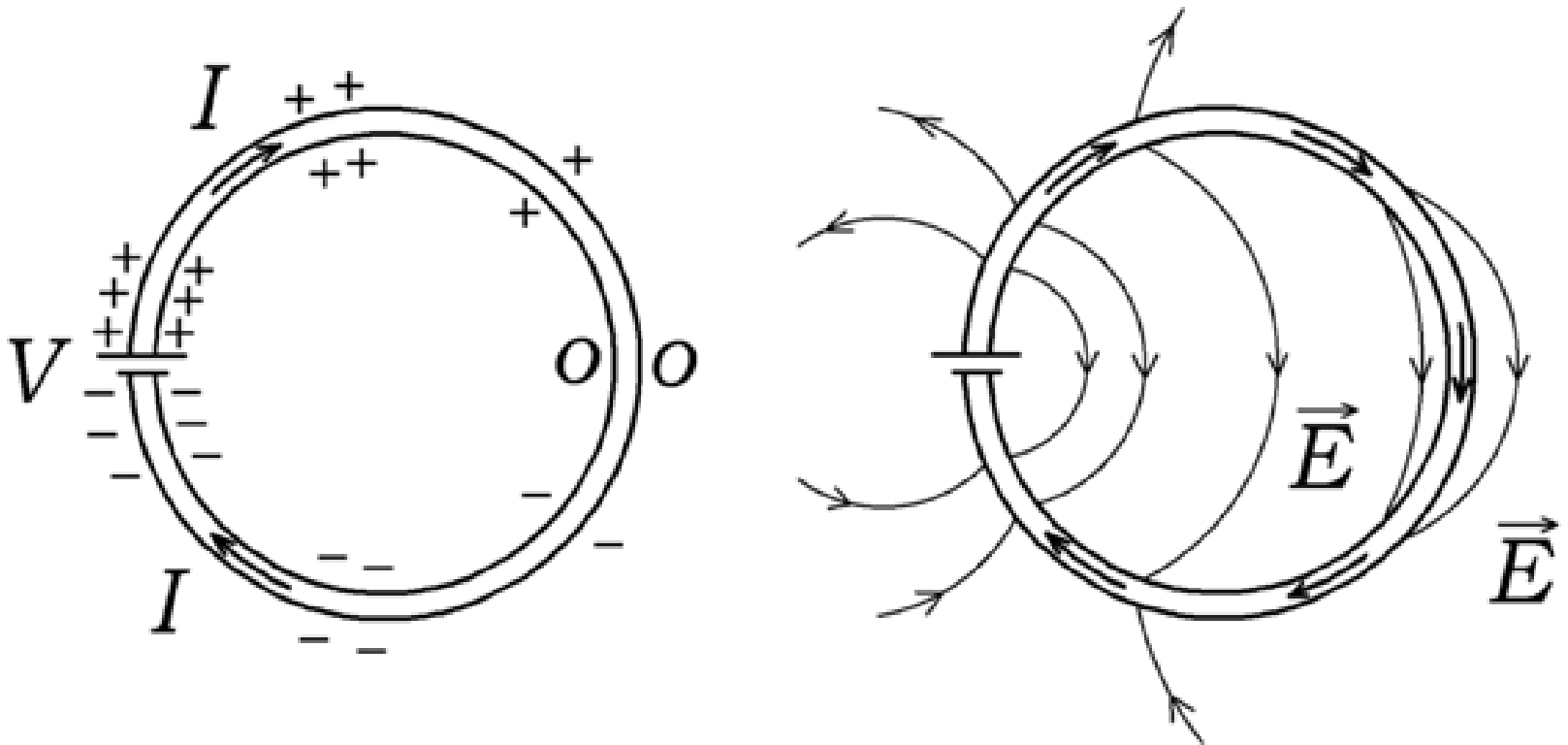
Lei de Ohm $\vec{E} = \rho \vec{J}$

O campo elétrico no ponto C é devido apenas às cargas no interior da bateria?

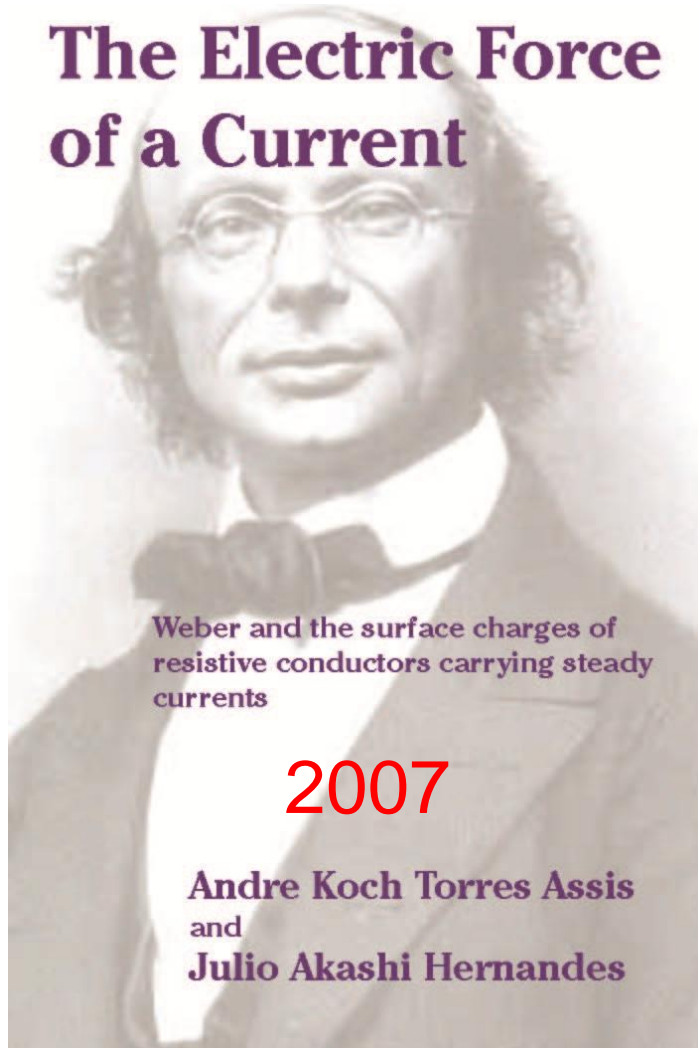
Weber e Kirchhoff propuseram ao redor de 1850 que o campo elétrico no interior do fio é devido à existência de cargas espalhadas ao longo da superfície do fio com corrente constante:



Consequência da suposição de Weber e
essência de toda este trabalho:



The Electric Force of a Current



Weber and the surface charges of
resistive conductors carrying steady
currents

2007

Andre Koch Torres Assis
and
Julio Akashi Hernandez

A FORÇA ELÉTRICA DE UMA CORRENTE

André Koch Torres Assis
Júlio Akashi Hernandez

EDUSP
EDUFAL

2009



PDF em: www.ifi.unicamp.br/~assis

Duas maneiras de resolver este problema:

a) Dar a densidade de carga sobre a superfície do fio e achar o potencial em todo o espaço:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{q'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \iint \frac{\sigma(r') da'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

b) Dar o potencial elétrico ao longo do fio e achar o potencial em todo o espaço resolvendo a equação de Laplace:

$$\nabla^2 \phi = 0$$

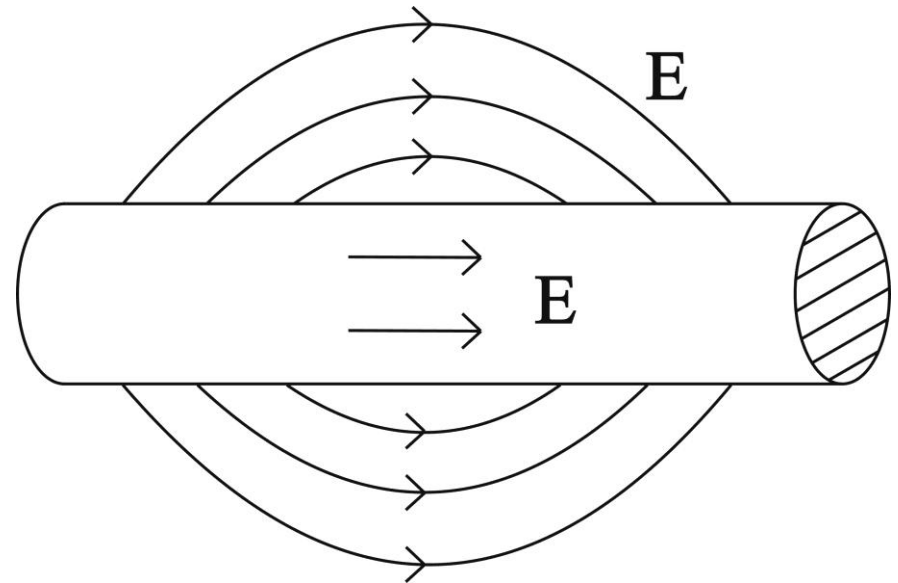
Solução para um fio reto com corrente constante

$$\sigma = -\sigma_0 \frac{z}{\ell}$$

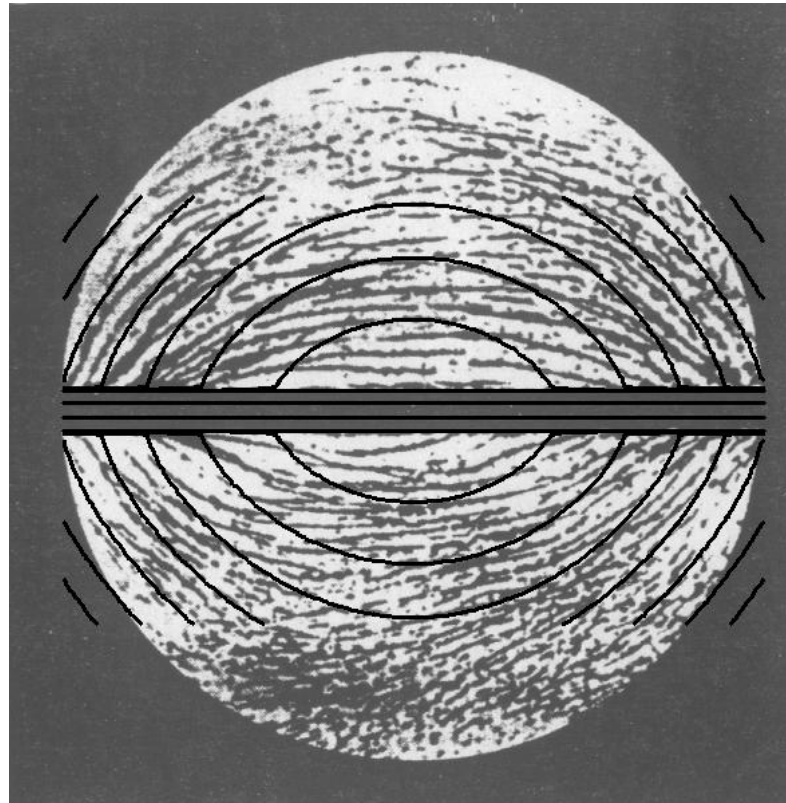


$$\vec{E}_{dentro} = E_0 \hat{k} = \frac{\Delta V}{\ell} \hat{k}$$

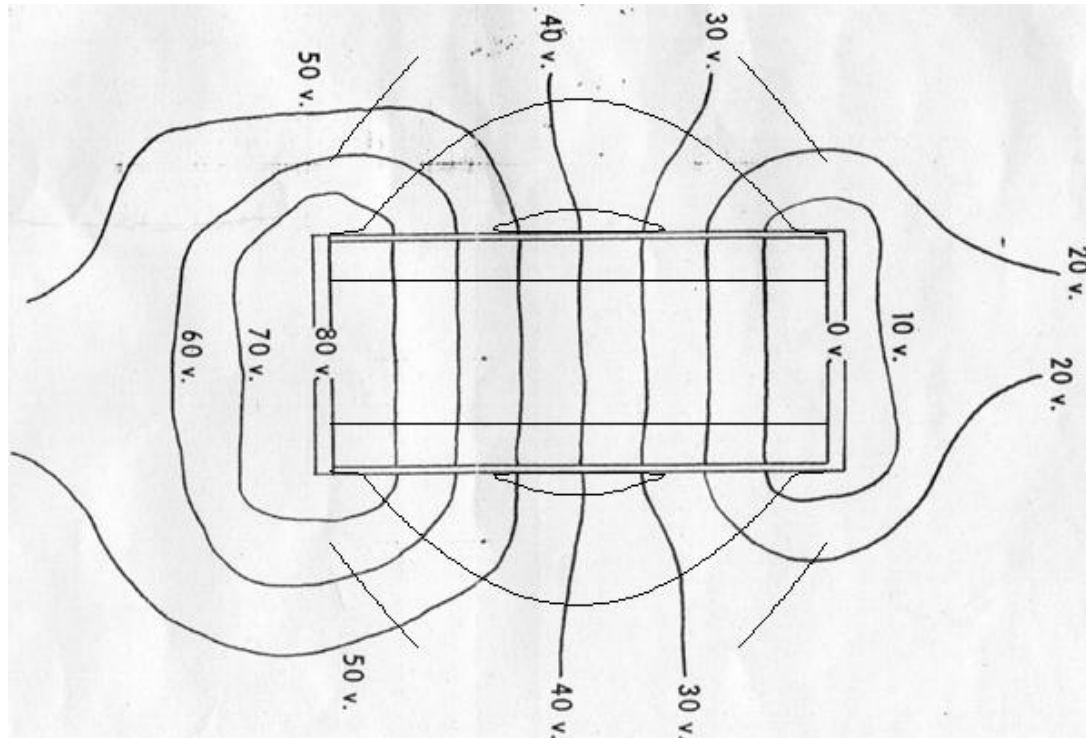
$$\vec{E}_{fora} = \frac{\Delta V}{\ell \ln \frac{\ell}{a}} \left(\ln \frac{\ell}{\rho} \hat{k} - \frac{z}{\rho} \hat{\rho} \right)$$



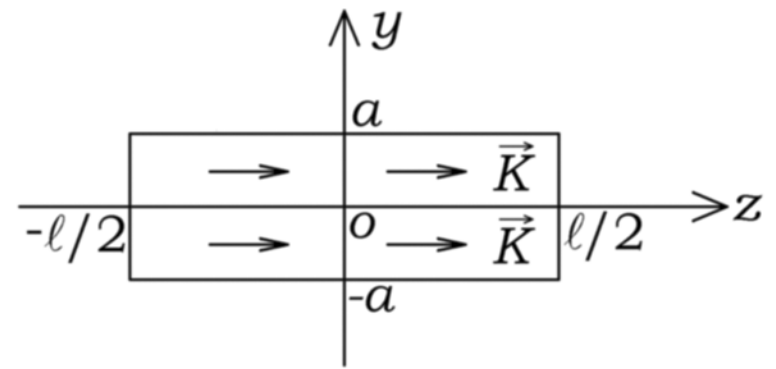
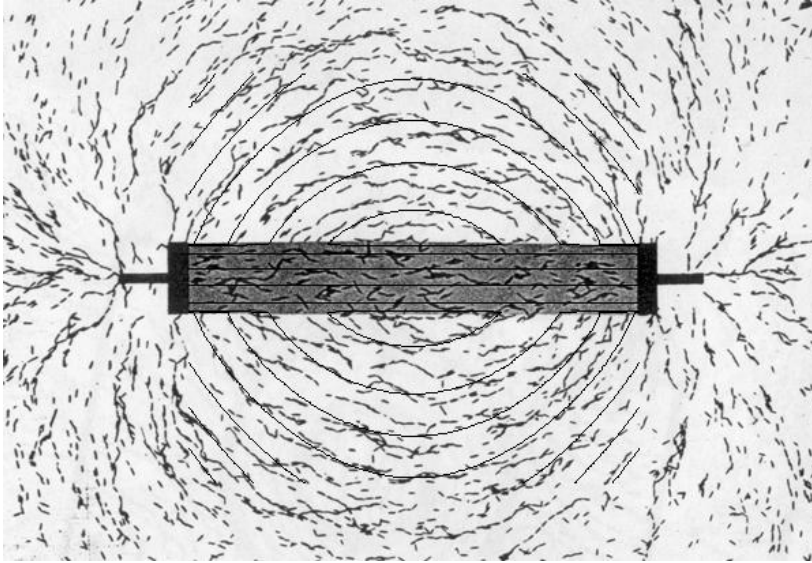
Experiência descrita em Bergmann e Schaefer (Elektrizität und Magnetismus, 1950). Corrente constante em fita de papel de alta resistividade envolta em óleo com fubá. $\Delta V = 30$ kV.



Equipotenciais medidas em câmara retangular oca com paredes de papel grafitado ($I = 5 \times 10^{-2} \text{A}$) ou filme fotográfico ($I = 4 \times 10^{-6} \text{A}$). Jefimenko et al., Proc. West Virginia Acad. Sci. 34, 163 (1962).



Fita resistiva:



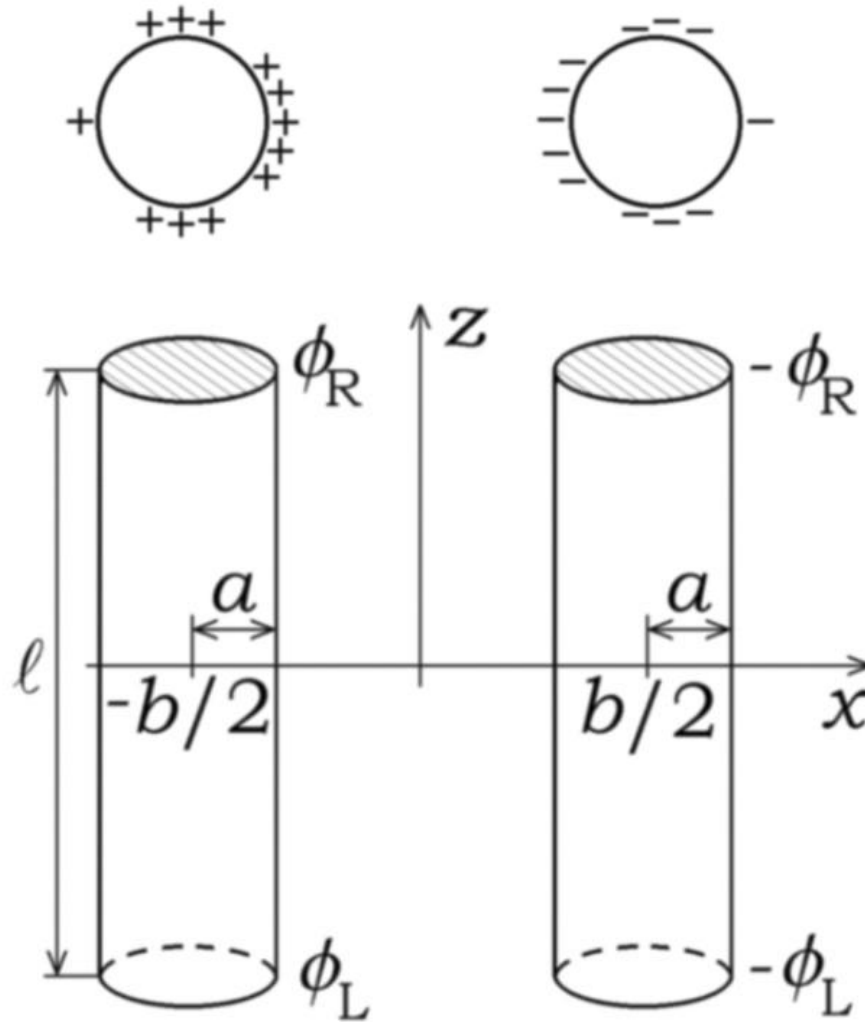
$$\sigma = \frac{k_1 + k_2 z}{\sqrt{a^2 - y^2}}$$

Jefimenko, AJP 30, 19 (1962). $\Delta V = 10$ kV.

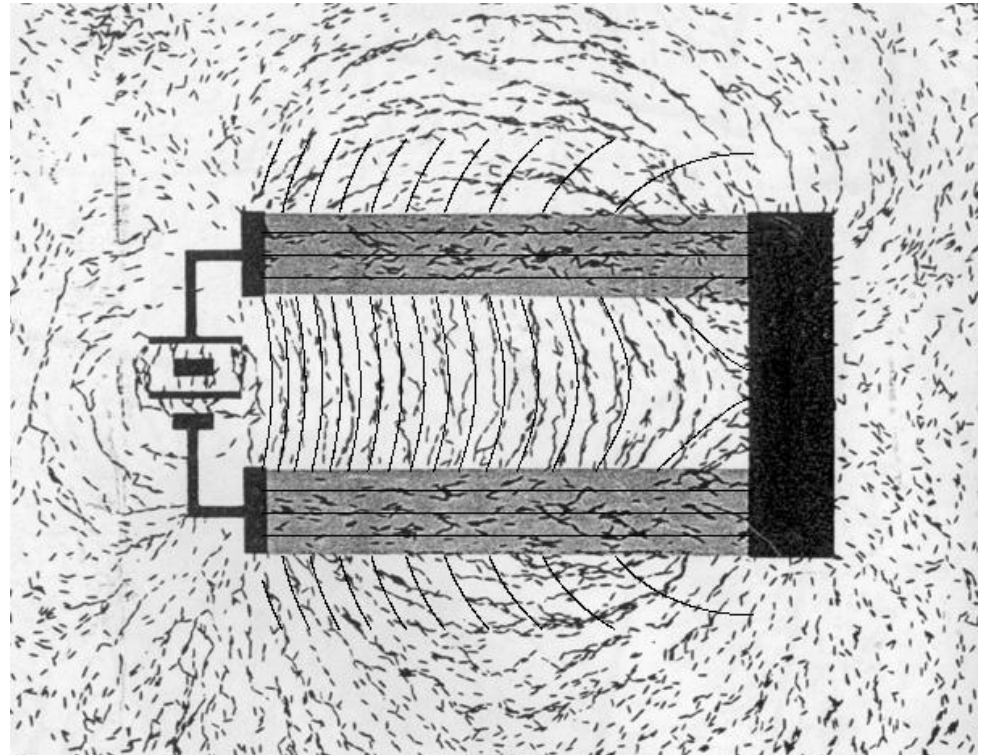
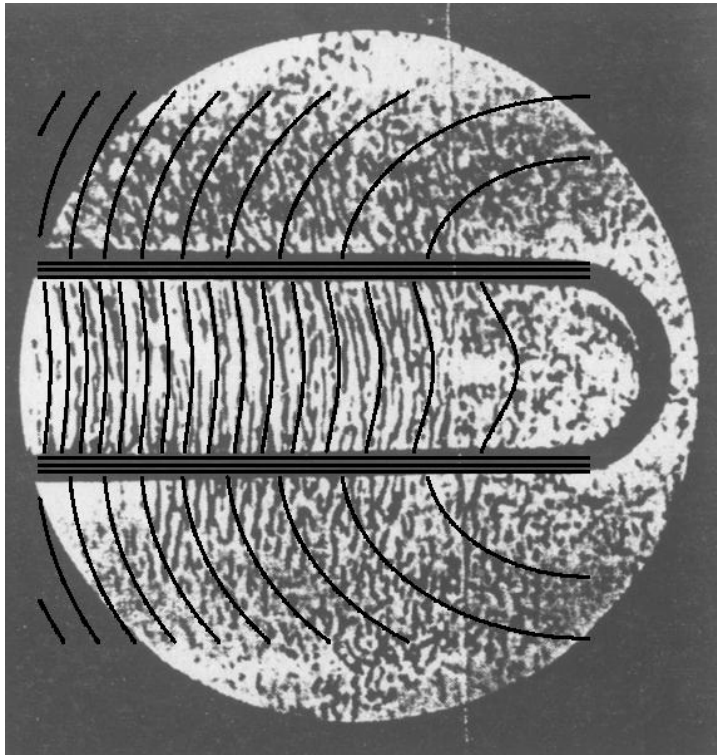
Experiência com sementes de grama sobre vidro.

Solução teórica com coordenadas elíptico-cilíndricas.

Linha de transmissão

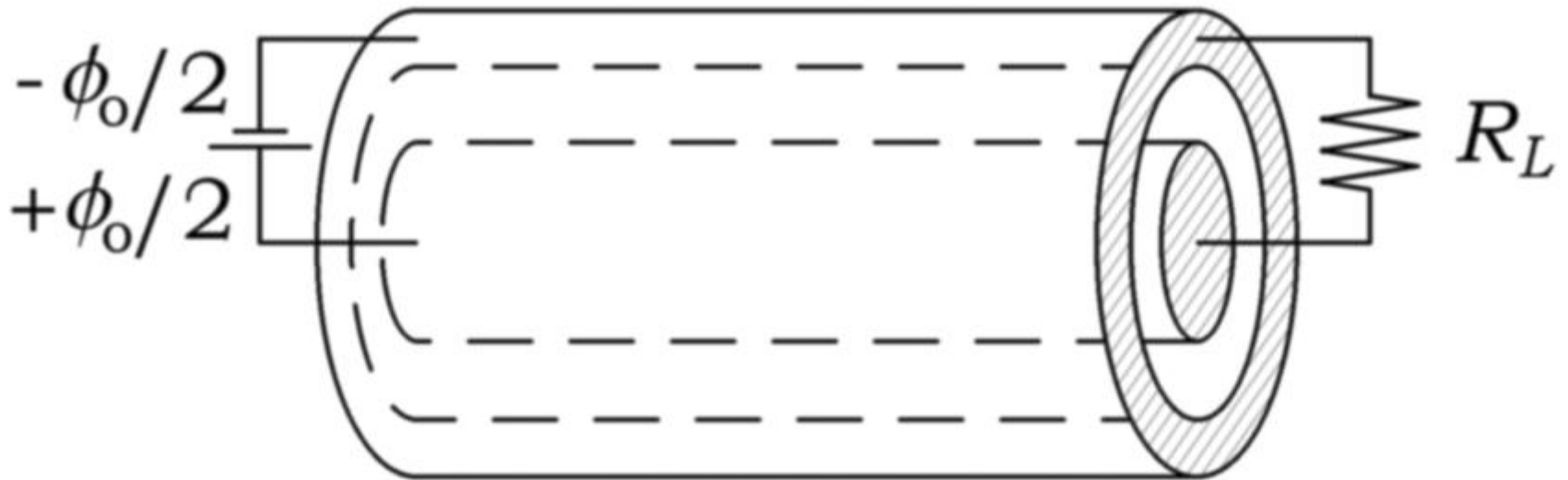


Experiências feitas por Bergmann, Schaefer e Jefimenko mostrando o campo elétrico externo à linha de transmissão, sobreposto aos nossos cálculos teóricos:



Cabo coaxial:

Situação é análoga ao caso de um fio reto.

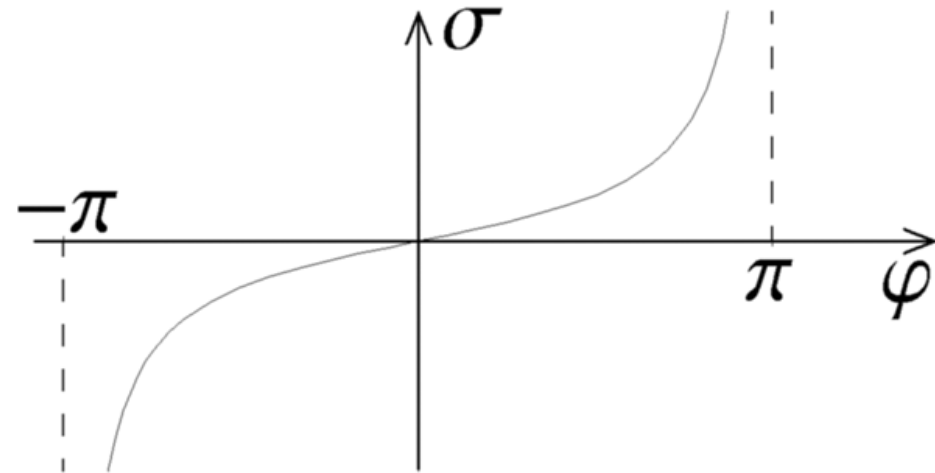
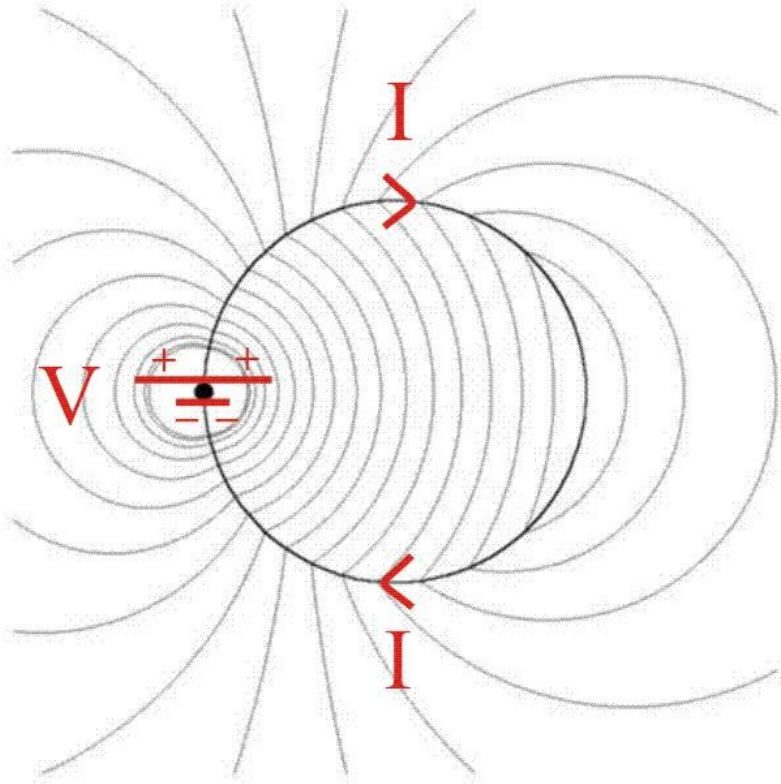


Porém: B fora = 0, mas E fora $\neq 0$.

Logo, previsão de interferência entre cabos coaxiais.

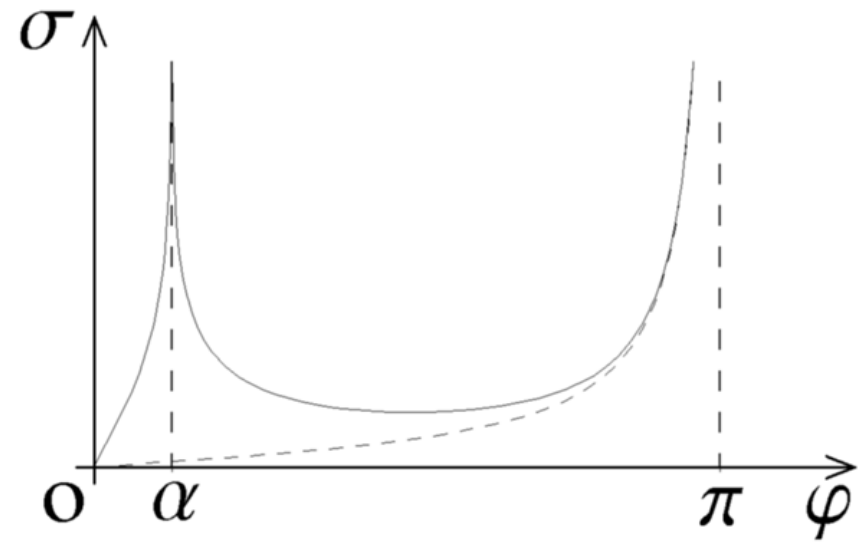
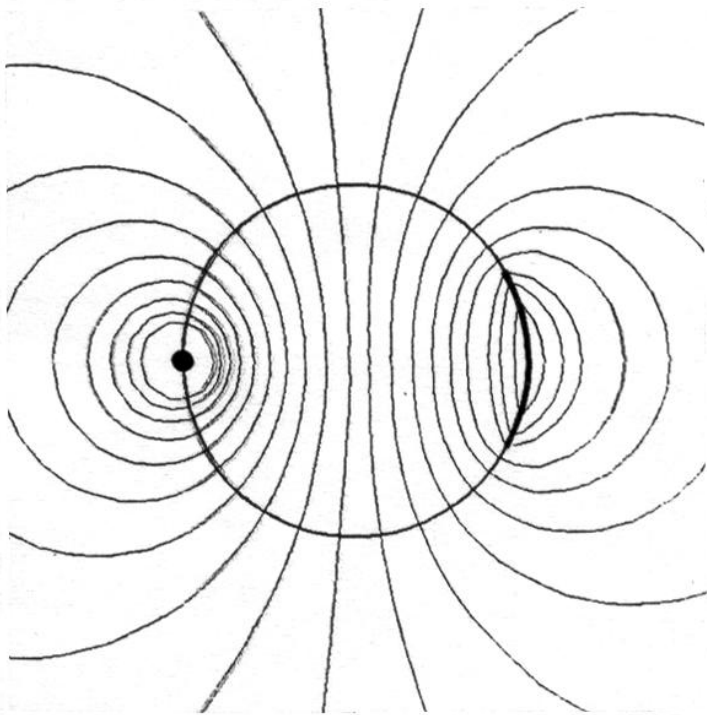
Solenóide infinito, Heald,
AJP 52, 522 (1984):

$$\sigma = \sigma_0 \tan \frac{\varphi}{2}$$

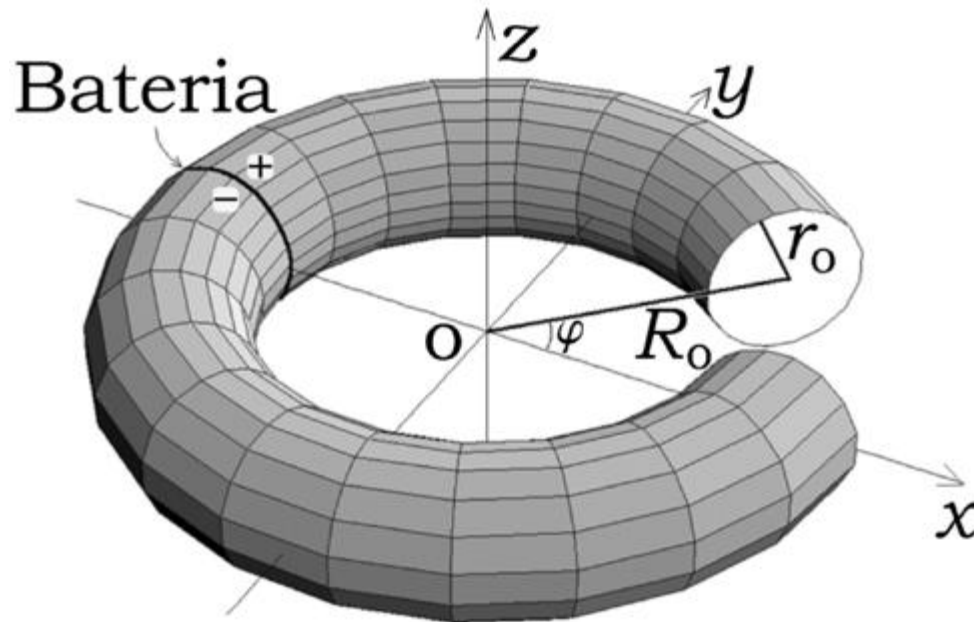


E fora $\neq 0$ e a densidade de carga não é linear com o ângulo azimutal.

Com resistor concentrado em uma região:



Anel resistivo com corrente constante:



J. A. Hernandez e A. K. T. Assis,
Phys. Rev. E 68, 046611 (2003).

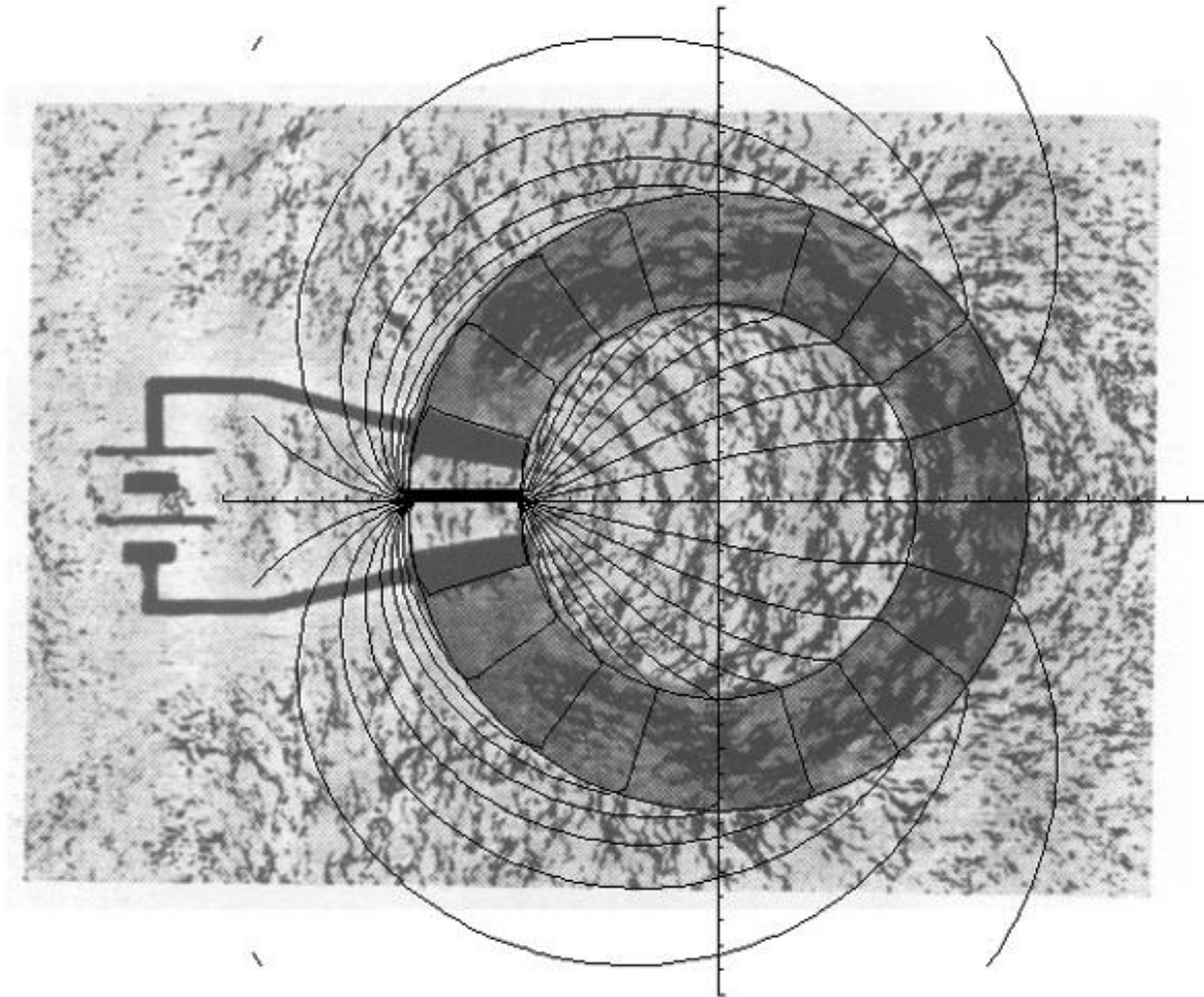
Coordenadas toroidais: η, χ, φ

$$\tan \eta = \frac{2a\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2 + z^2 + a^2}, \quad \tan \chi = \frac{2za}{x^2 + y^2 + z^2 - a^2}, \quad \tan \varphi = \frac{y}{x}$$

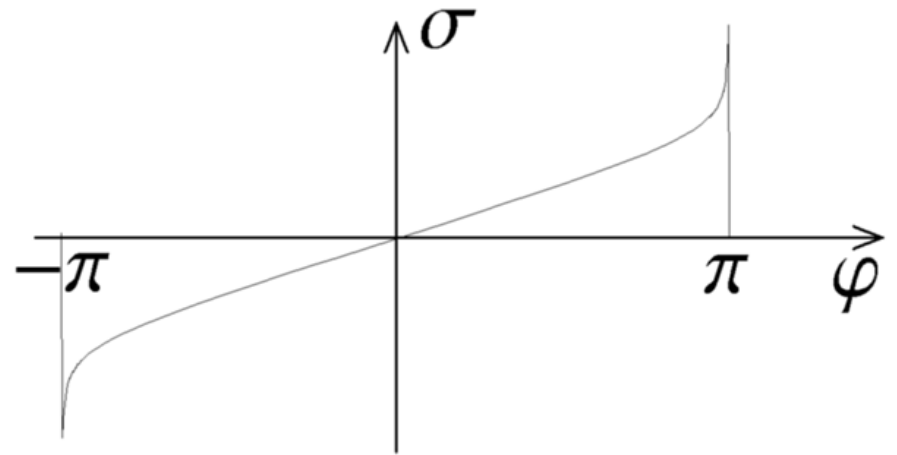
$$\nabla^2 \phi = 0, \quad \phi = \sqrt{\cosh \eta - \cos \chi} H(\eta) X(\chi) \Phi(\varphi)$$

$$\phi = \sqrt{\cosh \eta - \cos \chi} \left\{ \sum_{p=0}^{\infty} A_p \cos(p\chi) P_{p-1/2}(\cosh \eta) \right. \\ \left. + \sum_{q=1}^{\infty} \sin(q\varphi) \left[\sum_{p=0}^{\infty} B_{pq} \cos(p\chi) P_{p-1/2}^q(\cosh \eta) \right] \right\}$$

Apresentamos nossos cálculos teóricos das equipotenciais, comparados com a experiência feita por Jefimenko utilizando sementes de grama sobre vidro para indicar as linhas de campo elétrico dentro e fora do anel:



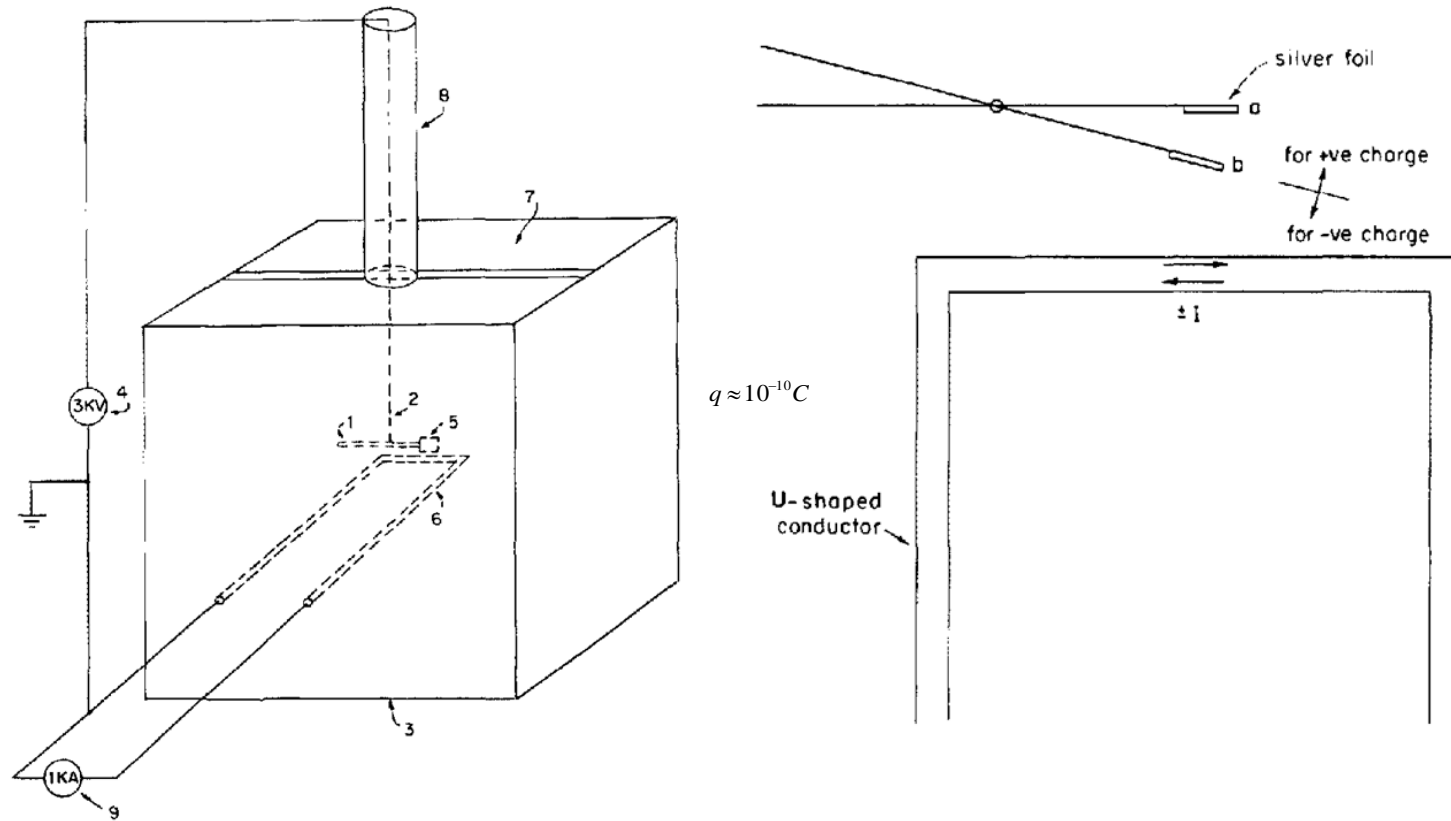
Densidade de cargas superficiais no anel com corrente constante:



Wilhelm Weber foi o primeiro a calcular as cargas superficiais em circuitos com corrente constante. Em 1852 conclui o seguinte no caso de um anel com corrente:

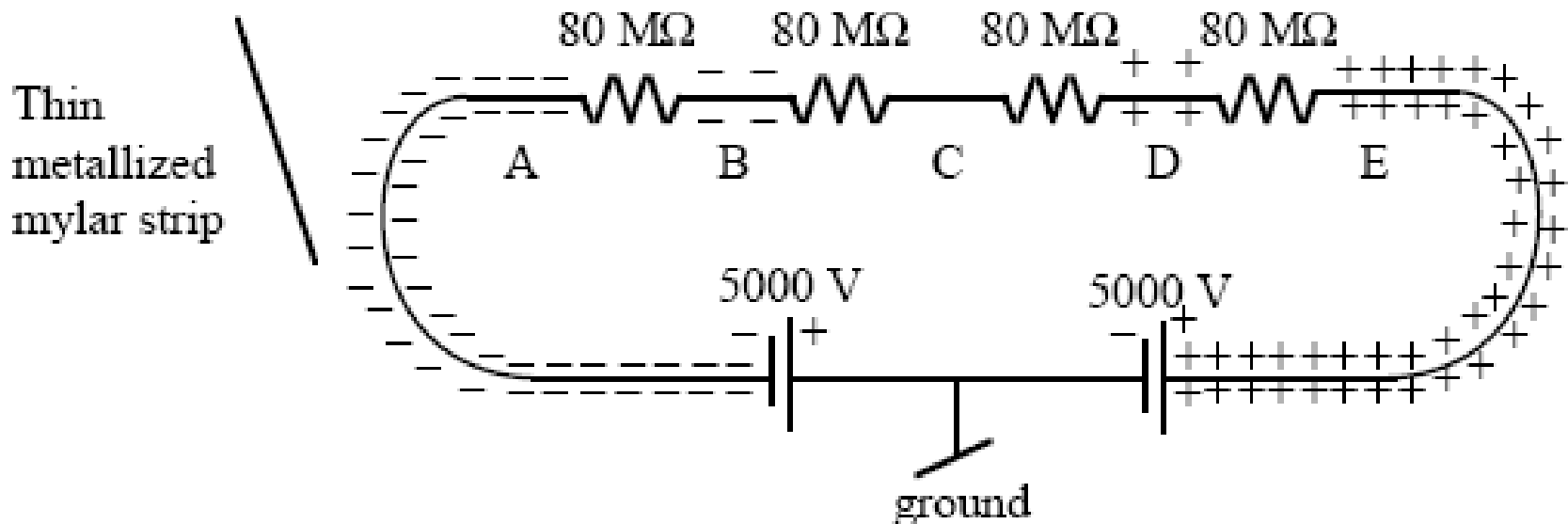
“A carga elétrica do circuito não cresce uniformemente a partir do ponto central até o ponto de contato, mas acelera gradualmente.”

Medida da força exercida por um circuito com corrente constante atuando sobre uma carga parada fora do circuito. Experiência de Sansbury, Rev. Scientific Instruments 56, 415 (1985):



$$q \approx 10^{-10} C, \quad I \approx kA, \quad F \approx 10^{-7} N$$

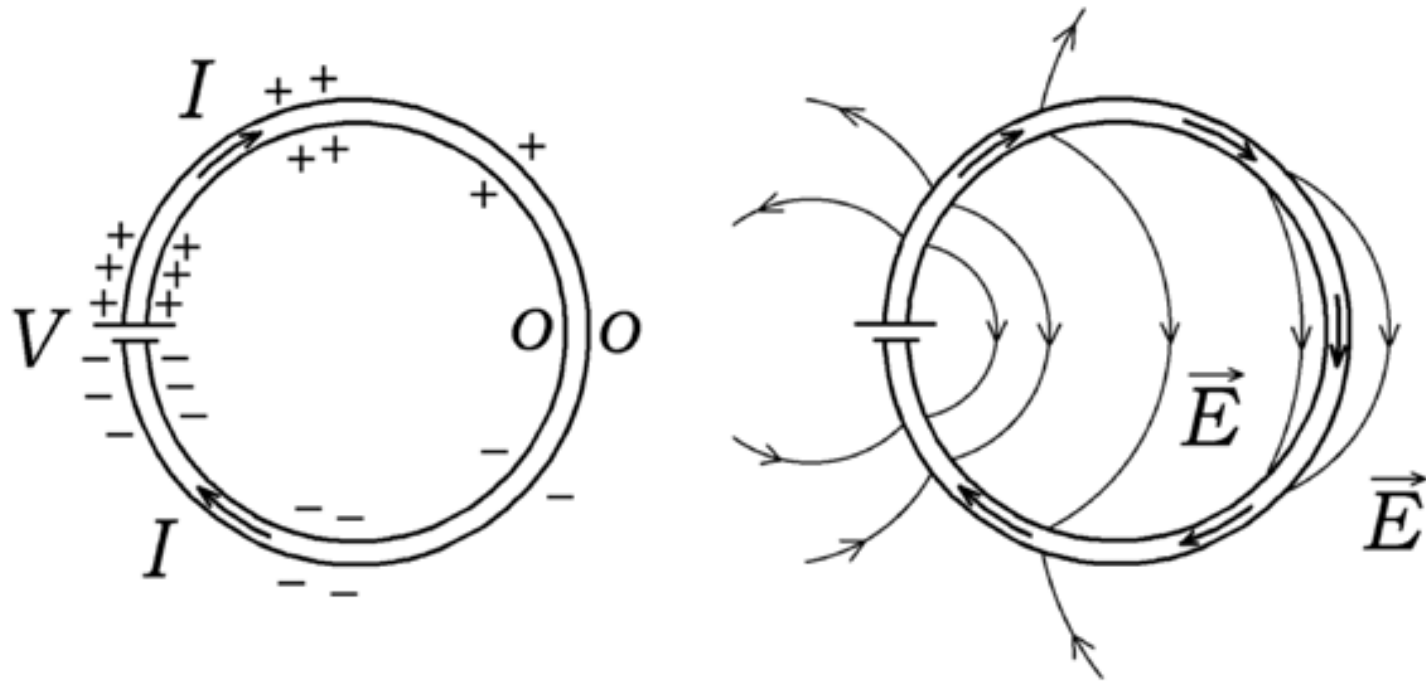
Experiência de Chabay e Sherwood coletando as cargas superficiais: Electric and Magnetic Interactions (2002).



Conclusão:

- Existem cargas espalhadas ao longo da superfície de um fio com corrente constante. A densidade de cargas é constante no tempo, mas varia ao longo do comprimento do fio. A densidade é positiva perto do terminal + da bateria e negativa perto do terminal – da bateria.
- Em um fio reto esta densidade de cargas cresce linearmente ao longo do circuito. Em um fio curvo o crescimento não é linear.
- Estas cargas superficiais geram um campo elétrico não apenas dentro do fio responsável pela lei de Ohm, mas também em todo o espaço ao redor do fio.
- Logo, um circuito resistivo conduzindo uma corrente constante exerce força sobre uma carga externa parada em relação ao circuito.
- Estes fatos foram calculados pela primeira vez por Wilhelm Weber há 150 anos, embora seu trabalho tenha sido totalmente esquecido!

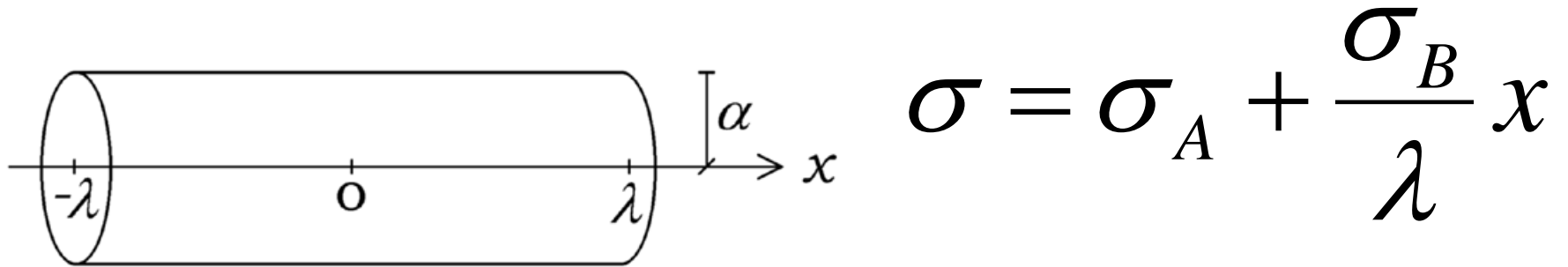
Conclusão:



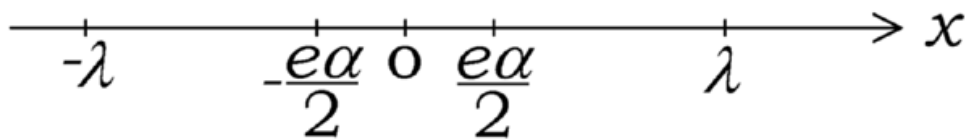
Mas Weber chegou aqui primeiro...

www.ifi.unicamp.br/~assis

Weber, 1852:



$$\vec{E}(x) = \frac{\alpha \sigma_B}{\epsilon_0 \lambda} \left(\ln \frac{\lambda}{e\alpha} \right) \hat{i}$$

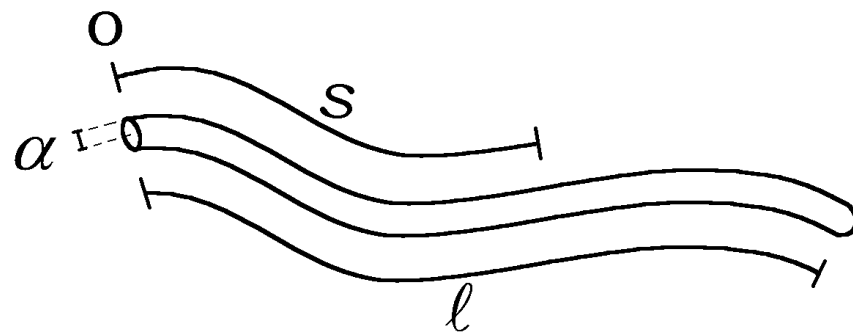


$$\sigma_L = 2\pi\alpha \left(\sigma_A + \frac{\sigma_B}{\lambda} x \right)$$

Propagação de sinais eletromagnéticos obtida pela primeira vez por Weber e Kirchhoff em 1857 a partir da eletrodinâmica de Weber: Equação do telegrafista

$$\vec{J} = g\vec{E} = -g \left(\nabla \phi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)$$

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$



$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial s^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{2\pi\epsilon_0 R}{\ell \ln \frac{\ell}{\alpha}} \frac{\partial \xi}{\partial t} \quad \text{onde } \xi = I, \sigma, \phi, A$$

Maxwell introduziu a corrente de deslocamento na lei circuital de “Ampère” em 1864-1873:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Porém:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

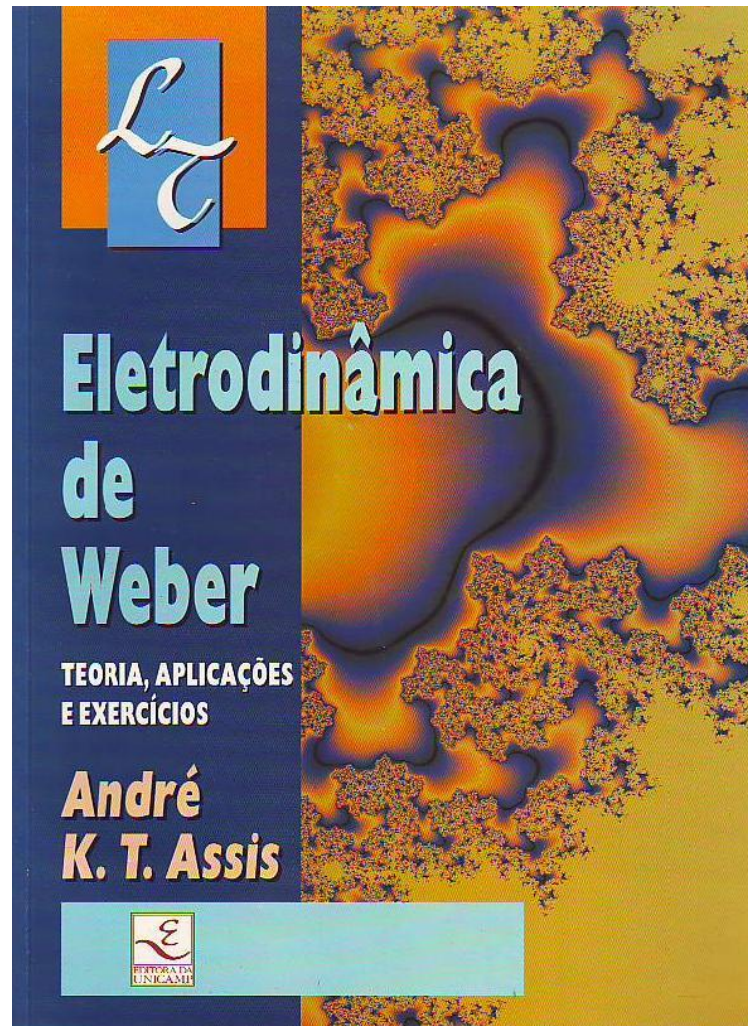
Utilizou a constante c que Weber havia introduzido em 1846.

$$c = 3 \times 10^8 \frac{m}{s}$$

Conhecia seu valor medido pela primeira vez por Weber em 1856.

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial s^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0$$

Conhecia a equação de onda obtida pela primeira vez por Weber e Kirchhoff em 1857 a partir da eletrodinâmica de Weber.



www.ifi.unicamp.br/~assis